Ein Beitrag zur Geometrie und Analysis auf stratifizierten Räumen

Markus J. Pflaum[1]

18. April 2000

[1]Humboldt Universität zu Berlin, Mathematisches Institut, Unter den Linden 6, 10099 Berlin, email: pflaum@mathematik.hu-berlin.de

Für Stephanie und Konstantin

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Stratifizierte Räume sind, in anschaulicher Terminologie ausgedrückt, Ansammlungen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, die in geeigneter Weise "zusammengeklebt" sind. Dieses charakteristische Merkmal kommt wohl auch am besten in der ursprünglichen Bezeichnung "complexes of manifolds" [168] oder "manifold collections" [169, Sec. 11] von Hassler Whitney für einen Vorläufer des modernen Begriffs eines stratifizierten Raums zum Ausdruck. Whitney's Arbeit [168] aus dem Jahre 1947 kann überhaupt als Geburtsstunde einer abstrakten Theorie von Stratifizierungen angesehen werden, auch wenn es schon vorher Untersuchungen zu Themen gab, die man heutzutage vielfach innerhalb der Theorie stratifizierter Räume behandelt, wie zum Beispiel das gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts beginnende Studium von Singularitäten in der Algebraischen Geometrie oder erste Untersuchungen zu simplizialen Komplexen und zur Triangulierung algebraischer Varietäten. Anlaß zur Einführung der "complexes of manifolds" in [168] war die Beobachtung, daß der Rand einer nichtkompakten beschränkten Untermannigfaltigkeit des Euklidischen Raums oft in lokal endlich viele niedrigdimensionalere Untermannigfaltigkeiten zerlegt werden kann. Dieser Gesichtspunkt wird in der modernen Geometrischen Analysis aufgegriffen und liegt letztlich dem Konzept einer Mannigfaltigkeit-mit-Rand oder einer Mannigfaltigkeit-mit-Ecken zugrunde (siehe zum Beispiel Melrose [117, 118] oder 1.1.19). Rene Thom stellte in seiner Arbeit [146] von 1955 fest, daß die von ihm definierten iterierten Singularitätenmengen einer glatten Abbildung $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für bestimmte generische Funktionen Mannigfaltigkeiten sind und eine "manifold collection" im Sinne von Whitney [169] darstellen. Nachdem Whitney 1957 in [170] bewiesen hatte, daß jede reell algebraische Varietät in endlich viele Mannigfaltigkeiten zerlegt werden kann, und Łojasiewic [106] ein analoges Resultat für reell analytische Mengen zeigen konnte, hatte man somit schon Ende der 50'er Jahre mit die wesentlichsten Anwendungsgebiete der Stratifikationstheorie entdeckt.

Der Terminus "Stratifizierung" stammt wohl von Thom; er prägte diesen Begriff 1962 in der Arbeit [147]. Spätestens mit Thoms berühmten 69'er Artikel [149] *Ensembles et morphismes stratifiés* setzte sich die neue Bezeichnung dann auch endgültig durch.

Nach den Gründerjahren der Stratifikationstheorie lag das Hauptaugenmerk auf dem Studium der topologischen Eigenschaften stratifizierter Räume. Untersucht wurden in dieser Zeit, genauer in den 60'er und 70'er Jahren, verschiedene Kriterien an einen stratifizierten Raum, die für die intendierte Anwendung benötigte Eigenschaften nach sich ziehen. Als conditio sine qua non wurde gefordert, ebenso wie in der in Abschnitt 1.1 vorgestellten Definition, daß eine Zerlegung oder Stratifizierung eines topologischen Raums in lokal endlich viele Mannigfaltigkeiten der "condition of frontier" genügen soll. Diese Bedingung besagt, daß für je zwei Mannigfaltigkeiten R, S der Zerlegung aus der Tatsache, daß R mit dem topologischen Abschluß von S nichtleeren Durchschnitt hat, schon folgt, daß R ganz im Abschluß von S liegt. Die nach der "condition of frontier" sicher bedeutsamsten Bedingungen an einen stratifizierten Raum sind die lokale Trivialität, eingeführt von THOM in [147], sowie die berühmten Bedingungen (A) und (B), die WHITNEY in [172] der Mathematikergemeinde vorstellte. Lokale Trivialität besagt im wesentlichen, daß der betrachtete stratifizierte Raum in der Umgebung eines jeden seiner Punkte wie ein triviales Faserbündel über dem Stratum aussieht, in dem der Punkt liegt. Die Whitney-Bedingungen dagegen machen eine Aussage über das Verhalten von Tangentialräumen eines Stratums bei Annäherung an den Rand. Ausführlichere Erläuterungen dazu sowie zu weiteren Bedingungen findet der Leser in Abschnitt 1.4.

Eines der Hauptprobleme, das die Väter der Stratifizierungstheorie in den Anfangsjahren beschäftigte, war die Frage, unter welchen Bedingungen ein stratifizierter Raum lokal trivial ist. WHITNEY zeigte durch ein Gegenbeispiel, daß seine Bedingung (A) die lokale Trivialität nicht impliziert, vermutete aber, daß dies für die Bedingung (B) der Fall sein würde. Der Nachweis dieser Vermutung gelang dann THOM [149], wobei die wesentliche Idee, die THOM zum Ziel führte, in der Einführung sogenannter kontrollierter Vektorfelder lag, die, obwohl selbst in der Regel unstetig, einen stetigen Fluß besitzen. Mit der Methode der kontrollierten Vektorfelder konnte THOM übrigens auch seine beiden berühmten Isotopielemmata beweisen, von denen das erste die topologisch lokale Trivialität nach sich zieht.

Der zu dieser Zeit hauptsächlich an Fragen der Stabilität differenzierbarer Abbildungen arbeitende amerikanische Mathematiker JOHN N. MATHER konkretisierte und vereinfachte die Konstruktionen aus [149] und kreierte in dem bisher unveröffentlichten Skript [113] eine zu THOMs Ideen passende Axiomatik, die heute unter dem Namen "Kontrolltheorie" bekannt ist. In der Arbeit [113], die als erstes Kapitel eines bisher nicht vervollständigten Buches zum Thema der topologische Stabilität differenzierbarer Abbildungen gedacht war, beschreibt MATHER detailliert und präzise auf insgesamt über siebzig Seiten, wie man zu einem Beweis der beiden Isotopielemmata von THOM und dem Nachweis der topologisch lokalen Trivialität Whitney-stratifizierter Mengen gelangt. Die dafür notwendigen Hilfsmittel, insbesondere sehr allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für tubulare Umgebungen werden ebenfalls bereitgestellt.

An dieser Stelle seien einige weitere "topologische" Höhepunkte der Stratifikationstheorie aufgezählt:

- Zu jeder semianalytischen Menge gibt es eine semianalytische Triangulierung (ŁOJASIEWIC [107], 1964).

- Jede semianalytische Menge besitzt eine Whitney-Stratifizierung durch stark analytische Mannigfaltigkeiten (ŁOJASIEWIC [108], 1965).

- Reelle und komplex algebraische Varietäten besitzen eine den Whitney-Bedingungen (A) und (B) genügende Stratifizierung (WHITNEY [171], 1965).

- Subanalytische Mengen können Whitney-stratifiziert werden (HIRONAKA [80], 1973 und HARDT [71, 72], 1975).

- Subanalytische Mengen sowie eigentliche leichte subanalytische Abbildungen besitzen eine Triangulierung (HIRONAKA [81], 1975 und HARDT [73], 1977).

– Whitney-stratifizierte Mengen können trianguliert werden (Goresky [56], 1978 und Johnson [89], 1983).

– Goresky–McPherson [57, 58] erfinden 1980 die Schnitthomologie für Pseudomannigfaltigkeiten und beweisen für Schnitthomologiegruppen komplementärer Perversität ein Dualitätstheorem à la Poincaré, was für die singuläre Homologie stratifizierter Räume im allgemeinen nicht möglich ist.

– Jede eigentliche topologisch stabile glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten kann trianguliert werden (Verona [160], 1984).

– Parusiński [131] konnte basierend auf der Arbeit von Mostowski [121] nachweisen, daß jede subanalytische Menge eine Lipschitz-Stratifizierung besitzt.

Was nichttopologische Aspekte stratifizierter Räume angeht, so begann erst gegen Ende der 70'er, Anfang der 80'er Jahre ein intensiveres Studium zur Geometrie und Analysis auf stratifizierten Räumen. Einer der Vorreiter war dabei Cheeger [34, 35, 37], der sich hauptsächlich mit Fragen der Spektralgeometrie von Räumen mit konischen Singularitäten sowie auf Riemannschen Pseudomannigfaltigkeiten beschäftigte. Ein wesentlicher Gegenstand bei der spektralgeometrischen Untersuchung sowohl regulärer als auch singulärer Räume ist der deRham-Komplex, den man dicht in den Hilbert-Raum $L^2\left(\Omega^\bullet \mathsf{M}\right)$ der L^2-Formen bezüglich einer apriori gewählten Riemannschen Metrik einbettet. Die wesentliche Frage ist nun nach Cheeger [35], unter welchen Voraussetzungen auch im singulären Fall eine L^2-Version des Satzes von Stokes gilt. Die Gültigkeit des L^2-Stokes-Theorem impliziert, daß der Dirac-Operator des deRham-Komplexes eine natürliche selbstadjungierte Fortsetzung besitzt, eine Eigenschaft, die Brüning–Lesch [24] als "Eindeutigkeit idealer Randbedingungen" bezeichnen und in der genannten Studie auch für allgemeinere Hilbert-Komplexe untersuchen. Bisher weiß man unter anderem für Kegel und Hörner (Cheeger [35]) sowie für komplex konforme Kegel (Brüning–Lesch [25]), daß das L^2-Stokes-Theorem erfüllt ist. In Arbeiten neueren Datums werden entsprechende Resultate für semianalytische Flächen mit isolierten Singularitäten (Grieser [61]) und für komplexe Varietäten X mit isolierten Singularitäten (Pardon–Stern [129], Grieser–Lesch [62]) bewiesen, wobei im letzteren Fall an die Ordnung k der betrachteten L^2-Formen die Einschränkung $k \neq \dim_{\mathbb{C}} \mathsf{X}, \dim_{\mathbb{C}} \mathsf{X} - 1$ gemacht werden muß. Die bislang bekannten Resultate weisen insofern alle daraufhin, daß das L^2-Stokes-Theorem für beliebige kompakte algebraische Varietäten gültig ist, eine Vermutung die allgemein geteilt wird. Das L^2-Stokes-Theorem steht natürlich in engem Zusammenhang zur L^2-Kohomologie und damit auch zur Schnitthomologie. Im ersten Abschnitt des fünften Kapitels, das die deRham-Kohomologie auf stratifizierten Räumen behandelt, sind einige Ausführungen zu diesen Themen eingefügt, auf die der Leser hiermit verwiesen sei.

Asymptotische Entwicklungen, insbesondere für den Wärmeleitungskern, spielen ebenfalls nicht nur für die Spektralgeometrie kompakter Mannigfaltigkeiten sondern auch für die von stratifizierten Räumen eine große Rolle. Initiiert wurden derartige Studien zur Asymptotik auf singulären Räumen von Cheeger [36] im Jahre 1983. In der fundamentalen Arbeit von Brüning–Seeley [27] wurde das sogenannte "singular asymptotics lemma" vorgestellt, das sich als wesentliches Hilfsmittel für asymptotische Methoden unter Anwesenheit von Singularitäten herausgestellt hat. Damit konnten Brüning–Seeley

[28, 30] Asymptotiken für Räume mit kegelartigen Singularitäten untersuchen. Im Zusammenhang mit asymptotischen Entwicklungen steht auch die Arbeit zur Spektralgeometrie algebraischer Kurven von Brüning–Lesch [26]. Was Orbiträume Riemannscher G-Mannigfaltigkeiten M (mit M und G kompakt) angeht, so haben Brüning–Heintze [22, 23] die asymptotische Entwicklung des vom Laplace-Operator auf M induzierten Operators über $G\backslash M$ angegeben und studiert.

