Habilitationsvortrag zum Thema

Gibt es in der Mathematik ein Pfadintegral?

Markus J. Pflaum*

10. Januar 2001

*Humboldt Universität zu Berlin, Mathematisches Institut, Unter den Linden 6, 10099 Berlin,
email: pflaum@mathematik.hu-berlin.de

Einleitung

Pfadintegrale haben in der mathematischen und theoretischen Physik seit langem ihren festen Platz. Insbesondere sind Pfadintegralmethoden aus der statistischen Physik und der Quantenfeldtheorie nicht mehr wegzudenken. In dem heutigen Vortrag möchte ich nun der Frage nachgehen, inwieweit die Pfadintegralmethoden, die die theoretischen Physiker in ihrer täglichen Arbeit benutzen, auch mathematisch gerechtfertigt werden können.

Genauer gesagt gibt es eigentlich zwei Pfadintegralbegriffe in der mathematischen Physik, nämlich den des Wiener-Integrals, das das Phänomen der Brownschen Bewegung beschreibt und den des Feynman-Pfadintegrals, mit dem Übergangswahrscheinlichkeiten und der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie berechnet werden.

Mit Hilfe des Wiener-Integrals auf dem Raum der stetigen Pfade im Euklidischen Raum kann ein mathematisches Modell für das Phänomen der Brown'schen Bewegung konstruiert werden. 1828 hatte der britische Botaniker Brown die Bewegung oder besser das Dispersionverhalten von Blütenpollen in Wasser beobachtet und beschrieben. Heute weiß man, daß nicht nur Blütenpollen in Wasser, sondern auch Diffusionsprozesse, Sterndynamik, Prozesse der Kolloidchemie und Polymerphysik den Gesetzen der Brownschen Bewegung genügen.

Die erste theoretisch-physikalische Erklärung der Brownschen Bewegung stammt von Albert Einstein aus dem Jahre 1905. Anfang der 20'iger Jahre des letzten Jahrhunderts hat dann Norbert Wiener [11] mit Hilfe des nach ihm benannten Pfadintegrals ein mathematisches Modell für den Brownschen Prozeß angegeben, das heute zu einem der wichtigsten Bestandteil der modernen stochastischen Analysis geworden ist. Die im Vortragstitel gestellte Frage nach der Existenz von Pfadintegralen in der Mathematik läßt sich damit für das Wiener-Integral mit einem klaren ja beantworten. Das Wiener-Integral ist mathematisch wohldefiniert.