Ein sehr aussichtsreich erscheinender Weg zum besseren Verständnis analytischer Eigenschaften singulärer Räume liegt in dem Ansatz, eine Theorie von Pseudodifferentialoperatoren auf singulären Räumen aufzubauen. Ziel ist es dabei, für geeignete Differentialoperatoren über stratifizierten Räumen Parametrizes mit Hilfe eines geeigneten Symbolkalküls konstruieren zu können. Die wesentlichen Beiträge zu dieser Theorie stammen von Melrose und Schulze, die beide unabhängig voneinander geeignete Kalküle entwickelt haben. Der Ansatz von Schulze wird ausführlich in den beiden Büchern [137, 138] erläutert. In einer neueren Arbeit [139] hat Schulze mit Hilfe einer für seine intendierten Zwecke angepaßten Funktionalstruktur Operator-Algebren für Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten konstruiert. Der zuerst für Mannigfaltigkeiten-mit-Rand von Melrose entwickelte b-calculus wird in [117] vorgestellt und in [118] auf Mannigfaltigkeiten-mit-Ecken übertragen. Als ein signifikanter Erfolg dieses Ansatzes kann unter anderem die Signatur-Formel von Hassell–Mazzeo–Melrose [75] für Mannigfaltigkeiten-mit-Ecken der Kodimension 2 gewertet werden.

Ein unbestrittenes Ziel in der Geometrischen Analysis ist die Suche nach einer Indexformel für stratifizierte Räume. Ein erstes wichtiges Resultat in diese Richtung ist die Indexformel für Orbifolds von Kawasaki [92, 93]. Die 1998'er Arbeit von Lott [110] über Signaturen von S^1-Quotienten, die ja in natürlicher Weise stratifizierte Räume darstellen, läßt sich als weitere Indikation dafür werten, daß eine derartige Indexformel nicht nur wünschenswert, sondern auch aussichtsreich erscheint.

Nachdem sowohl aufgrund der nichtkommutativen Geometrie von Connes [41] als auch aufgrund der Indexsätze von Nest–Tsygan [124] die Bedeutung der Hochschild- und zyklischen Homologie für die Geometrie und Analysis offensichtlich wurde, begann man vermehrt die Hochschild- und zyklische Homologie von Funktionsalgebren über singulären Räumen zu studieren. Besonders hervorgehoben seien hierbei in chronologischer Folge die Arbeiten von Brylinski [31], Wassermann [162], Block–Getzler [14], Teleman [145] und Brasselet–Legrand [20]. Brylinski und Block–Getzler studieren die zyklische Homologie im äquivarianten Fall. Wasserman berechnet für bestimmte Orbifolds durch Anwendung verschiedenster Techniken die Hochschild- und zyklische Homologie. Teleman gibt eine neue Beweistechnik zur Berechnung der Hochschild-Homologie mit Hilfe von Jets an, kann dadurch die schon von Connes [41] für den kompakten Fall gezeigte topologische Version des Theorems von Hochschild–Kostant–Rosenberg [82] beweisen (siehe hierfür auch Pflaum [133]), und weist zuletzt nach, daß ein solches Theorem auch für stückweise differenzierbare Funktionen über einem simplizialen Komplex gilt. Brasselet–Legrand schließlich berechnen die Hochschild-Homologie und periodisch-zyklische Homologie von Funktionsalgebren auf kontrollierten Räumen, wobei die betrachteten Funktionen Pole vorgeschriebener Ordnung entlang der Strata haben dürfen. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist dabei, daß sich die Schnitthomologie als periodisch-zyklische Homologie der betrachteten Funktionen interpretieren läßt.

Nach diesem Abriß der Geschichte der Stratifikationstheorie möchte ich das Anliegen der vorliegenden Arbeit erläutern. Wie aus den historischen Anmerkungen deutlich geworden ist, sind die topologischen Eigenschaften stratifizierter Räume sehr gut untersucht. Was die Geometrie und Analysis auf stratifizierten Räumen angeht, so ist der Fortschritt dabei sicher nicht ganz so weit gediehen wie bei den topologischen Aspekten. Insbesondere fällt bei der Betrachtung des gegenwärtigen Forschungsstandes auch auf, daß es viele tiefliegende Resultate zur Spektralgeometrie, zur Indextheorie usw. von stratifizierten Räumen mit einer ganz speziellen wie zum Beispiel konischen Struktur gibt, daß aber geometrisch-analytische Untersuchungen zu allgemeineren Klassen stratifizierter Räume oft mit nahezu unüberwindbar erscheinenden Schwierigkeiten behaftet sind.

Mit dieser Arbeit soll unter der globalen Überschrift "glatte Struktur" ein Beitrag zur Systematik der Geometrischen Analysis auf stratifizierten Räumen geleistet und anhand von konkreten Anwendungen und Beispielen aufgezeigt werden, daß es sich dabei um ein nützliches Konzept handelt, das tiefere Einsichten in die geometrisch-analytische Struktur stratifizierter Räume ermöglicht. Desweiteren ist diese Arbeit eine Monographie, die die Theorie stratifizierter Räume von Grund auf erläutern und dadurch eine Lücke in der gegenwärtigen mathematischen Literatur schließen soll. Ein Blick in den Inhalt erklärt an dieser Stelle am besten, welche Themen in dieser Arbeit zur Systematik stratifizierter Räume im einzelnen behandelt werden.

Im ersten Kapitel geht es um zweierlei, nämlich einerseits darum, die grundlegenden Begriffe Zerlegung und Stratifizierung sowie die wichtigsten Stratifizierungsbedingungen zu erklären, und andererseits darum, eine sinnvolle Funktionalstruktur auf stratifizierten Räumen einzuführen, die für analytische und geometrische Untersuchungen solcher Räume geeignet ist.

An dieser Stelle sind einige Erläuterungen angebracht, warum ich eine ausführliche Darstellung der grundlegenden Definitionen aus der Theorie stratifizierter Räume für notwendig erachte. In der mathematischen Literatur geistern verschiedene Variationen des Begriffs eines stratifizierten Raums herum, was gelegentlich zu begrifflichen Unklarheiten führt. Beispielsweise findet sich kaum eine Literaturquelle, in der für eine (kompakte) Lie-Gruppe G und eine G-Mannigfaltigkeit M bzw. ihren Orbitraum $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ exakt gesagt wird, was die Strata der kanonischen Stratifizierung von M bzw. von $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ durch Orbittypen eigentlich sind. Die einer abgeschlossenen Untergruppe $\mathsf{H} \subset \mathsf{G}$ zugeordneten Menge $\mathsf{M}_{(\mathsf{H})} \subset \mathsf{M}$ vom Orbittyp (H) (siehe Kapitel 4) ist nämlich in der Regel keine Mannigfaltigkeit, vielmehr stellen im allgemeinen nur ihre Zusammenhangskomponenten glatte Mannigfaltigkeiten dar. Die Partitionierung von M in die $\mathsf{M}_{(\mathsf{H})}$ - und ebenso die des Orbitraums $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ in die Mengen $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}_{(\mathsf{H})}$ - ist also keine Stratifizierung. Versucht man jetzt mit der Zerlegung von M in die Zusammenhangskomponenten der $\mathsf{M}_{(\mathsf{H})}$ eine Stratifizierung zu erhalten, so ist nicht unmittelbar klar, warum die "condition of frontier" erfüllt sein sollte. Zudem ist die Zerlegung von M in die Zusammenhangskomponenten der $\mathsf{M}_{(\mathsf{H})}$ in der Regel zu fein. Man muß also einen anderen Weg beschreiten, um wirklich zu einer Stratifizierung von M oder $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ zu gelangen. Die Lösung dieser Problematik liegt darin, daß man unter einer Stratifizierung eines topologischen Raums X erst einmal nicht ein globales Objekt in Form einer Zerlegung versteht, sondern ein lokales Objekt in Gestalt einer Zuordnung eines Mengenkeims $\mathcal{S}_x$ zu jedem Punkt x von X, so daß dadurch lokal

Zerlegungen induziert werden. Überträgt man dies auf den Fall einer G-Mannigfaltigkeit M, so erhält man eine Stratifizierung in dem genannten Sinne, indem man jedem Punkt $x \in M$ bzw. jedem Orbit Gx den Keim $\mathcal{S}_x$ der Menge $M_{(G_x)}$ bzw. $G\backslash\, M_{(G_x)}$ zuordnet, wobei G_x die Standgruppe von x bezeichnet; Details zu diesem Verfahren kann der Leser in Abschnitt 4.3 nachschlagen.

Die Idee, Stratifizierungen als Zuordnungen bestimmter Mengenkeime aufzufassen, geht auf Mather [114] zurück und stellt die begrifflich wohl klarste Definition eines stratifizierten Raums dar, weswegen ich sie in dieser Monographie auch übernommen habe (siehe Def. 1.2.2). Diese Definition mittels Mengenkeimen mag zwar erst einmal übermäßig abstrakt erscheinen, sie hat aber den unschätzbaren Vorteil, daß aus ihr zweifelsfrei hervorgeht, was unter einem Stratum denn nun wirklich zu verstehen ist, nämlich ein Stück der gröbsten Zerlegung von X, die die Mengenkeimabbildung $\mathcal{S}$ induziert (siehe Proposition 1.2.7).

Dem Leser sei nicht vorenthalten, daß anders als in dieser Arbeit von manchen Autoren in der Definition eines stratifizierten Raums die lokale Trivialität gleich mitgefordert wird. Für diverse topologische Untersuchungen an stratifizierten Räumen, wie zum Beispiel mittels der Schnitthomologie von Goresky–MacPherson [57, 58, 59], ist die lokale Trivialität nämlich unerläßlich. Im Einzelfall kann sie jedoch sehr schwer nachzuweisen sein und ist für viele Überlegungen auch gar nicht notwendig. Aus diesem Grund wurde in dieser Arbeit die lokale Trivialität nicht mit in die Definition eines stratifizierten Raums aufgenommen, was übrigens auch nicht bei Mather [114, 113] der Fall ist.

Abschnitt 1.3 im ersten Kapitel bildet das Rückgrat dieser Monographie; es ist den glatten Strukturen gewidmet, die für alle weiteren Untersuchungen in dieser Arbeit unerläßlich sind. Um einen stratifizierten Raum X unter den Gesichtspunkten der Analysis und Geometrie untersuchen zu können, bedarf es einer dafür geeigneten Algebra von Funktionen auf X, die in der Regel aber nicht intrinsisch durch den stratifizierten Raum gegeben ist. In der Sprache der Algebraischen Geometrie ausgedrückt benötigt man also zusätzlich eine Strukturgarbe für X. Zwar tauchen in der mathematischen Literatur diverse Funktionsalgebren über stratifizierten Räumen auf, wie zum Beispiel die der stetigen und über jedem Stratum glatten Funktionen oder die der kontrollierten Funktionen, diese Funktionsalgebren enthalten aber gewöhnlich viel zu viele Funktionen und sind oft nicht einmal lokal (topologisch) endlich erzeugt. Andererseits kennt man aber für diverse Klassen stratifizierter Räume schon kanonische Kandidaten für eine sinnvolle Funktionalstruktur, wie zum Beispiel die algebraischen oder analytischen Varietäten mit den Einschränkungen der glatten Funktionen des darüberliegenden $\mathbb{C}^n$, oder die Orbiträume der Form $G\backslash M$ mit den durch die G-invarianten glatten Funktionen auf M induzierte Garben. Das in 1.3 vorgestellte Konzept einer glatten Struktur schließt diese beiden Beispiele stratifizierter Räume mit Funktionalstruktur in natürlicher Weise mit ein.

Was ist nun aber eine glatte Struktur in "down to earth terms"? Eine glatte Struktur kann man als Äquivalenzklasse lokaler Einbettungen des stratifizierten Raums in geeignete $\mathbb{R}^n$ auffassen, was letztlich in abstrakter Weise der ursprünglichen Auffassung Whitney's von einem stratifizierten Raum in seinem Artikel *Complexes of manifolds* entspricht. Die lokalen Einbettungen sind die sogenannten singuläre Karten; ihre exakte Definition ist der von Karten auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten entlehnt. Aus der glatten Struktur leiten sich kanonische Garben ab, einmal die der glatten Funktionen, aber auch die Garbe der Whitney-Funktionen, die vor allem für die Fortsetzungstheorie glatter Funktionen von Bedeutung ist. Im Abschnitt 1.7, in dem erste Ergebnisse zur Fortsetzungstheorie präsentiert werden, stellen wir den Begriff der auf einer abgeschlossenen Menge Z flachen sowie den der relativ Z temperierten Whitney-Funktion vor. Multipliziert man eine über Z flache mit einer relativ Z temperierten Funktion, so erhält man wieder eine auf Z flache Funktion, was sehr nützlich ist beim "Zusammenkleben" glatter Funktionen und im Laufe der Arbeit oft verwendet wird. Schließlich findet der Leser in 1.6 noch einige Erläuterungen zum Begriff einer rektifizierbaren Kurve für Räume mit einer glatten Struktur, wobei die Bedeutung davon erst im Abschnitt über Riemannsche Metriken deutlich werden wird.

Im zweiten Kapitel wird aufgezeigt, daß die im ersten Kapitel vorgestellte Funktionalstruktur tatsächlich geeignet ist, Differentialgeometrie auf stratifizierten Räumen zu betreiben. Natürlich muß dabei gegenüber der Geometrie auf Mannigfaltigkeiten mit Abstrichen gerechnet werden, es ist aber verblüffend, wie viele geometrische Strukturen doch mit der richtigen Sprache auf stratifizierte Räume mit einer glatten Struktur übertragen werden können. Als erstes sind hier das Tangentialbündel und Vektorfelder zu nennen (siehe die Abschnitte 2.1 und 2.2). Die WHITNEYsche Bedingung (A) erhält dabei eine neue Interpretation: sie garantiert, daß das Tangentialbündel eines stratifizierten Raums mit glatter Struktur existiert und selbst wieder eine glatte Struktur trägt. Neben dem Tangentialbündel existiert auch ein Kotangentialbündel, wobei im Unterschied zu Mannigfaltigkeiten das Tangential- und Kotangentialbündel eines stratifizierten Raums mit glatter Struktur im allgemeinen nicht isomorph sind. Metrische Aspekte dominieren den vierten Abschnitt des zweiten Kapitels. Der Begriff einer Riemannschen Metrik wird dabei auf stratifizierte Räume übertragen und es wird gezeigt, wie man eine solche Riemannsche Metrik unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an den stratifizierten Raum zur Längenmessung von Kurven und zur Definition eines geodätischen Abstands verwenden kann. Es wirft sich dann natürlich die Frage auf, ob man analog dem Mannigfaltigkeitsfall auf jedem regulären stratifizierten Raum mit glatter Struktur eine Riemannsche Metrik derart konstruieren kann, daß der geodätische Abstand vollständig ist. Diese Frage wird in Satz 2.4.17 positiv beantwortet. Nach GROTHENDIECK [66] kann man jeder kommutativen Algebra in kanonischer Weise eine (nichtkommutative) Algebra von Differentialoperatoren zuordnen. In Abschnitt 2.5 wird die GROTHENDIECKsche Definition auf die Garbe der glatten Funktionen angewandt; man erhält die Differentialoperatoren auf stratifizierten Räumen. Das Ende des zweiten Kapitels ist Themen aus der mathematischen Physik gewidmet. Es wird das Konzept des Poisson-stratifizierten Raums erläutert, zudem werden verschiedene Beispiele vorgestellt. Das Kapitel schließt mit einigen Bemerkungen zur Quantisierung singulärer symplektischer Räume.

Thema des dritten Kapitels ist die Kontrolltheorie von MATHER, wobei die Ideen MATHERS um eine wichtige Beigabe ergänzt werden, nämlich um krümmungsmoderate Tuben und Kontrolldaten. Der Begriff "krümmungsmoderat" ist mit dieser Arbeit neu in die mathematischen Literatur eingeführt worden und regelt das Verhalten des Tangentialraums eines Stratums in der Nähe des Randes in höherer Ordnung als zum Beispiel die Whitney-Bedingungen das tun. Mit anderen Worten ausgedrückt bedeutet die Eigenschaft eines Stratums, krümmungsmoderat zu sein, nichts anderes, als daß sich das Stratum bei Annäherung an den Rand in kontrollierter und nicht übermäßig starker Weise krümmt, und daß auch die Ableitungen der Krümmung einem geregelten Anwachsen unterworfen sind. Als Konsequenz hieraus ergibt sich, daß die Projektion und die tubulare Funktion einer krümmungsmoderaten tubularen Umgebung des Stratums S temperiert relativ ∂S sind. Diese Tatsache wird sich als sehr bedeutsam erweisen für die Fortsetzungstheorie von glatten Funktionen über einem Stratum auf den ganzen Raum (siehe den Fortsetzungssatz 3.8.3), und bildet eine wesentliche Zutat beim Beweis des Poincaré-Lemmas für Whitney-Formen 5.4.4. Ansonsten werden im dritten Kapitel Folgerungen aus der MATHERschen Kontrolltheorie wie das erste Isotopielemma von THOM vorgestellt und teilweise um krümmungsmoderate Versionen ergänzt. Kapitel 3 endet mit der Einführung einer neuen Klasse stratifizierter Räume, den sogenannten Kegelräumen, von denen nachgewiesen wird, daß sie Whitney-stratifizierbar sind.

Eine sehr wichtige Klasse stratifizierter Räume bilden die Orbiträume. Sie werden in Kapitel 4 behandelt. Die Ergebnisse dieses Kapitels sind überwiegend wohlbekannt, teilweise jedoch in der Literatur verstreut. Besonderen Wert wurde auf eine detaillierte Konstruktion der Stratifizierung einer G-Mannigfaltigkeit M sowie des Orbitraums $G\backslash M$ durch Orbittypen. Anschließend wird mit Hilfe des Satzes von SCHWARZ gezeigt, daß die G-invarianten Funktionen auf M eine kanonische glatte Struktur auf dem Orbitraum induzieren.

Kapitel 5 ist einem analytisch-topologischen Thema gewidmet, der deRham-Theorie auf stratifizierten Räumen mit glatter Struktur. Aus der Garbe der glatten Funktionen erhält man ja eine Garbe von Kähler-Differentialen, folglich von Differentialformen und damit einen deRham-Komplex. Für manche Räume wie zum Beispiel den Kegelräumen stimmt die Kohomologie des deRham-Komplexes mit der des zugrunde liegenden topologischen Raums überein, im allgemeinen ist das jedoch nicht der Fall, und der deRham-Komplex liefert nicht die "richtige" Kohomologie. Radikal anders wird die Situation doch, wenn man den äußeren Komplex der Kähler-Differentiale der Whitney-Funktionen oder mit anderen Worten den Komplex der Whitney-Formen betrachtet. Dessen Kohomologie stimmt für eine große Klasse krümmungsmoderater stratifizierter Räume mit der singulären Kohomologie überein, man erhält somit also ein deRham-Theorem für Whitney-Formen.

Das letzte Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit der topologischen Hochschild-Homologie. In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels werden die benötigten theoretischen Grundlagen aus einer topologischen Version der Homologischen Algebra bereitgestellt. In der mathematischen Literatur über Hochschild-Homologie von Funktionsalgebren werden häufig Resultate aus der "formalen" Homologischen Algebra auf eine topologische Version derselben ohne nähere Begründung übertragen. Daß dies mit einigen Vorsichtsmaßnahmen tatsächlich gerechtfertigt ist, wird in 6.1 und 6.2 gezeigt. Anschließend werden die dabei erhaltenen Methoden in Abschnitt 6.3 angewandt, um die stetige Hochschild-Homologie zu definieren und einige Grundeigenschaften abzuleiten. Im letzten Abschnitt von Kapitel 6 wird die Hochschild-Homologie für glatte Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit sowie auf bestimmten Kegelräumen berechnet.

Zusammenfassend sind die Hauptergebnisse und neuen Resultate in dieser Arbeit wie folgt gegeben:

– Der Begriff einer glatten Struktur für einen stratifizierten Raum wird eingeführt.

Beispiele derartiger Räume mit glatter Struktur sind durch algebraische und analytische Varietäten, durch Orbiträume eigentlicher Lie-Gruppenwirkungen sowie durch singuläre Marsden–Weinstein-reduzierte Räume gegeben.

- Es wird der Nachweis geführt, daß jeder reguläre (A)-stratifizierte Raum X (auch mit eventuell unendlicher Dimension oder unendlich vielen Strata) derart mit einer glatten Riemannschen Metrik μ versehen werden kann, daß X zusammen mit dem durch μ definierten geodätischen Abstand ein Längenraum ist (Satz 2.4.17).

- Der Begriff einer krümmungsmoderaten tubularen Umgebung und eines krümmungsmoderaten Kontrolldatums wird vorgestellt und gezeigt, daß die Existenz- und Eindeutigkeitssätze für tubulare Umgebungen auch in der "krümmungsmoderaten" Version gültig sind (Abschnitt 3.5). Für stark krümmungsmoderate stratifizierte Räume wird die Existenz eines krümmungsmoderaten Kontrolldatums in jeder Differenzierbarkeitsordnung $m \in \mathbb{N}$ nachgewiesen (Satz 3.6.9).

- Es wird bewiesen, daß für Orbiträume $G\backslash M$, die keine Strata der Kodimension 1 enthalten, die deRham-Kohomologie mit der basischen und der singulären Kohomologie übereinstimmt (Satz 5.3.5). Zudem wird das auf Koszul zurückgehende Theorem, daß für kompakte G die basische und die singuläre Kohomologie von $G\backslash M$ kanonisch isomorph sind, auf eigentliche G-Wirkungen ausgedehnt (Korollar 5.3.3).

- Für (A)-stratifizierte Räume mit einer krümmungsmoderaten Kontrollstruktur und einer temperierten Auflösung eines jeden Stratums für jede Ordnung $m \in \mathbb{N}$ wird gezeigt, daß ein Poincaré-Lemma für Whitney-Formen gilt, und daß die Kohomologie der Whitney-Formen mit der singulären Kohomologie übereinstimmt (5.4.4 und Korollar).

- Für bestimmte Kegelräume wird die Hochschild-Homologie berechnet und gezeigt, daß über derartigen Räumen ein Theorem à la Hochschild–Kostant–Rosenberg gilt (Satz 6.4.7).

Obwohl diese Arbeit bedeutend länger geworden ist als ursprünglich geplant, so konnten doch viele Aspekte im Zusammenhang mit der Thematik dieses Buches nicht oder nur am Rande betrachtet werden. Als erstes sind hier die semialgebraischen, semianalytischen und subanalytischen Mengen zu nennen, die zwar viele Berührungspunkte zu dieser Arbeit haben und oft auch für Beispiele verwendet wurden, die aber nicht ausführlicher erläutert werden konnten, da dies den Umfang dieser Habilitationsschrift nochmals deutlich hätte anwachsen lassen. Aus dem gleichen Grund wurde auch die Schnitthomologie nicht mit in die Betrachtungen einbezogen, wobei für zukünftige Projekte geplant ist, den Zusammenhang der hier vorgestellten Whitney–deRham-Kohomologie zur Schnitthomologie zu klären.

An dieser Stelle sind sicher einige ausblickende Worte und Erläuterungen darüber angebracht, wohin sich die Theorie glatter Strukturen auf stratifizierten Räumen bewegen könnte. Weiterer Klärung bedarf die Theorie von Differentialoperatoren auf stratifizierten Räumen mit glatter Struktur, insbesondere wäre es wünschenswert zu einer Mikrolokalisierung derartiger Differentialoperatoren zu gelangen oder mit anderen Worten zu einer Theorie stratifizierter Pseudodifferentialoperatoren. Die vorliegende Arbeit liefert hierfür schon impliziert einige Ansätze, die es zu verfolgen gilt. Das Beispiel des Poincaré-Lemmas für Whitney–deRham-Formen hat gezeigt, daß zum Studium partieller Differentialgleichungen auf stratifizierten Räumen die Theorie der Jets und Whitney-Funktionen nicht nur hilfreich, sondern oft auch unerläßlich ist. Dieser Gesichtspunkt soll weiter ausgebaut und auch auf andere partielle Differentialgleichungen über stratifizierten Räumen angewandt werden. Inwieweit Ideen aus dieser Arbeit zu aktuellen Fragen wie Indextheorie auf stratifizierten Räumen, Hodge-Theorie, L^2-Kohomologie usw. beitragen werden, wird die Zukunft zeigen, jedoch bin ich der Überzeugung, daß mit einer systematischen geometrischen Sprache wie in dieser Arbeit der richtige Weg zur Lösung bestehender Probleme in der Geometrischen Analysis stratifizierter Räume beschritten wird.