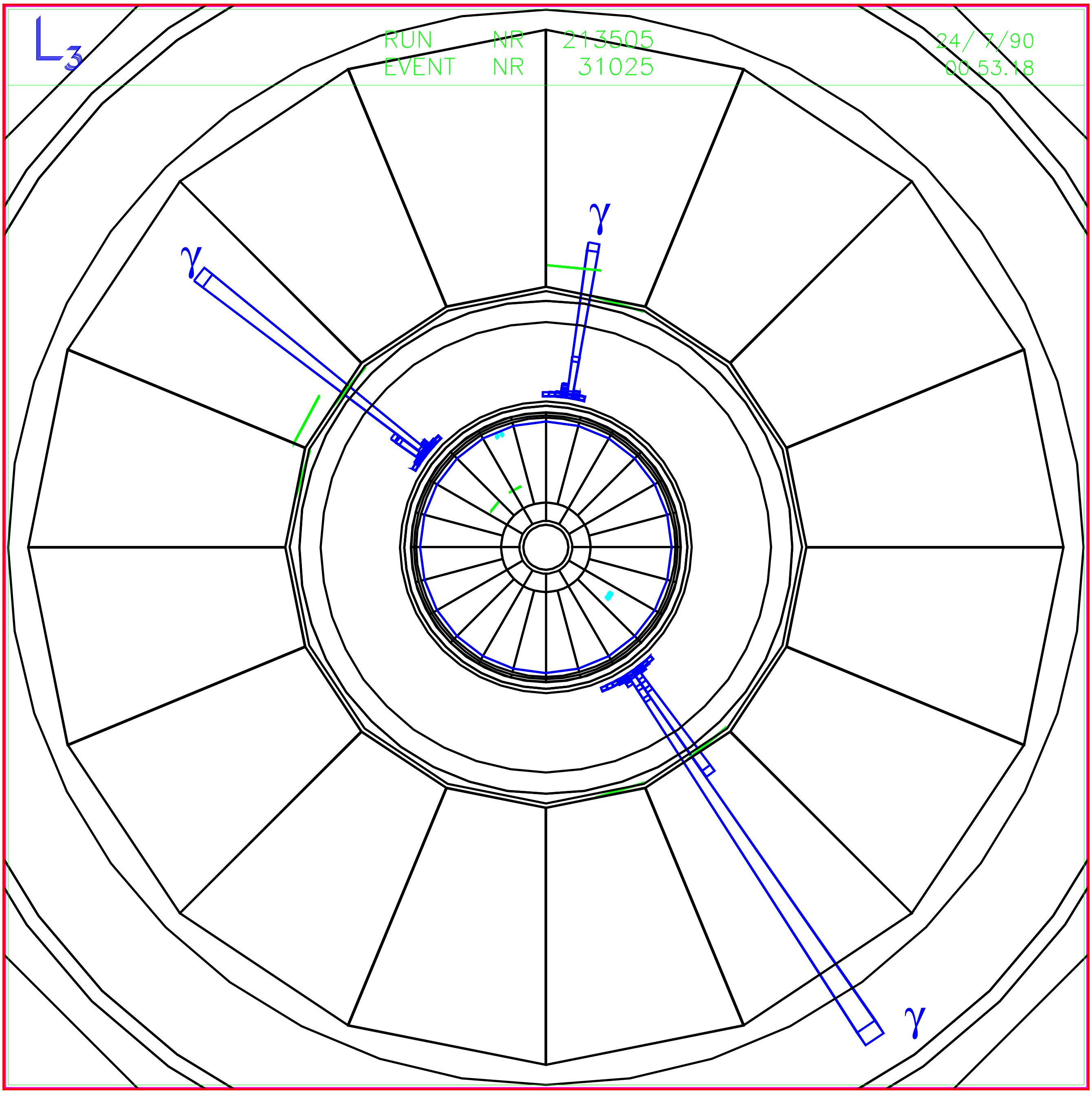
Gleichsam bedeutend für die Physik, aber doch noch ziemlich entfernt von einer mathematisch exakten Definition ist das Pfadintegral von Richard Feynman. Richard Feynman hatte 1942 bei seiner Dissertationsverteidigung in Princeton das nach ihm benannte Pfadintegral vorgestellt (siehe [5]). Dieses Pfadintegral liefert ein besonders anschauliche Darstellung des Kerns der die Dynamik eine quantenmechanischen Systems beschreibenden unitären Halbgruppe, und stellt auch die Nähe zur klassischen Mechanik besonders gut dar. Aus dem folgenden Zitat des Physikers Dyson aus dem Jahre 1980 wird ersichtlich, daß Feynmans Ideen als durchaus revolutionär aufgefaßt worden sind:

F.J.Dyson (1980):
Thirty-one years ago, Dick Feynman told me about his 'sum over histories' version of quantum mechanics. 'The electron does anything it likes', he said. 'It goes in any direction at any speed, forward or backward in time, however it likes, and then you add up the amplitudes and it gives you the wave-function.' I said to him 'You're crazy'. But he wasn't.

Das Feynmansche Pfadintegral ist aus der heutigen Quantenfeldtheorie nicht mehr wegzudenken. Insbesondere kann man nämlich damit die sogenannten Feynman-Regeln ableiten, mit Hilfe derer man dann die n-Punkt-Funktionen einer Quantenfeldtheorie berechnen kann. Aus diesen wiederum ergeben sich dann die zu meßenden Größen wie zum beispiel Streuquerschnitte und so weiter. Vom Feynmanschen Pfadintegral führt somit ein direkter, wenn auch langer Weg zu den Messungen der modernen Hochenergie-Physik am CERN, DESY usw. von denen ich zur Illustration hier ein Bild (siehe S. iv) mitgebracht habe. Es zeigt die Elektron-Positron-Vernichtung in ein Z-Boson, das dann wiederum in drei γ-Quanten zerfallen ist. Vorhersagen der Elementarteilchenphysik über derartige Zerfallsprozesse, die dann am DESY, CERN oder anderswo gemessen werden können, wäre ohne die Feynman-Regeln nicht möglich.