Nach diesem Überblick lade ich den Leser nun zu einer konkreten Tour durch die Theorie stratifizierter Räume ein und schließe diese Einleitung in der Hoffnung, daß sich die vorliegende Arbeit als kleiner Fortschritt auf dem Weg zu einer Geometrie zahmer stratifizierter Räume im Sinne von GROTHENDIECKs *Esquisse d'un Programme* [67] erweisen wird.

Danksagung Professor Jochen Brüning möchte ich ganz herzlich danken für die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe, die Unterstützung dieser Arbeit sowie die konstruktiven Anregungen. Besonderer Dank gilt Professor Matthias Lesch für die Erläuterungen zur Geometrischen Analysis während seiner Berliner Zeit sowie für die wertvollen Hinweise mathematischer und nichtmathematischer Art. Daniel Grieser sei gedankt für die Diskussionen zu kleineren und größeren Problemen im Zusammenhang mit dieser Arbeit. Ich danke Martin Bordemann für wertvolle Anregungen insbesondere zu Aspekten singulärer stratifizierter Räume und ihrer Quantisierung.

Wesentliche Ideen zu dieser Arbeit sind bei einem durch die DFG geförderten Forschungsaufenthalt in Berkeley im Oktober 1997 und durch einen vierwöchigen Forschungsaufenthalt am IHES, Bures-sur-Yvette, im Herbst 1998 entstanden. Beiden Instituten und der DFG danke ich für die Unterstützung.

Zum Schluß danke ich meiner Frau Stephanie für die liebevollen Hilfe während dieses Habilitationsprojekts und meinem Sohn Konstantin für sein aufmunterndes Lachen in den letzten Wochen.

Notation

Zur Erleichterung für den Leser erläutern wir im folgenden die wichtigsten Bezeichnungen in dieser Arbeit.

Bezeichnung	Bedeutung	Referenz
a, b	Matrizen oder lineare Abbildungen, Elemente einer Algebra	
$\mathsf{a}.\nu$	Auswertung von a auf dem Vektor ν	
A, Z	lokal abgeschlossene Teilmengen eines topologischen (meist sogar stratifizierten) Raums	
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	reelle oder komplexe Algebren	
$\mathsf{B}, \mathsf{B}_\varepsilon(\mathsf{x})$	Kugel bzw. Kugel mit Radius ε um einen Punkt x eines metrischen Raums	
$\mathsf{B}^n_\varepsilon(\mathsf{x})$	Kugel mit Radius ε um einen Punkt $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n$	
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	
$\mathcal{C}^m_X$, $\mathcal{C}^\infty_X$	Garbe der m-fach differenzierbaren bzw. glatten Funktionen auf X	S. 27
$\mathcal{C}^m_{X,x}$, $\mathcal{C}^m_x$	Halm der Garbe der $\mathcal{C}^m$-Funktionen auf X am Fußpunkt $x \in X$	S. 29
$D_\nu f(x)$, $Df(x).\nu$	Ableitung einer differenzierbaren Funktion f am Fußpunkt x in Richtung des Vektors ν	
$D^k f(x).(\nu_1, \cdots, \nu_k)$	höhere Ableitungen von f am Fußpunkt x in Richtung der Vektoren $\nu_1, \cdots, \nu_k$	
$\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^k$	Garbe der Differentialoperatoren der Ordnung k auf einem (A)-stratifizierten Raum bzw. Prägarbe der Differentialoperatoren	S. 83
$e_1, \cdots, e_n$	kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$	
E, F, N	Vektorbündel	
$\mathcal{E}^m_{X,\mathcal{U}}$, $\mathcal{E}^\infty_{X,\mathcal{U}}$	Garbe der Whitney-Funktionen der Klasse $\mathcal{C}^m$ bzw. $\mathcal{C}^\infty$ auf X, definiert bezüglich einer Kartenüberdeckung $\mathcal{U}$	S. 43
g, h, k	Elemente einer Lie-Gruppe	
$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$	Lie-Algebren	

$\mathsf{G}, \mathsf{H}, \mathsf{K}$	Lie-Gruppen	
i, j, k, l	Indizes, meistens natürliche Zahlen	
$\mathrm{i}_v\alpha$	Einsetzung des Vektors v in die Differentialform α	S. 72, S. 213
I, J	Indexmengen	
$\mathcal{I}, \mathcal{J}$	Ideale einer Algebra $\mathcal{A}$	
$\mathcal{J}^{m,c}(Z; A)$	Ideal der auf Z von der Ordnung c flachen Jets auf A der Klasse $\mathcal{C}^m$	S. 55
k	Kegelkarte	S. 153
K	kompakte Menge	
l	Linkkarte	S. 153
m, k	Elemente der Menge $\mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$, drücken meistens Differenzierbarkeitsordnung aus	
$m, n, \tilde{n}, N$	natürliche Zahlen, meistens Dimensionen	
M, N	differenzierbare Mannigfaltigkeiten	
$\mathcal{M}, \mathcal{N}$	Moduln einer Algebra $\mathcal{A}$	
$\mathcal{M}^{m,c}(Z; A)$	Algebra der relativ Z von der Ordnung c temperierten Jets auf $A \setminus Z$ der Klasse $\mathcal{C}^m$	S. 58
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0	
$\mathbb{N}^{>0}$	Menge der positiven ganzen Zahlen	
p, q	Polynome	
P	Prinzipalbündel	
P, Q	Projektionsoperatoren	
R, S	Stücke oder Strata eines zerlegten Raums	S. 15, S. 25
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	
$\mathbb{R}^{>0}, \mathbb{R}^{\geq 0}, \mathbb{R}^{<0}, \mathbb{R}^{\leq 0}$	Menge der positiven, nichtnegativen, negativen bzw. nichtpositiven reellen Zahlen	
$\mathbb{RP}^n$	n-dimensionaler reeller projektiver Raum	
S_n	Permutationsgruppe in n Variablen	
S^n	n-Sphäre	
Sym^k	Funktor des k-fachen symmetrischen Tensorprodukts	
TM, TX	Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit M bzw. des stratifizierten Raums X mit glatter Struktur	S. 65
T	tubulare Umgebung	S. 96
T^n_m	Standard-Tubenumgebung des $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ unter der Voraussetzung $m \leq n$	S. 97
U, V, W, O	offene Mengen in einem topologischen Raum	
v, w	Vektoren, Elemente eines Vektorbündels	
v_x	Element eines Vektorbündels mit Fußpunkt x	

V, W	Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit oder einem (A)-stratifizierten Raum	S. 67
V_x	Auswertung des Vektorfelds V am Fußpunkt x	
$\mathcal{V}, \mathcal{W}$	Vektorräume	
x, y, z	Punkte eines stratifizierten Raums	
x, y	singuläre Karten eines stratifizierten Raums, differenzierbare Karten einer Mannigfaltigkeit	S. 27
$\mathsf{x}^1, \cdots, \mathsf{x}^n$	Komponenten einer singulären Karte in $\mathbb{R}^n$	
X, Y	zerlegte oder stratifizierte Räume	S. 15, S. 23
$\mathcal{X}^\infty(M), \mathcal{X}^\infty(X)$	Raum der glatten Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit bzw. einem (A)-stratifizierten Raum	S. 67
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	
α, β	Multiindizes aus $\mathbb{N}^n$	
α, β, ω	Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit oder einem stratifizierten Raum mit glatter Struktur	S. 70
δ_μ	geodätischer Abstand zur Riemannschen Metrik μ	
$\iota_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$	Injektion der i-ten Koordinate	
ι_m^n	kanonische Injektion von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ mittels der ersten m Koordinaten für $m \leq n$	
Λ	Poisson-Bivektor auf einem stratifizierten Raum	S. 86
Λ^k	Funktor des k-fachen antisymmetrischen Tensorprodukts	
μ, η, θ	Riemannsche Metriken auf einer Mannigfaltigkeit oder einem stratifizierten Raum, auch Skalarprodukte auf einem Vektorbündel	S. 73
$\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$	Projektion auf die i-te Koordinate	
π_m^n	kanonische Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^m$ mittels der ersten m Koordinaten für $m \leq n$	
ρ_m^n	tubulare Funktion der Standard-Tubenumgebung T_m^n für $m \leq n$	S. 97
ξ, ζ	Elemente einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$	
ξ_M	Fundamentalvektorfeld von $\xi \in \mathfrak{g}$	S. 159
$\Omega^k(M), \Omega^k(X)$	Raum der k-Formen auf der Mannigfaltigkeit M bzw. dem stratifizierten Raum X	S. 70
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	duale Paarung zweier Vektorräume, oft auch Euklidische Metrik	
$\lvert \cdot \rvert, \lVert \cdot \rVert, \lVert \cdot \rVert$	Normen oder Seminormen auf einem Vektorraum	
∂M	Rand einer Mannigfaltigkeit-mit-Rand M	

∂S	Rand $\overline{S} \setminus S$ eines Stratums $S \subset X$, stimmt in der Regel nicht mit dem topologischen Rand $\operatorname{bdr}(S) = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$ überein	S. 15
M°	Inneres einer Mannigfaltigkeit-mit-Rand M	
A°	topologisches Innere eines topologischen Unterraums $A \subset X$	

Kapitel 1

Stratifizierte Räume und Funktionalstrukturen

1.1 Zerlegte Räume

1.1.1 Sei X ein lokal kompakter Hausdorff Raum mit abzählbarer Topologie, und $\mathcal{Z}$ eine lokal endliche Partition von X in lokal abgeschlossene Unterräume $S \subset X$. Man nennt X oder besser das Paar $(X, \mathcal{Z})$ einen *zerlegten Raum* mit *Stücken* $S \in \mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}$ eine *Zerlegung* von X, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(ZR1) Jedes Stück $S \in \mathcal{Z}$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand) in der induzierten Topologie.

(ZR2) (condition of frontier) Falls $R \cap \overline{S} \neq \emptyset$ für ein Paar von Stücken $R, S \in \mathcal{Z}$, so gilt $R \subset \overline{S}$. Wir schreiben in diesem Fall $R \leq S$ und sagen, R sei *inzident* zu S, oder ein *Randstück* von S.

Wie man sofort sieht, stellt die Inzidenzrelation tatsächlich eine Ordnungsrelation auf der Menge der Stücke von X dar, insofern ist die Schreibweise $R \leq S$ gerechtfertigt.

1.1.2 Erläuterungen Der eben verwendete Begriff „lokal abgeschlossen“ wird in dieser Arbeit noch häufiger auftauchen. Deshalb sei kurz an seine Bedeutung erinnert. Unter einer *lokal abgeschlossenen* Teilmenge eines topologischen Raums X verstehen wir eine Teilmenge $A \subset X$ derart, daß jeder Punkt von A eine Umgebung U in X besitzt, so daß $A \cap U$ in U abgeschlossen ist. Äquivalent dazu ist, daß A der Durchschnitt einer in X offenen und einer in X abgeschlossenen Menge ist, oder auch dazu, daß A offen in seinem Abschluß liegt. Daraus folgt unmittelbar, daß der endliche Durchschnitt lokal abgeschlossener Mengen wieder lokal abgeschlossen ist. Untermannigfaltigkeiten liegen zum Beispiel immer lokal abgeschlossen in ihrer Obermannigfaltigkeit.

Unter dem *Rand* ∂A der lokal abgeschlossenen Menge A in X verstehen wir im folgenden den abgeschlossenen Unterraum $\overline{A} \setminus A$, der im allgemeinen natürlich nicht mit dem *topologischen Rand* $\operatorname{bdr}(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement A}$ von A in X übereinstimmen muß. Ist X ein zerlegter Raum, und $S \subset X$ eines seiner Stücke, so besteht ∂S aus allen Stücken $R < S$, also aus allen Randstücken von S.