Elektron-Positron-Vernichtung im LEP, Cern

$$e^+ + e^- \longrightarrow Z^0 \longrightarrow \gamma + \gamma + \gamma$$



Als zweites eindrucksvolles Beispiel für die Bedeutung der Feynman-Regeln seien die theoretische und experimentelle Übereinstimmung des experimentell gut bestimmbaren gyromagnetischen Faktors des Elektrons genannt. Nach Voraussagen der QED und einer störungstheoretischen Entwicklung (mit Hilfe von Feynman-Regeln) in Potenzen der Sommerdfeldschen Feinstrukturkonstanten α erhält man

$$g_{\mathrm{th}} = 2.002319304281(54).$$

Experimentell kann dieser Wert noch genauer bestimmt werden, nämlich zu

$$g_{\mathrm{exp}} = 2.0023193043737(82).$$

Es liegt hiermit eine phantastische Übereinstimmung der beiden Wertebis auf 9 Stellen hinter dem Komma vor, was einen Quantenfeldtheoretiker in einem Lehrbuch zu dem Satz veranlaßte: *This is why we believe in Quantum Field Theory!*
Frappierend ist jedoch, daß die von den Quantenfeldtheoretikern benutzten Methoden wie das Pfadintegral bis heute auf eine vollständige mathematische Rechtfertigung warten.

Nach diesen einleitenden und motivierenden Worten möchte ich nun zum mathematischen Teil übergehen und Ansatzmöglichkeiten zur Definition eines Pfadintegralbegriffs nach Feynman erläutern. Dabei habe ich meinen Vortrag in drei Abschnitte eingeteilt:

1. Heuristische Herleitung des Pfadintegrals nach Feynman

2. Feynman-Kac-Formel

3. Zugang zu Feynman-Pfadintegralen nach Albeverio–Høegh-Krohn

1 Heuristische Herleitung des Pfadintegrals nach Feynman

Die Zustände eines quantenmechanischen Systems werden durch Vektoren φ in einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ beschrieben, wobei in diesem Vortrag $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ angenommen werden soll. Die zeitliche Entwicklung der Zustände wird (im Schrödinger-Bild) durch eine stark stetige einparametrige unitäre Halbgruppe (siehe Satz A.2)

$$Q_t = e^{-itH/\hbar} \tag{1.1}$$

definiert, wobei H ein selbstadjungierter (unbeschränkter) Operator auf $\mathcal{H}$ ist, der sogenannte Hamilton-Operator des quantenmechanischen Systems.

Das Feynmansche Pfadintegral soll nun eine intuitiv besonders einsichtige und nützliche Darstellung für den Kernoperator K_t von Q_t geben:

$$\langle \psi, Q_t \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K_t(x,y)\, \overline{\psi(x)} \varphi(x)\, dx\, dy, \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d). \tag{1.2}$$

An einem einfachen Beispiel möchte ich einen solchen Kern kurz bestimmen. Sei dazu H_0 der Hamilton-Operator des freien Teilchens im $\mathbb{R}^d$, also

$$H_0 = -\frac{\Delta}{2m} \tag{1.3}$$

und

$$h_0(\xi) = \frac{1}{2m}\,\|\xi\|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \tag{1.4}$$

das vollständige Symbol von H_0 im Sinne der Pseudodifferentialoperatorentheorie auf $\mathbb{R}^d$. Es gilt dann für alle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^d)$

$$H_0(\varphi) = \mathcal{F}^{-1}\big(h_0 \cdot \mathcal{F}(\varphi)\big), \tag{1.5}$$

wobei $\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, \varphi(x)\, dx$ die Fourier-Transformation bezeichnet. Folglich gilt für $a \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, a > 0$

$$\begin{aligned} e^{-aH_0}\varphi(y) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle y,\xi\rangle} e^{-a\frac{1}{2m}\|\xi\|^2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\, dx\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{a}{2m}\|\xi\|^2} e^{-i\langle x-y,\xi\rangle}\varphi(x)\, d\xi\, dx = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi a}\right)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{m}{2a}\|x-y\|^2}\varphi(x)\, dx \end{aligned} \tag{1.6}$$

Setzt man nun $a = 2mt$, so erhält man mit

$$p(x,y;t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-\frac{1}{4\pi t}\|x-y\|^2} \tag{1.7}$$

den Kern des Wärmeleitungs-Operators $e^{t\Delta}$ dar; deshalb nennt man $p(x,y;t)$ oft auch den Wärmeleitungskern.