Durch die Notation ∂A werden sich keine Verwechslungen mit dem Rand ∂M einer Mannigfaltigkeit-mit-Rand M ergeben. Ist nämlich M abgeschlossen in einem Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ eingebettet, so ist das *Innere* M° von M lokal abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$, und der Rand ∂M der berandeten Mannigfaltigkeit M entspricht dem eben definierten Rand ∂M° der lokal abgeschlossenen Menge M°.

1.1.3 Bemerkung Da X separabel ist, kann die Zerlegung $\mathcal{Z}$ höchstens abzählbar viele Stücke enthalten.

1.1.4 Bemerkung Anstelle von Mannigfaltigkeiten in der Bedingung (ZR1) kann man natürlich auch Objekte einer beliebigen Kategorie $\mathfrak{T}$ topologischer Räume nehmen, und erhält dann die sogenannten $\mathfrak{T}$-zerlegten Räume. Als Beispiele für $\mathfrak{T}$ seien die Kategorie der reell oder komplex analytischen Mannigfaltigkeiten genannt, sowie die der Polyhedra.

In diesem Zusammenhang führen wir noch die Kategorie Σ-$\mathfrak{Var}$ der Σ-Mannigfaltigkeiten ein, deren Objekte aus der topologischen Summe höchstens abzählbar vieler zusammenhängender und separabler Mannigfaltigkeiten besteht. Die Morphismen von Σ-$\mathfrak{Var}$ sind die komponentenweise glatten Funktionen zwischen Σ-Mannigfaltigkeiten. Falls die Dimensionen der Komponenten einer Σ-Mannigfaltigkeit M nach oben begrenzt sind, so sagen wir, M habe *endliche Dimension*, und bezeichnen das Supremum dieser Dimensionen mit $\dim M$.

Eine Zerlegung von X in Σ-Mannigfaltigkeiten nennen wir auch eine Σ-Zerlegung.

1.1.5 Die *Dimension* eines zerlegten Raumes $(X, \mathcal{Z})$ ist definiert durch

$$\dim X = \sup_{S \in \mathcal{Z}} \dim S.$$

In den meisten Anwendungen werden wir nur endlichdimensionale zerlegte Räume betrachten.

Als das *k-Skelett* von $(X, \mathcal{Z})$ mit $k \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir den offensichtlich ebenfalls zerlegten Raum

$$X^k = \bigcup_{S \in \mathcal{Z},\, \dim S \leq k} S$$

mit der durch X induzierten Topologie.

Für jedes Element $x \in X$ eines zerlegten Raumes $(X, \mathcal{Z})$ definiert man seine Tiefe als

$$\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}}(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{\exists S_0, S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{Z} |\ x \in S_0 < S_1 < \ldots < S_k\}.$$

Aufgrund der Definition gilt $\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}}(x) = \mathrm{dp}_{\mathcal{Z}}(y)$ für alle Elemente x, y eines Stückes S, also ist auch die Tiefe $\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}}(S) = \mathrm{dp}_{\mathcal{Z}}(x)$ für das Stück S wohldefiniert. Die Tiefe von X ist schließlich gegeben durch

$$\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}}(X) = \sup_{S \in \mathcal{Z}} \mathrm{dp}_{\mathcal{Z}}(S).$$

1.1.6 Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zerlegten Räumen $(X, \mathcal{Z})$ und $(Y, \mathcal{Y})$ heißt *Morphismus zerlegter Räume*, falls es zu jedem Stück $S \in \mathcal{Z}$ ein Stück $R_S \in \mathcal{Y}$ gibt, so daß folgendes gilt:

(ZR3) $f(S) \subset R_S$,

(ZR4) die Einschränkung $f_{|S} : S \to R_S$ ist glatt, und

(ZR5) für alle $S \leq S'$ ist $R_S \leq R_{S'}$ erfüllt.

Offensichtlich ist die Komposition zweier Morphismen wieder ein Morphismus. Somit bilden die zerlegten Räume und ihre Morphismen eine Kategorie $\mathfrak{Esp}_{\mathfrak{dec}}$.

Besitzt ein parakompakter topologischer Raum X zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Y}$, so sagen wir, $\mathcal{Z}$ sei *gröber* als $\mathcal{Y}$ oder auch $\mathcal{Y}$ *feiner* als $\mathcal{Z}$, falls die identische Abbildung auf X einen Morphismus zerlegter Räume von $(X, \mathcal{Z})$ nach $(X, \mathcal{Y})$ darstellt. In den meisten Fällen sind wir an einer möglichst groben Zerlegung eines parakompakten topologischen Raums interessiert.

1.1.7 Aus zwei zerlegten Räumen $(X, \mathcal{Z})$ und $(Y, \mathcal{Y})$ kann man das kartesische Produkt $X \times Y$ und die topologische Summe $X \amalg Y$ bilden. Die Unterräume $S \times R$ mit $S \in \mathcal{Z}$ und $R \in \mathcal{Y}$ bilden dann eine Zerlegung von $X \times Y$, die Unterräume $T \subset X \amalg Y$ mit $T \in \mathcal{Z}$ oder $T \in \mathcal{Y}$ eine Zerlegung von $X \amalg Y$. Damit wird $\mathfrak{Esp}_{\mathfrak{dec}}$ zu einer Kategorie mit (endlichen) Produkten und Summen.

Ein topologischer Unterraum $Y \subset X$ heißt *zerlegter Unterraum*, falls für alle Stücke $S \in \mathcal{Z}$ der Schnitt $S \cap Y$ eine Untermannigfaltigkeit von S ist, und die dadurch definierte Partition $\mathcal{Z} \cap Y$ von Y die condition of frontier erfüllt. In diesem Fall stellt das Paar $(Y, \mathcal{Z} \cap Y)$ wieder einen zerlegten Raum dar.

Um dem Leser einen ersten Eindruck von der Reichhaltigkeit aller möglichen zerlegten Räume zu vermitteln, folgt eine lange Liste nützlicher und instruktiver Beispielen.

1.1.8 Mannigfaltigkeiten Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit M ist in kanonischer Weise ein zerlegter Raum mit sich selbst als einzigem Stück. Man kann leicht (unendlich viele) weitere Partitionierungen von M konstruieren, die alle M zu einem zerlegten Raum machen. Diese sind jedoch alle feiner als die kanonische Zerlegung und werden in der Regel deswegen nicht weiter untersucht.

1.1.9 Intervalle Die einfachsten Beispiele (nichttrivialer) zerlegter Räume sind gegeben durch Intervalle der Form $[a, b[$, $]a, b]$ oder $[a, b]$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, und der offensichtlichen gröbsten Zerlegung des entsprechenden Intervalls in die Menge $]a, b[$ und einem beziehungsweise zwei Randpunkten.

1.1.10 Mannigfaltigkeiten-mit-Rand Sei M eine berandete Mannigfaltigkeit, $S_1 = \partial M$ ihr Rand und $S_2 = M^\circ = M \setminus \partial M$ ihr innerer Kern. Dann stellt M einen zerlegten Raum mit Stücken S_1 und S_2 dar.

1.1.11 Kegel Ist X ein topologischer Raum, so wird der *Kegel* über X als der Quotientenraum

$$CX = [0, 1[\times X / \{0\} \times X$$

definiert. Falls M nun eine Mannigfaltigkeit darstellt, so ist der Kegel CM ein zerlegter Raum, der die *Spitze* $o := [\{0\} \times M]$ und die Menge $]0, 1[\times M$ als seine Stücke besitzt. Im Falle $M = S^1$ erhält man den wohlbekannten Standardkegel $X_{\text{Cone}} := CS^1$ (Abb. 1.1), im Falle $M = S^0 = \{\pm 1\}$ die Kante $X_{\text{Edge}} := CS^0$ (Abb. 1.2). Anstelle einer Mannigfaltigkeit

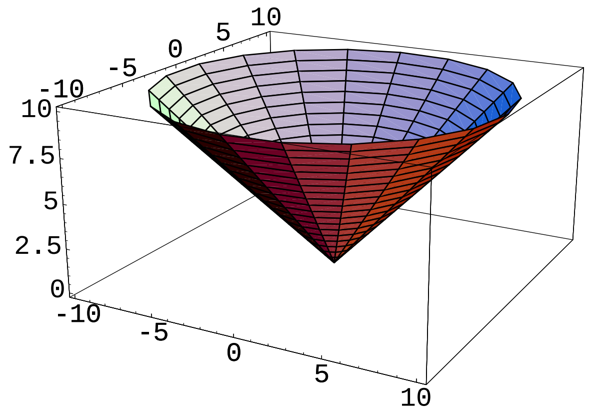

Abbildung 1.1: Standardkegel

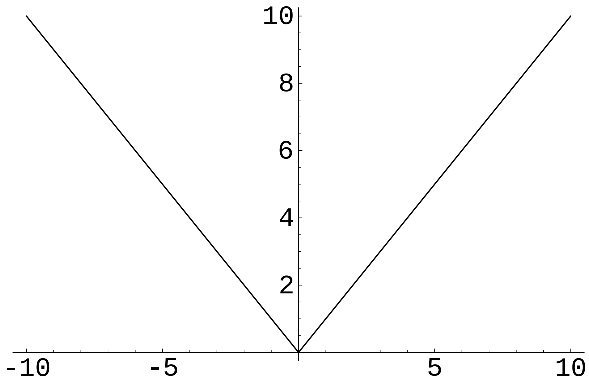

Abbildung 1.2: Kante

M kann man natürlich auch einen zerlegten Raum X mit Stücken $S \in \mathcal{Z}$ nehmen. Der Kegel CX ist dann ebenfalls zerlegt, wobei die Stücke von CX durch die Spitze o und die Mengen $]0,1[\times S$ gegeben sind. Es gilt dabei

$$\begin{aligned} \dim CX &= \dim X + 1, \\ \mathrm{dp}\ CX &= \mathrm{dp}\ X + 1. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

1.1.12 Pathologisches Beispiel Der Raum $X = S_1 \cup S_2 \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$S_1 = \{0\} \times]-1,1[\quad \text{und} \quad S_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, x > 0, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$$

sowie der durch $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie ist bekanntlich nicht lokal zusammenhängend, stellt aber immerhin einen zerlegten Raum mit Stücken S_1 und S_2 dar. Dabei gilt $S_1 < S_2$, jedoch gleichzeitig $\dim S_1 = \dim S_2$. Derartige zerlegte Räume wollen wir nicht in unsere Betrachtungen miteinbeziehen, weswegen wir später weitere Bedingungen an einen zerlegten Raum stellen werden, die eine solche Situation ausschließen.

Noch „pathologischer“ ist der zerlegte Raum $Y = R_1 \cup R_2 \subset \mathbb{R}^3$ mit den Stücken

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{ (0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y^2 + z^2 < 1 \right\} \quad \text{und} \\ R_2 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x > 0, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right), z = \sin\left(\frac{\alpha}{x}\right) \right\}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha > 0$ transzendent ist. In diesem Fall gilt sogar $\dim R_1 > \dim R_2$, obwohl $R_1 < R_2$.

1.1.13 Spiralen Die *schnelle Spirale* (Abb. 1.3)

$$X_{\text{Spirr}} = \{0\} \cup \left\{ (r\sin\theta, r\cos\theta) \,\middle|\, r = e^{-\theta^2},\ \theta > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

und die *langsame Spirale* (Abb. 1.4)

$$X_{\text{Spir}} = \{0\} \cup \left\{ (r\sin\theta, r\cos\theta) \,\middle|\, r = e^{-\theta},\ \theta > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

sind beides zerlegte Räume mit dem Ursprung als einem Stück, und dem Rest als zweitem. Man beachte, daß sich sowohl die langsame als auch die schnelle Spirale unendlich oft um den Ursprung wickelt.