Setzt man dagegen $a = it + \varepsilon$ und läßt $\varepsilon > 0$ gegen 0 streben, so erhält man den Kern $K(x,y,t)$ des quantenmechanischen Zeitentwicklungsoperators e^{-itH_0}

$$K(x,y,t) = \left(\frac{m}{2\pi it}\right)^{d/2}\, e^{-\frac{im}{2\pi t}\|x-y\|^2}. \tag{1.8}$$

Wir wollen nun den Kern der Zeitentwicklung komplizierterer Hamilton-Operatoren ableiten. Dazu betrachte man den Hamilton-Operator $H = H_0 + V$, wobei V ein reellwertiges Potential $\in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ sein soll. Nach der Trotter-Kato-Produktformel (siehe Satz A.3) gilt dann für $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
&\left(e^{-it(H_0+V)}\varphi\right)(x_0) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\pi it}{n}\right)^{-\frac{dn}{2}} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^d}\cdots\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{n}{4t}\|x_1-x_0\|^2} e^{-i\frac{t}{n}V(x_1)} \cdots e^{i\frac{n}{4t}\|x_n-x_{n-1}\|^2} e^{-i\frac{t}{n}V(x_n)}\varphi(x_n)\,dx_n\cdots dx_1 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\pi it}{n}\right)^{-\frac{dn}{2}} \int_{\mathbb{R}^d}\cdots\int_{\mathbb{R}^d} e^{iS_n(x_0,\cdots,x_n,t)}\varphi(x_n)\,dx_n\cdots dx_1,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

wobei

$$S_n(x_0,\cdots,x_n,t) = \sum_{i=1}^n \frac{t}{n}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\|x_i - x_{i-1}\|}{t/n}\right)^2 - V(x_i)\right). \tag{1.10}$$

Man beachte dabei, daß das iterative Integrale nicht im L^2-Sinne definiert ist, sondern als Limes von L^1-Approximationen aufgefaßt werden muß.

Die Formel (1.9) kann nun im Sinne Feynmans folgendermaßen interpretiert werden. Nehmen wir an, die Punkte x_i seien Stützpunkte eines genügend glatten Pfades $\gamma : [0,t] \to \mathbb{R}^d$ zu Stützzeiten t_i mit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, also $x_i = \gamma(t_i)$ für $i = 0,\cdots,n$. Dann sind die oben definierten S_n Riemann-Summen zu folgendem Integral:

$$S(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{4}\|\dot\gamma(s)\|^2 - V(\gamma(s))\,ds. \tag{1.11}$$

Feynman nimmt nun an, daß das unendliche Produkt der Integrale Sinn macht, oder mathematischer ausgedrückt, daß das unendliche Produkt des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^d$

existiert. Unter dieser Annahme erhält man im Limes das heuristische Feynman-Pfadintegral:

$$\left(e^{-i\frac{t}{\hbar}(H_0+V)}\varphi\right)(x) = \int_{\Omega_x} e^{\frac{i}{\hbar}S(\gamma)}\varphi(\gamma(t))d\gamma, \tag{1.12}$$

wobei Ω_x der Raum der Pfade mit Anfangspunkt x ist und S das durch (1.11) definierte Wirkungs-Funktional auf dem Raum der differenzierbaren Pfade.

Das heuristische Feynman-Pfadintegral, wie es in dem berühmten Lehrbuch von Feynman–Hibbs [6] erläuert und verwendet wird, ist mathematisch jedoch nicht wohldefiniert, da nach einem Satz von A. Weil auf einem unendlichdimensionalen, separablen normierten Vektorraum kein translationsinvariantes lokalendliches Maß existiert. Im folgenden will ich zwei der in der mathematisch-physikalischen Literatur verfolgten Ansätze zu einem mathematisch korrekten und quantenphysikalisch anwendbaren Pfadintegralbegriff vorstellen.

2 Feynman–Kac-Formel

Die Feynman–Kac-Formel stellt eine Formel zur Darstellung des Kerns des Operators

$$e^{-t(H_0+V)} \tag{2.1}$$

dar, wobei über das Wiener-Maß auf dem Raum der Pfade integriert wird. Im folgenden werde ich den Zugang zur Feynman–Kac-Formel gemäß Reed–Simon [8, 10] erläutern; dieser Zugang geht letztlich auf Nelson [7] zurück.