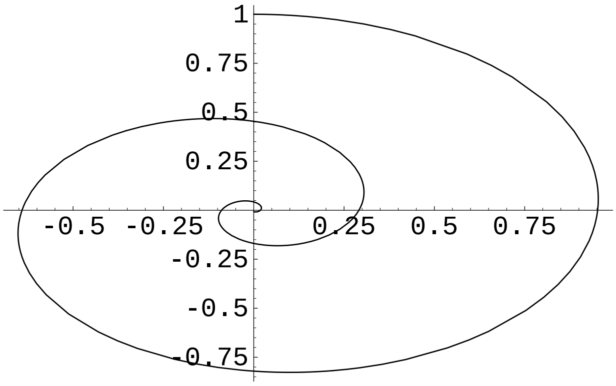

Abbildung 1.3: Schnelle Spirale

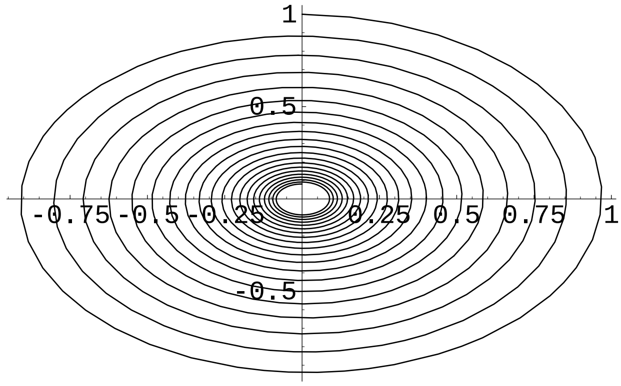

Abbildung 1.4: Langsame Spirale

1.1.14 Simplizes und Polyeder Unter einem *affinen Simplex* der Dimension m versteht man bekanntlich eine Punktmenge $\mathsf{s} \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq m$ der Form

$$\mathsf{s} = \mathsf{s}[\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_m] := \left\{ \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \nu_j \,\middle|\, \sum_{j=0}^{m} \lambda_j = 1 \text{ und } \lambda_j \geq 0 \text{ für } j = 0, \cdots, m \right\},$$

wobei die $\nu_0, \cdots, \nu_m$ affin unabhängige Punkte im $\mathbb{R}^n$ darstellen, und als *Vertizes* von s bezeichnet werden. Mit der Standardbasis $(\mathsf{e}_1, \cdots, \mathsf{e}_m)$ von $\mathbb{R}^m$ erhält man das sogenannte m-te *Standardsimplex* $\mathsf{s}_m := \mathsf{s}[0, \mathsf{e}_1, \cdots, \mathsf{e}_m]$.

Für jedes Simplex s liefern die $(m-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

$$\mathsf{s}_{j_0,\cdots,j_k} := \left\{ \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \nu_j \in \mathsf{s} \,\middle|\, \lambda_{j_0}, \cdots, \lambda_{j_k} > 0 \text{ und } \lambda_j = 0 \text{ für } \lambda_j \neq \lambda_{j_0}, \cdots, \lambda_{j_k} \right\},$$

wobei k die natürlichen Zahlen von 0 bis m durchläuft und das $(k+1)$-Tupel $(j_0, \cdots, j_k)$ alle Folgen der Form $0 \leq j_0 < j_1 < \cdots < j_k \leq m$, eine Zerlegung von s. Die Mengen $\mathsf{s}_{j_0,\cdots,j_k}$ werden *offene Seiten* von s genannt, die Abschlüsse $\overline{\mathsf{s}_{j_0,\cdots,j_k}} = \mathsf{s}[\nu_{j_0}, \cdots, \nu_{j_k}]$ sind wieder Simplizes und heißen *Seiten* von s.

Auch die durch geeignetes Zusammenkleben von Simplizes entstehenden Polyeder sind zerlegte Räume, wie im folgenden kurz erklärt werden soll. Ein *endlicher simplizialer Komplex* K besteht aus einer nichtleeren endlichen Menge von Simplizes im $\mathbb{R}^n$, so daß folgende Axiome gelten:

(SK1) Gehört das Simplex s zu K, so liegt auch jede Seite von s in K.

(SK2) Für je zwei Simplizes aus K ist der Durchschnitt entweder leer oder eine gemeinsame Seite.

Jedem endlichen simplizialen Komplex K ordnet man seine *geometrische Realisierung* $|\mathsf{K}|$ zu; das ist der aus der Vereinigung aller Simplizes von K bestehende topologische Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Die durch die offenen Seiten der Simplizes von K definierte Partition macht $|\mathsf{K}|$ dann zu einem zerlegten Raum. Unter einem *Polyeder* oder *triangulierbaren Raum* versteht man schließlich einen topologischen Raum X, der homöomorph zu einem solchen $|\mathsf{K}|$ ist. Hat man explizit eine *Triangulierung*, also einen Homöomorphismus h von $|\mathsf{K}|$ auf X vorgegeben, so überträgt sich die Struktur eines zerlegten Raums mittels h von $|\mathsf{K}|$ auf X.

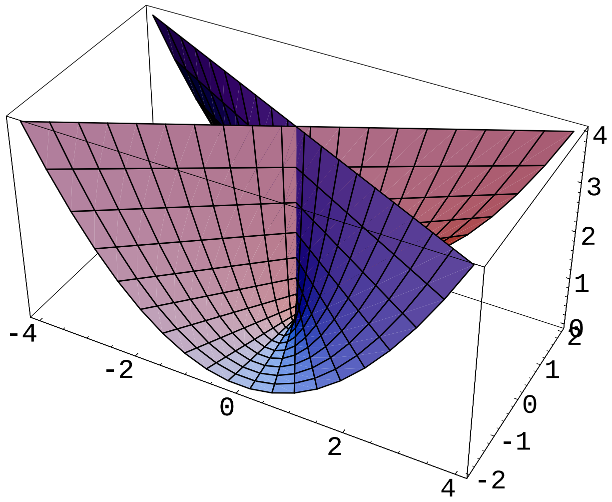

Abbildung 1.5: Whitney-Regenschirm

1.1.15 Neilsche Parabel Ein wohlbekanntes Beispiel für einen zerlegten Raum ist die (reelle) *Neilsche Parabel* $X_{\text{Neil}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$, deren Stücke durch $S_0 = \{0\}$ und die Vereinigung S_1 der beiden Schenkel $S_{11} = \{(x,y) \in X_{\text{Neil}} \mid y > 0\}$ und $S_{12} = \{(x,y) \in X_{\text{Neil}} \mid y < 0\}$ gegeben ist.

1.1.16 Whitney-Regenschirm Der *Whitney-Regenschirm* X_{WUmb} (Abb. 1.5) ist das Nullstellengebilde des reellen Polynoms $x^2 - y^2 z$, also

$$X_{\text{WUmb}} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 = y^2 z\right\}.$$

Die Standard-Zerlegung von X_{WUmb} besitzt die Stücke $S_0 = \{0\}$, $S_1 = \{(0,0,z) \mid z < 0\}$, $S_2 = \{(0,0,z) \mid z > 0\}$, $S_3 = \{(x,y,z) \in X_{\text{WUmb}} \mid y > 0\}$ und $S_4 = \{(x,y,z) \in X_{\text{WUmb}} \mid y < 0\}$. Man beachte, daß die Partition $T_0 = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, $T_1 = S_3$, $T_2 = S_4$ den Raum X_{WUmb} nicht zu einem zerlegten Raum macht, da in diesem Fall das Axiom (ZR2) nicht erfüllt ist; es gilt nämlich $T_0 \cap \overline{T_1} = S_0 \cup S_2 \neq T_0$. In der Abbildung 1.5 ist der Whitney-Regenschirm ohne „Stock“, das heißt ohne die Menge S_4 zu sehen.

1.1.17 Whitney-Spitze Ebenfalls von Whitney [172] stammt das folgende Beispiel eines zerlegten Raums, die sogenannte *Whitney-Spitze* (Abb. 1.6). Sie ist als Nullstellengebilde X_{WCsp} des reellen Polynoms $y^2 + x^3 - z^2 x^2$ definiert. Die Varietät X_{WCsp} hat auf den ersten Blick zwei natürliche Zerlegungen, nämlich einmal die Zerlegung in die z-Achse S_1 und ihr Komplement $S_2 = X_{\text{WCsp}} \setminus S_2$ und andererseits die Zerlegung in $R_0 = \{0\}$, $R_1 = S_1 \setminus \{0\}$ und $R_2 = S_2$. Wir werden im Abschnitt über die Whitney-Bedingungen sehen, welche davon die „richtige“ ist.

1.1.18 Kegelkamm Die bis jetzt vorgestellten zerlegten Räume waren alle endlichdimensional. Ein Beispiel für einen unendlichdimensionalen zerlegten Raum ist der Kegelkamm X_{Cmb}, der durch geeignetes Anheften der Kegel CS^n an die reelle Halbgerade $\mathbb{R}^{\geq 0}$ entsteht. Genauer gesagt bildet man zuerst die topologische Summe von $\mathbb{R}^{\geq 0}$ und allen CS^n und erzeugt daraus X_{Cmb} durch Identifikation der Punkte $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit den

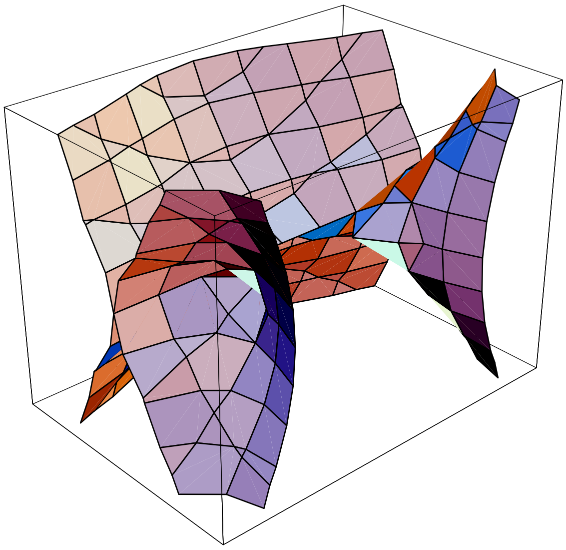

Abbildung 1.6: Whitney-Spitze

Spitzen o_n der Kegel CS^n. Anschaulich erhält man so dann einen Kamm, dessen Zacken durch Kegel gegeben sind. Die durch die natürliche Zerlegung von $\mathsf{X}_{\mathrm{Cmb}}$ gegebenen Stücke sind $\mathbb{R}^{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$, $]0,1[\times \mathsf{S}^n$ und $\{n\}$, wobei n die natürlichen Zahlen durchläuft.

1.1.19 Mannigfaltigkeiten-mit-Ecken Definiert man Mannigfaltigkeiten mit Ecken in geeigneter Weise, nämlich so wie in MELROSE [117, Sec. 2.1], dann stellen auch diese Objekte zerlegte Räume im Sinne der obigen Definition dar. Die Definition nach MELROSE gestattet es, den Rand einer Mannigfaltigkeiten mit Ecken in natürlicher Weise als Vereinigung eingebetteter Hyperflächen aufzufassen. Die übliche Definition des Begriffs einer Mannigfaltigkeit mit Ecken mittels Karten in den Modellräumen $\mathbb{R}^{n,m} = (\mathbb{R}^{\geq 0})^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ erlaubt dies nicht automatisch. Dieses Problem wird ausführlich in [118] diskutiert. Im folgenden werden wir Mannigfaltigkeiten mit Ecken gemäß MELROSE [117, Sec. 2.1], jedoch in einer etwas erweiterten Form einführen und die kanonische Zerlegung solcher Mannigfaltigkeiten mit Ecken angeben.

Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension m. Unter einem *Eckdatum* für M verstehen wir dann eine topologische Einbettung $\iota : \mathsf{M} \to \mathbb{R}^n$ zusammen mit einer endlichen Familie $(\eta_j)_{j\in J}$ von glatten Funktionen auf dem $\mathbb{R}^m$, so daß gilt:

(ED1) $\iota(\mathsf{M}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \,|\, \eta_j(x) = 0 \text{ für alle } j \in J \right\}$.

(ED2) Zu jedem $I \subset J$ definiere man

$$\mathsf{M}_I = \left\{ y \in \mathsf{M} \,|\, \eta_j(\iota(y)) = 0 \text{ für alle } j \in I \text{ und } \eta_j(\iota(y)) > 0 \text{ für alle } j \notin I \right\},$$

Dann ist für alle $x \in \mathsf{M}_I$ die Familie $\left(d_{\iota(x)}\eta_j\right)_{j\in I}$ der Kotangentialvektoren der M_I definierenden Funktionen η_j, $j \in I$ an der Stelle $\iota(x)$ linear unabhängig.