Mit Hilfe der Trotter–Kato-Produktformel (Satz A.3) berechnet man für $H_0 = -\Delta$, V eine reellwertige Funktion aus dem Funktionenraum $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $H = H_0 + V$

$$\begin{aligned}&\left(e^{-t(H_0+V)}\varphi\right)(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(e^{-\frac{t}{n}H_0}e^{-\frac{t}{n}V}\right)^n\varphi\right)(x_0) = \\ &\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\cdots\int_{\mathbb{R}^d} p\left(x_0, x_1; \frac{t}{n}\right)e^{-\frac{t}{n}V(x_1)}\cdots p\left(x_{n-1}, x_n; \frac{t}{n}\right)e^{-\frac{t}{n}V(x_n)}\varphi(x_n)dx_1\cdots dx_n,\end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei $p(x, y; t)$ durch Gl. (1.7) gegeben ist. Auch hier entsteht das Problem, daß das unendliche Produkt des Lebesgue-Maßes nicht wohldefiniert ist, und daß die Wirkung

$$\int_0^t \|\dot{\gamma}(s)\|^2\, ds \tag{2.3}$$

für nicht genügend glatte Pfade ein extrem singuläres Objekt ist.

Der Ausweg aus diesem Dilemma führt über das Wiener-Maß, das im folgenden definiert werden soll. Zur Definition desselben betrachte man den Raum

$$\Omega := \left(\dot{\mathbb{R}}^d\right)^{[0,\infty)}, \tag{2.4}$$

wobei $\dot{\mathbb{R}}^d \cong S^d$ die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^d$ darstellen soll. Versieht man Ω mit der Produkttopologie, so wird Ω nach dem Satz von Tychonov zu einem kompakten topologischen Raum. Als nächstes betrachte man den folgenden Funktionenraum

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\text{fin}} := \big\{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f(\gamma) = F(\gamma(t_1), \cdots, \gamma(t_n)) \text{ für alle } \gamma \in \Omega,\\ \text{wobei } F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{nd}) \text{ und } 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n\big\}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Nach dem Satz von Stone–Weierstraß ist $\mathcal{C}_{\text{fin}}$ dicht in $\mathcal{C}(\Omega)$ enthalten. Wir wollen nun für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ein Funktional auf $\mathcal{C}_{\text{fin}}$ konstruieren, und setzen für $f \in \mathcal{C}_{\text{fin}}$:

$$\begin{aligned}&\lambda_{x_0}(f) := \\ &\int_{\mathbb{R}^d}\cdots\int_{\mathbb{R}^d} F(x_1, \cdots, x_n)\, p(x_0, x_1; t_1)\, p(x_1, x_2; t_2 - t_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1}, x_n; t_n - t_{n-1})\, dx_1\cdots dx_n,\end{aligned} \tag{2.6}$$

wobei F und die t_i gemäß (2.5) gewählt sind. Mit Hilfe der Tatsache, daß $p(x, y; t)$ Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist, rechnet man nun leicht nach, daß λ_{x_0} wohldefiniert ist, das heißt unabhängig von der speziellen Darstellung von f mittels F und der t_i. Zudem ist λ_{x_0} offensichtlich stetig auf $\mathcal{C}_{\text{fin}}$. Wegen der Dichtheit $\mathcal{C}_{\text{fin}} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ kann λ_{x_0} folglich zu einem stetigen und, wie man sofort sieht, sogar positiven Funktional auf Ω fortgesetzt werden. Nach dem Darstellungssatz von Riesz–Markov existiert deshalb ein Borel-Maß μ_{x_0} auf Ω, so daß

$$\lambda_{x_0}(f) = \int_\Omega f \, d\mu_{x_0}, \qquad f \in \mathcal{C}(\Omega). \tag{2.7}$$

Man nennt μ_{x_0} ein Wiener-Maß auf Ω. Wir wollen Ω einschränken auf einen Pfadraum mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Sei dazu $0 < \alpha \leq 1$ und Ω_α der Unterraum $\subset \Omega$ aller $\mathbb{R}^d$-wertigen und α-Hölderstetigen Pfade auf $[0, \infty)$. Aufgrund der Arbeiten von N. Wiener weiß man, daß Ω_α eine meßbare Menge ist, und daß gilt:

$$\mu_{x_0}(\Omega_\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für } \alpha \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Man sagt deshalb, das Wiener-Maß sei auf den Pfaden mit nichtbeschränkter Variation konzentriert.

Wendet man nun die Konstruktion des Wiener-Maßes auf das ursprüngliche Problem der Berechnung des Zeitentwicklungsoperators $e^{-t(H_0+V)}$ an, so ergibt sich im wesentlichen aus Gl. (2.2) das folgende zenrale Resultat.

2.1 Satz *(Feynman-Kac-Formel) Sei $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Sei weiter V eine reellwertige Funktion aus dem Funktionenraum $L^2(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $H = H_0 + V$ mit $H_0 = -\Delta$. Dann gilt für alle $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und fast alle $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\left(e^{-tH}\varphi\right)(x) = \int_{\Omega_\alpha} \varphi(\gamma(t)) \, \exp\left(-\int_0^1 V(\gamma(s)) \, ds\right) \, d\mu_x(\gamma). \tag{2.9}$$

3 Zugang zu Feynman-Pfadintegralen nach Albeverio und Høegh-Krohn

Einen Ansatz zur Berechnung des quantenmechanischen unitären Zeitentwicklungsoperators mit Hilfe sogenannter Fresnel-Integrale haben Albeverio und Høegh-Krohn in [1] entwickelt. Zum Verständnis der diesem Zugang zugrundeliegenden Idee betrachte man zuerst einen d-dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Bekanntlich gilt dann die folgende Formel im Sinne temperierter Distributionen:

$$\int_{\mathcal{H}} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}\, e^{-i\langle x,y\rangle}\, dx = (2\pi i)^{\frac{d}{2}}\, e^{-\frac{i}{2}\|y\|^2}. \tag{3.1}$$

Definiert man nun das sogenannte normierte Integral durch

$$\widetilde{\int_{\mathcal{H}}} f(x)\, dx := \frac{1}{(2\pi i)^{d/2}} \int_{\mathcal{H}} f(x)\, dx, \tag{3.2}$$

so folgt

$$\widetilde{\int_{\mathcal{H}}} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}\, e^{-i\langle x,y\rangle}\, dx = e^{-\frac{i}{2}\|y\|^2} \tag{3.3}$$

Für eine Funktion φ aus dem Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ gilt dann mit der Fourier-Transformierten $\hat{\varphi}(x) = \int_{\mathcal{H}} e^{-i\langle y,x\rangle}\, \varphi(y)\, dy$ die Beziehung

$$\widetilde{\int_{\mathcal{H}}} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}\, \hat{\varphi}(x)\, dx = \int_{\mathcal{H}} \widetilde{\int_{\mathcal{H}}} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}\, e^{-i\langle y,x\rangle}\, \varphi(y)\, dx\, dy = \int_{\mathcal{H}} e^{-\frac{i}{2}\|y\|^2}\, \varphi(y)\, dy. \tag{3.4}$$

Man beachte hierbei, daß $\varphi(y)\, dy$ als ein endliches komplexes Maß auf $\mathcal{H}$ aufgefaßt werden kann. Ist nun allgemeiner $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ Fourier-Transformierte eines beschränkten komplexen Maßes μ auf $\mathcal{H}$, gilt also

$$f(x) = \hat{\mu}(x) = \int_{\mathcal{H}} e^{-i\langle x,y\rangle}\, d\mu(y), \tag{3.5}$$

so legt Gl. (3.4) die folgende Definition nahe:

$$\mathcal{F}(f) := \widetilde{\int_{\mathcal{H}}} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}\, f(x)\, dx := \int_{\mathcal{H}} e^{-\frac{i}{2}\|x\|^2}\, d\mu(y). \tag{3.6}$$

Gemäß Albeverio und Høegh-Krohn nennt man $\mathcal{F}(f)$ das normierte Integral oder manchmal auch das Fresnel-Integral von f. Die Definition von $\mathcal{F}$ läßt sich nun leicht auf unendlichdimensionale separable Hilberträume $\mathcal{H}$ ausdehnen. Sei dazu mit $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ der Raum der Fourier-Transformierten beschränkter komplexer Maße auf $\mathcal{H}$ definiert, das heißt $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ ist der Raum aller stetigen Funktionen auf $\mathcal{H}$, die sich in der Form (3.5) mit einem $\mu \in \mathcal{M}$