Zwei Eckdaten ι, $(\eta_j)_{j\in J}$ und $\tilde{\iota}$, $(\tilde{\eta}_j)_{j\in\tilde{J}}$ von M heißen äquivalent, falls ein $N \geq \max(n, \tilde{n})$ existiert, ein Diffeomorphismus $\mathsf{H} : \mathsf{O} \to \tilde{\mathsf{O}}$ zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^N$ mit $\iota(\mathsf{M}) \subset \mathsf{O}$, und eine bijektive Abbildung $\alpha : J \to \tilde{J}$, so daß

(ED3) $\tilde{\iota} = \mathsf{H} \circ \iota$.

(ED4) $\mathsf{M}_{\alpha(I)} = \mathsf{M}_I$ für alle $I \subset J$.

Dabei haben wir in kanonischer Weise den $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ mittels der n bzw. $\tilde{n}$ ersten Koordinaten in den $\mathbb{R}^N$ eingebettet, und die Einbettungen ι und $\tilde{\iota}$ entsprechend ausgedehnt.

Unter einer *Mannigfaltigkeit mit Ecken* verstehen wir nun eine topologische Mannigfaltigkeit M mit Rand, die mit einer Äquivalenzklasse von Eckdaten versehen ist. Die von der speziellen Wahl des Eckdatums unabhängige Familie $\mathcal{Z} = (\mathsf{M}_I)_{I\subset J}$ stellt eine Zerlegung von M dar. Aufgrund von (ED2) sind nämlich alle $\iota(\mathsf{M}_I)$ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$. Deren Mannigfaltigkeitsstruktur überträgt sich mittels der Einbettung ι von $\iota(\mathsf{M}_I)$ auf M_I. Wegen (ED3) ist diese unabhängig von dem speziell gewählten Eckdatum. Zudem ergibt sich sofort aus $\mathsf{M}_{I'} \cap \overline{\mathsf{M}_I} \neq \emptyset$ die Beziehung $I' \subset I$, woraus $\mathsf{M}_{I'} \subset \overline{\mathsf{M}_I}$ folgt. Also erfüllt M auch die condition of frontier, stellt als tatsächlich einen zerlegten Raum dar. Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit Ecken sind durch die oben definierten Simplizes gegeben.

1.1.20 Geklebte Räume Ein Verfahren zur Konstruktion zerlegter Räume erhält man durch geeignetes iterative Aneinanderkleben berandeter Mannigfaltigkeiten über ihren Rand. Die entsprechende Konstruktion findet sich in der Arbeit Thom [149, Sec. C] und bildet einen wesentlichen Bestandteil des Thomschen Begriffs einer ensemble stratifié (der andere wesentliche Bestandteil ist der eines Inzidenzschemas, auf den wir an dieser Stelle jedoch nicht weiter eingehen wollen). Den durch das iterative Aneinanderheften entstehenden Räumen geben wir einen eigenen Namen, nämlich geklebte Räume. Es sei noch erwähnt, daß wir in der Konstruktion ein wenig allgemeiner als Thom vorgehen, wobei die größere Allgemeinheit im wesentlichen darin besteht, daß wir als Stücke auch Mannigfaltigkeiten zulassen, die nicht diffeomorph zum Innern einer kompakten Mannigfaltigkeit mit Rand sind (vgl. auch [69]).

Als Zutaten für einen geklebten Raum benötigt man zuerst eine endliche Familie $(\mathsf{M}_i)_{1\leq i\leq k}$ von Mannigfaltigkeiten, wobei M_1 unberandet ist, alle M_i mit $i > 1$ jedoch einen nichtleeren Rand besitzen. Rekursiv definiert man dann topologische Räume E_i durch $\mathsf{E}_1 = \mathsf{M}_1$ und $\mathsf{E}_{i+1} = \mathsf{E}_i \cup_{\mathsf{h}_{i+1}} \mathsf{M}_{i+1}$, wobei die $\mathsf{h}_{i+1} : \partial\mathsf{M}_{i+1} \to \mathsf{E}_i$ ebenfalls vorgegebene stetige Funktionen darstellen, und der Klebebedingung

(KL) $\mathsf{M}_i^\circ \cap \mathsf{h}_j(\partial\mathsf{M}_i) = \mathsf{M}_i^\circ$ für alle $j > i$ mit $\mathsf{M}_i^\circ \cap \mathsf{h}_j(\partial\mathsf{M}_i) \neq 0$

genügen sollen. Schließlich erhält man so den *geklebten Raum* $\mathsf{X} = \mathsf{E}_k$. Dieser ist ein zerlegter Raum und besitzt die Stücke $\mathsf{S}_i = \mathsf{M}_i^\circ$. Die zu X gehörenden Funktionen h_i werden als seine *Klebefunktionen* bezeichnet.

Beweis: Das Axiom (ZR1) ist aufgrund der Definition von X trivialerweise erfüllt; es bleibt die Gültigkeit von (ZR2) nachzuweisen. Nach Definition sind die Mengen $\bigcup_{j>i}\mathsf{M}_j^\circ$ offen in X, das heißt es ist $\overline{\mathsf{M}_i} \subset \bigcup_{j\leq i}\mathsf{M}_j^\circ$. Sei $\overline{\mathsf{M}_i} \cap \mathsf{M}_j^\circ \neq 0$ für ein $j < i$, und $x \in \mathsf{M}_j^\circ$ beliebig. Sei zudem $\mathsf{U} \subset \mathsf{X}$ eine offene Umgebung von x. Da aufgrund der Klebebedingung (KL) $\mathsf{h}_i^{-1}(\mathsf{U} \cap \mathsf{M}_j^\circ)$ nicht leer ist, gibt es nach Konstruktion von X ein offenes $\mathsf{V} \subset \mathsf{M}_i$ mit $\mathsf{h}_i^{-1}(\mathsf{U} \cap \mathsf{M}_j^\circ) = \mathsf{V} \cap \partial\mathsf{M}_i$ und $\emptyset \neq \mathsf{V} \cap \mathsf{M}_i^\circ \subset \mathsf{U}$. Das bedeutet aber $\mathsf{U} \cap \mathsf{M}_i^\circ \neq \emptyset$, also $x \in \overline{\mathsf{M}_i}$ und $\mathsf{M}_j^\circ \subset \overline{\mathsf{M}_i}$. Damit ist auch (ZR2) gezeigt. □

1.1.21 Proposition *Ist* X *ein geklebter Raum, so auch der Kegel* CX *über* X.

BEWEIS: Seien $M_1, \cdots, M_k$ die Mannigfaltigkeiten mit Rand, die durch Aneinanderkleben den Raum X ergeben. Mit der im Anhang C, Proposition C.4.2 beschriebenen Methode versehe man die Produkte $[0,1[\times M_1, \cdots, [0,1[\times M_k$ mit differenzierbaren Strukturen. Aus den Klebefunktionen h_{i+1} ergeben sich Klebefunktionen $Ch_{i+1} : \partial([0,1[\times M_{i+1}) \to CE_i$ durch

$$Ch_{i+1}(t,m) = \begin{cases} [\{0\} \times E_i] & \text{falls} \quad t = 0, \\ (t, h_{i+1}(m)) & \text{falls} \quad t > 0. \end{cases}$$

Der Leser möge sich davon überzeugen, daß $CE_1 = CM_1$ und $CE_{i+1} = CE_i \cup_{Ch_{i+1}} CM_{i+1}$ für $i = 1, \cdots, k-1$. Das impliziert aber wegen $CX = CE_k$, daß CX ein geklebter Raum ist. $\square$

1.2 Stratifizierungen

Betrachtet man einen zerlegten Raum $(X, \mathcal{Z})$, so gibt es in der Klasse aller Zerlegungen von X solche, die sich nur geringfügig von $\mathcal{Z}$ unterscheiden, da sie lokal um jeden Punkt wie $\mathcal{Z}$ aussehen, aber auch solche, die wesentlich verschieden von $\mathcal{Z}$ sind. Als Beispiel dafür sei $\mathbb{R}$ mit der Zerlegung $\mathcal{Z}$ in $\{0\}$, $\mathbb{R}^{>0}$ und $\mathbb{R}^{<0}$ angeführt. Weitere Zerlegungen von $\mathbb{R}$ sind dann zum Beispiel durch $\mathcal{Z}_1 = \{\{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ und $\mathcal{Y} = \{\mathbb{R}\}$ gegeben. Anschaulich ist klar, daß $\mathcal{Z}_1$ ähnlich wie $\mathcal{Z}$ aussieht, $\mathcal{Y}$ aber echt verschieden von $\mathcal{Z}$ ist.

Wir wollen dieses Phänomen im folgenden in mathematisch präziseren Termen formulieren und führen dazu den Begriff einer Stratifizierung gemäß der Definition von MATHER [114] ein. Stratifizierungen erzeugen demnach geeignete Äquivalenzklassen von Zerlegungen von X. Es stellt sich dabei heraus, daß in einer solchen Äquivalenzklasse von Zerlegungen eine gröbste Zerlegung existiert; deren Stücke sind dann die sogenannten Strata von X.

1.2.1 Bevor wir jedoch in diesem Abschnitt stratifizierte Räume einführen, soll kurz an den Begriff des Mengenkeims erinnert werden.

Bezeichne dazu X einen topologischen Raum, und sei $x \in X$. Zwei Teilmengen A und B von X heißen *äquivalent an der Stelle* x, falls es eine offene Umgebung $U \subset X$ von x gibt, so daß $A \cap U = B \cap U$. Diese Relation stellt offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf der Potenzmenge von X dar. Die Klasse aller zu $A \subset X$ an der Stelle x äquivalenten Mengen werde mit $[A]_x$ bezeichnet und der *Mengenkeim* von A an x genannt. Falls $A \subset B \subset X$, so sagen wir manchmal, $[A]_x$ sei ein Unterkeim von $[B]_x$, in Zeichen $[A]_x \subset [B]_x$. Zudem prüft man leicht nach, daß zwei Mengen $A, B \subset X$ genau dann an der Stelle $x \in X$ äquivalent sind, falls die Funktionskeime $[\chi_A]_x$ und $[\chi_B]_x$ der charakteristischen Funktionen von A und B an der Stelle x übereinstimmen.

1.2.2 Definition Unter einer *Stratifizierung* eines topologischen Raums X verstehen wir eine Abbildung $\mathcal{S}$, die jedem $x \in X$ den Mengenkeim $\mathcal{S}_x$ einer abgeschlossenen Teilmenge von X so zuordnet, daß folgendes Axiom erfüllt ist:

(ST1) Für jedes $x \in X$ gibt es eine Umgebung U von x und eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von U derart, daß für alle $y \in U$ der Keim $\mathcal{S}_y$ mit dem Mengenkeim des Stückes aus $\mathcal{Z}$ übereinstimmt, in dem y liegt.

Das Paar $(X, \mathcal{S})$ nennt man dann als einen *stratifizierten Raum.*

Jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von X definiert eine Stratifizierung, indem man für alle $x \in X$ den Keim $\mathcal{S}_x$ als den Keim des Stückes definiert, in dem x liegt. Wir sagen in diesem Fall, $\mathcal{S}$ sei durch $\mathcal{Z}$ *induziert.* Nach Definition wird eine Stratifizierung $\mathcal{S}$ zumindest lokal immer durch eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ induziert.

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen stratifizierten Räumen $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{R})$ heißt *Morphismus stratifizierter Räume* oder auch nur *stratifizierte Abbildung*, falls für jedes $x \in X$ Umgebungen V von $f(x)$ und $U \subset f^{-1}(V)$ von x existieren zusammen mit Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von U und $\mathcal{Y}$ von V, die $\mathcal{S}_{|U}$ bzw. $\mathcal{R}_{|V}$ im Sinne von (ST1) induzieren, so daß folgendes gilt:

(ST2) Für jedes $y \in U$ gibt es eine offene Umgebung $O \subset U$ derart, daß für das y enthaltende Stück $S \in \mathcal{Z}$ die eingeschränkte Abbildung $f_{|S \cap O}$ Bild in dem $f(y)$ enthaltenden Stück $R \in \mathcal{Y}$ hat und eine glatte Abbildung von $S \cap O$ nach R darstellt.