schreiben lassen. Dabei ist $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ die Banach-Algebra aller beschränkten komplexen Maße auf $\mathcal{H}$; das Produkt dieser Algebra ist durch die Faltung von Maßen gegeben, die Norm durch die totale Variation. Es stellt sich nun heraus, daß die nach Definition surjektive Abbildung $\mathcal{M}(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}(\mathcal{H})$, $\mu \to \hat{\mu}$ sogar injektiv ist. Da die Faltung von Maßen dabei in das (kommutative) Produkt von Funktionen übergeht, sind $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ folglich isomorphe Algebren. Die Norm auf $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ überträgt sich mittels dieser Isomorphie zu einer Norm $\|\cdot\|_0$ auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Mittels (3.6) läßt sich jetzt auch für unendlichdimensionale Hilbert-Räume $\mathcal{H}$ das Funktional $\mathcal{F} = \tilde{\int}_{\mathcal{H}} : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ definieren. Man nennt $\mathcal{F}$ dann ebenso wie im endlichdimensionalen Fall das Fresnel-Integral auf $\mathcal{H}$. Der Name Integral ist insofern gerechtfertigt als das Fresnel-Integral große Ähnlichkeiten mit einem gewöhnlichen Integral über Maßen hat, denn es besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. $\mathcal{F}$ ist stetig, das heißt $|\mathcal{F}(f)| \leq \|f\|_0$ für alle $f \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Zudem gilt $\mathcal{F}(1) = 1$.

2. Ist $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ Orthogonalprojektion auf einen endlichdimensionalen Unterraum, so gilt für alle $f \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ mit $f \circ P = f$ die folgende Beziehung:

$$\tilde{\int}_{\mathcal{H}} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2} f(x)\, dx = \tilde{\int}_{P\mathcal{H}} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2} f(x)\, dx. \tag{3.7}$$

3. Für $\mathcal{F}$ gilt ein Fubini-Theorem.

Albeverio und Høegh-Krohn haben in [1] gezeigt, daß für geeignete Potentiale V der quantenmechanische Zeitentwicklungsoperator zum Hamilton-Operator $H = H_0 + V$ als Fresnel-Integrale über einem geeigneten Hilbertraum von Pfaden dargestellt werden kann. Genauer gilt der folgende Satz:

3.1 Satz *(Feynman–Itô-Formel nach Albeverio–Høegh-Krohn) Seien V und φ Fourier-Transformationen beschränkter komplexer Maße auf $\mathbb{R}^d$. Sei $\mathcal{H}_t$ der reelle Hilbert-Raum stetiger Pfade γ von $[0,t]$ in $\mathbb{R}^d$, so daß $\gamma(t) = 0$ und $\dot{\gamma} \in L^2([0,1], \mathbb{R}^d)$ mit dem inneren Produkt*

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \frac{m}{\hbar} \int_0^t \langle \dot{\gamma}_1(\tau), \dot{\gamma}_2(\tau) \rangle \, d\tau.$$

Dann liegt die Funktion

$$f(\gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^1 V(\gamma(\tau)+x)\, d\tau}\, \varphi(\gamma(0) + x)$$

im Raum $\mathcal{F}(\mathcal{H}_t)$ der Fresnel-integrierbaren Funktionen auf $\mathcal{H}_t$, und die Lösung der Schrödinger-Gleichung $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi$ mit Anfangsbedingung $\Psi(x,0) = \varphi(x)$ kann durch das folgende Fresnel-Integral dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) = \left(e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\,\varphi\right)(x) &= \widetilde{\int_{\mathcal{H}_t}} e^{\frac{i}{2}\|\gamma\|^2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t V(\gamma(\tau)+x)\,d\tau}\,\varphi(\gamma(0)+x)\,d\gamma \\ &= \widetilde{\int_{\gamma(t)=x}} e^{\frac{im}{2\hbar}\int_0^t\|\dot\gamma(\tau)\|^2 d\tau}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t V(\gamma(\tau))\,d\tau}\,\varphi(\gamma(0))\,d\gamma.\end{aligned} \tag{3.10}$$

4 Ausblick

Neben den beiden erläuterten Zugängen zur mathematisch rigorosen Definition eines Pfadintegrals in der Quantenmechanik gibt es viele weitere mathematische Arbeiten zu diesem Thema. Zudem ist das Feynmansche Pfadintegral nach wie vor Gegenstand aktueller Forschungen. Im folgenden sollen ohne Anspruch auf Vollständigkeit drei weitere bedeutsame Ansätze zur Definition eines Feynmanschen Pfadintegrals genannt werden:

1. Pfadintegral im Phasenraum nach Daubechies und Klauder [3],
2. Ausbau des Zugangs von Albeverio–Høegh-Krohn durch die Theorie der Funktionalintegration nach Cartier und deWitt-Morette [2],
3. Konstruktion Feynmanscher Pfadintegrale in [4] mit Hilfe von weißem Rauschen und von Hida-Distributionen.

A Anhang

A.1 Definition Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Dann heißt eine Familie beschränkter Operatoren $(Q(t))_{t\in[0,\infty)}$ einparametrige Halbgruppe, falls folgendes gilt:

1. $Q(0) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$,
2. $Q(t+s) = Q(t)\cdot Q(s)$ für $s,t \in [0,\infty)$,
3. $\lim\limits_{t\to 0} \|Q(t)\varphi - \varphi\| = 0$ für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$.

Falls jedes der $Q(t)$ unitär ist, so heißt $(Q(t))_{t\in[0,\infty)}$ eine unitäre Halbgruppe, falls $\|Q(t)\| \leq 1$ für alle $t \in [0,\infty)$, so heißt die Halbgruppe kontrahierend.

A.2 Satz *Sei $(Q(t))_{t\in[0,\infty)}$ eine stark stetige Halbgruppe normaler beschränkter Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gibt es einen abgeschlossenen, dicht definierten normalen Operator $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ und ein $c > -\infty$, so daß $\mathrm{Re}\,\lambda \geq c$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$, und*

$$Q(t) = e^{-tA} \quad \text{für alle } t \in [0,\infty). \tag{A.1}$$

Zudem erfüllt $Q(t)$ für jeden Vektor $\varphi \in \mathcal{H}$ die folgende Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}Q(t)\varphi = -AQ(t)\varphi = -Q(t)A\varphi. \tag{A.2}$$

Falls jedes der $Q(t)$ unitär ist, so gibt es einen selbstadjungierten Operator H auf $\mathcal{H}$, so daß

$$Q(t) = e^{-itH} \quad \text{für alle } t \in [0,\infty). \tag{A.3}$$

Zudem genügt dann $\Psi(t) := Q(t)\varphi$ für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ der Schrödinger-Gleichung:

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = H\Psi(t). \tag{A.4}$$

Falls $Q(t)$ kontrahierend, so ist sogar $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$.

A.3 Satz *(Trotter–Kato-Produktformel) Seien A und B selbstadjungierte Operatoren auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$, so daß $A+B$, definiert auf $\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(B)$ wesentlich selbstadjungiert ist. Dann gilt*

$$e^{it(A+B)} = \text{s-}\lim_{n\to\infty} \left(e^{itA/n}\, e^{itB/n}\right)^n \tag{A.5}$$

Falls zudem A und B nach unten beschränkt sind, so gilt

$$e^{-t(A+B)} = \text{s-}\lim_{n\to\infty} \left(e^{-tA/n}\, e^{-tB/n}\right)^n \tag{A.6}$$

Literatur

[1] Albeverio, S. und R. Høegh-Krohn *Mathematical theory of Feynman Path Integrals*, LNM **523**, Springer-Verlag 1976.

[2] Cartier, P., und C. DeWitt-Morette, *A new perspective on functional integration*, J. Math. Physics **36**, No.5, 2237 (1995).

[3] Daubechies, I. und J.R. Klauder, *Quantum-mechanical path integrals with Wiener measure for all polynomial Hamiltonians*, J. Math. Physics **26**, 2239 (1985).

[4] de Faria, M., J. Potthoff, und L. Streit, *The Feynman integrand as Hida distribution*, J. Math. Physics **32**, 2123 (1991).

[5] Feynman, R. Rev. Mod. Physics **20**, 367 (1948)

[6] Feynman, R.P., und A. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965

[7] Nelson, E., *Feynman integrals and the Schrödinger equation*, J. Math. Physics **5**, 332 (1964).

[8] Reed, M. und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II, Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, 1975.

[9] Roepstorff, G., *Path Integral Approach to Quantum Physics*, Springer-Verlag, 1994.

[10] Simon, B., *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979.

[11] Wiener, N., *The average of an analytic functional and the Brownian movement* Proc. Nat. Acad. Sci. (US) **7**, 294 (1921)