Insbesondere ist dann $f(\mathcal{S}_x)$ ein Unterkeim von $\mathcal{R}_{f(x)}$.

Die stratifizierten Räume bilden zusammen mit ihren Morphismen eine Kategorie $\mathfrak{Esp}_{\mathfrak{strat}}$.

1.2.3 Bemerkung Analog wie bei zerlegten Räumen kann man den Begriff einer $\mathfrak{T}$-Stratifizierung von X für eine Kategorie $\mathfrak{T}$ topologischer Räume prägen. Wir verstehen darunter eine Abbildung $x \mapsto \mathcal{S}_x$ derart, daß $\mathcal{S}_x$ lokal durch eine $\mathfrak{T}$-Zerlegung im Sinne von (ST1) induziert wird. Es ist dann auch klar, was unter einer Σ-Stratifizierung zu verstehen ist.

1.2.4 Die Kategorie $\mathfrak{Esp}_{\mathfrak{strat}}$ besitzt endliche Produkte und Summen. Zudem existiert der Begriff eines Unterobjekts in $\mathfrak{Esp}_{\mathfrak{strat}}$; genauer verstehen wir dabei unter einem stratifizierten Unterraum von $(X, \mathcal{S})$ einen topologischen Unterraum $Y \subset X$ derart, daß für jedes $x \in Y$ eine offene Umgebung U in X existiert und eine $\mathcal{S}_{|U}$ induzierende Zerlegung $\mathcal{Z}$ von U, so daß $(Y \cap U, \mathcal{Z} \cap Y)$ ein zerlegter Unterraum von $(U, \mathcal{Z})$ ist. In diesem Fall stellt das Paar $(Y, \mathcal{S} \cap Y)$ wieder einen stratifizierten Raum dar.

Wir wollen zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ von X als nicht wesentlich verschieden ansehen, wenn die von ihnen induzierten Stratifizierungen übereinstimmen. Deshalb bezeichnen wir $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ in diesem Fall als *äquivalent.*

1.2.5 Lemma (MATHER [114, Lem. 2.1]) *Falls auf X zwei äquivalente Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ gegeben sind, so gilt für alle $x \in X$*

$$\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_1}(x) = \mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_2}(x). \tag{1.2.1}$$

BEWEIS: Durch Induktion nach $\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_1}(x)$ zeigt man

$$\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_1}(x) \leq \mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_2}(x),$$

woraus sich zusammen mit der durch Vertauschen von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ ergebenden Ungleichung die Behauptung ergibt. Für den Fall $\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_1}(x) = 0$ ist nichts zu zeigen. Nehmen wir also an, es sei $\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_1}(x) = k+1$, und die Behauptung gelte für $\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_1}(x) \leq k$. Sei $x \in S = S_0 < S_1 < \cdots < S_{k+1}$ eine maximale Folge von Stücken aus $\mathcal{Z}_1$, und R das Stück von $\mathcal{Z}_2$, in dem x liegt. Es existiert dann eine Umgebung U von x mit $S \cap U = R \cap U$, so daß U nur mit endlich vielen Stücken von $\mathcal{Z}_2$ nichtleeren Durchschnitt hat. Da $x \in \overline{S_1}$, gibt es nach Endlichkeitsannahme an U ein Stück R_1 von $\mathcal{Z}_2$, so daß $x \in \overline{S_1 \cap R_1 \cap U}$. Dann folgt $R < R_1$. Nach Wahl eines $y \in S_1 \cap R_1$ ergibt sich daraus mit der Induktionsannahme

$$\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_1}(x) = \mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_1}(y) + 1 \leq \mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_2}(y) + 1 \leq \mathrm{dp}_{\mathcal{Z}_2}(x).$$

Das war zu zeigen. □

Aufgrund des Lemmas ist für jeden Punkt x eines stratifizierten Raums $(X, \mathcal{S})$ die Tiefe $\mathrm{dp}_{\mathcal{Z}}(x)$ unabhängig von der speziellen Zerlegung $\mathcal{Z}$, die $\mathcal{S}$ in einer Umgebung von x definiert. Deshalb macht es Sinn, die *Tiefe* von x bezüglich der Stratifizierung $\mathcal{S}$ durch $\mathrm{dp}_{\mathcal{S}}(x) = \mathrm{dp}_{\mathcal{Z}}(x)$ zu definieren. Es gilt dann

1.2.6 Lemma (*vgl.* MATHER [114, Lem. 2.2]) *Sei T_k die Menge aller Punkte von X der Tiefe k. Dann liefert die Familie $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Σ-Zerlegung von X, die $\mathcal{S}$ induziert.*

BEWEIS: Aufgrund von (ST1) und der Separabilität von X ist klar, daß jedes T_k die höchstens abzählbare topologische Summe glatter Mannigfaltigkeiten sein muß, also eine Σ-Mannigfaltigkeit darstellt. Daß die Familie $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zudem eine lokalendliche Partition von X erzeugt, folgt sofort aus der Tatsache, daß jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die in endlich viele Stücke gemäß (ST1) zerlegt wird. Da die Punkte eines Stückes einer (lokalen) Zerlegung gleiche Tiefe haben, ergibt sich ebenso unmittelbar, daß die Stratifizierung $\mathcal{S}$ durch $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ erzeugt wird, das heißt, daß für alle $x \in X$ der Mengenkeim $[T_k]_x$ mit $\mathcal{S}_x$ übereinstimmen. Es bleibt also nachzuweisen, daß die condition of frontier erfüllt ist. Sei deshalb $x \in \overline{T_l} \setminus T_l$ ein Punkt der Tiefe k. Offensichtlich ist dann $k > l$. Sei y ein weiterer Punkt der Tiefe k aus $\overline{T_l} \setminus T_l$. Dann existieren eine offene Umgebung U von y, eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von U, die $\mathcal{S}$ definiert, sowie eine nicht verlängerbare Kette $y \in S_0 < S_1 < \cdots < S_k$ von Stücken aus $\mathcal{Z}$. Da $y \in \overline{S_{k-l}}$ und $S_{k-l} \subset T_l$ folgt $y \in \overline{T_l}$, also $T_k \subset \overline{T_l}$. Das war zu zeigen. □

1.2.7 Proposition *Zu jedem stratifizierten Raum $(X, \mathcal{S})$ existiert eine $\mathcal{S}$ induzierende Zerlegung $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$ mit folgender Maximalitätseigenschaft: Für jede offene Menge $U \subset X$ und jede Zerlegung $\mathcal{Z}$, die $\mathcal{S}$ über U induziert, ist die Einschränkung von $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$ auf U gröber als $\mathcal{Z}$.*

Die eindeutig bestimmte Zerlegung $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$ heißt die *kanonische Zerlegung* des stratifizierten Raumes $(X, \mathcal{S})$ und wird zur Vereinfachung der Notation auch mit $\mathcal{S}$ bezeichnet. Die Stücke von $\mathcal{S}$ heißen *Strata* von $(X, \mathcal{S})$.

BEWEIS: Wir konstruieren die Zerlegung $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$ rekursiv. Sei $S_{0,d}$ mit $d \in \mathbb{N}$ die Vereinigung aller d-dimensionalen Zusammenhangskomponenten von T_0, und $\mathcal{P}^0$ die Familie aller nichtleeren $S_{0,d}$. Dann liefert $\mathcal{P}^0$ eine Zerlegung von T_0, die $\mathcal{S}$ über T_0 induziert. Nehmen wir nun an, wir hätten für alle T_l mit $0 \leq l \leq k$ eine Partition $\mathcal{P}^l$ von T_l in offene Untermannigfaltigkeiten $S \subset T_l$ konstruiert, so daß folgendes gilt:

(1) Die Familie $\mathcal{Z}^k := (S)_{S\in\mathcal{P}^l, l\leq k}$ stellt eine $\mathcal{S}_{|\bigcup_{l\leq k} T_l}$ induzierende Zerlegung von $\bigcup_{l\leq k} T_l$ dar.

(2) Für jede offene Menge $U \subset X$ und jede $\mathcal{S}$ induzierende Zerlegung $\mathcal{Z}$ von U ist jedes Stück $S \subset U$ von $\mathcal{Z}^k_{|U}$ der Tiefe $l \leq k$ Vereinigung von Stücken R von $\mathcal{Z}$.

Sei nun $x \in T_{k+1}$ und S_x die Zusammenhangskomponente von x in T_{k+1}. Dann ist S_x eine Mannigfaltigkeit der Dimension d_x. Sei weiter S ein Stück von $\mathcal{Z}^k$. Wir behaupten dann, daß entweder $S_x \subset \overline{S}$ oder $S_x \cap \overline{S} = \emptyset$. Dies wird sich aus der Tatsache ergeben, daß die Menge aller $y \in S_x$, für die $y \in \overline{S}$ gilt, offen und abgeschlossen in S_x ist. Daß sie abgeschlossen ist, folgt aus der Tatsache, daß ihr Komplement in S_x offensichtlich offen ist. Zum Nachweis der Offenheit werde $y \in \overline{S}$ angenommen und eine offene Umgebung U von y in X gewählt zusammen mit einer Zerlegung $\mathcal{Z}$ von U, die $\mathcal{S}$ induziert. Sei R das Stück von $\mathcal{Z}$, in dem y liegt. Nach eventueller Verkleinerung von U können wir annehmen, daß $R = U \cap S_x$. Aufgrund der Induktionsannahme gibt es eine abzählbare Familie von Stücken R_j, $j \in \mathbb{N}$ von $\mathcal{Z}$ mit $\bigcup_j R_j = S \cap U$. Da $y \in \overline{S}$ und $\mathcal{Z}$ die condition of frontier erfüllt, folgt $R \subset \overline{\bigcup_j R_j}$, also $S_x \cap U = R \subset \overline{S}$. Damit ist die behauptete Offenheit gezeigt. Für jede Teilmenge $A \subset \mathcal{P}^k$ definieren wir jetzt $S_{k+1,d,A}$ als die Vereinigung aller d-dimensionalen S_x mit $x \in T_{k+1}$, so daß $S_x \subset \overline{S}$ für alle $S \in A$ aber $S_x \cap \overline{S} = \emptyset$ für $S \in \mathcal{P}^k \setminus A$. Sofern $S_{k+1,d,A}$ nichtleer ist, muß $S_{k+1,d,A}$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit sein, und die Familie $\mathcal{P}^{k+1}$ aller nichtleeren $S_{k+1,d,A}$ mit $d \in \mathbb{N}$ und $A \subset \mathcal{P}^k$ stellt eine Partition von T_{k+1} dar. Aufgrund der Definition der $S_{k+1,d,A}$ sieht man sofort, daß die zugehörige Partition $\mathcal{Z}^{k+1}$ die Bedingung (1) erfüllt. Desweiteren gilt auch (2). Seien nämlich U und $\mathcal{Z}$ wie in (2) gegeben, und $R \subset U$ ein Stück von $\mathcal{Z}_{|U}$ der Tiefe $k+1$. Da für alle Stücke S aus $\mathcal{Z}^k$ aufgrund der Induktionsvoraussetzung entweder $R \subset \overline{S}$ oder $R \cap \overline{S} = \emptyset$ gelten muß, liegt R ganz in einem Stück $S_{k+1,\dim R,A}$, das heißt $S_{k+1,d,A} \cap U$ muß die Vereinigung der d-dimensionalen Stücke der Tiefe $k+1$ von $\mathcal{Z}$ sein, die mit $S_{k+1,d,A} \cap U$ nichtleeren Durchschnitt haben. Damit ist der Induktionsschluß vollzogen, und die Behauptung gezeigt. □

1.2.8 Korollar *Zu jedem Stratum S von X existieren nur endlich viele Strata $R > S$.*

BEWEIS: Nach Konstruktion der Strata von X gehört zu S ein eindeutig bestimmtes Stratum $S_{\max}$ der Tiefe 0 mit $S \leq S_{\max}$. Ebenfalls nach obiger Konstruktion liegen in $\overline{S_{\max}}$ nur endlich viele Strata. Andererseits gilt aber für alle $R > S$ die Beziehung $R \leq S_{\max}$, woraus sich die Behauptung ergibt. □

1.2.9 Nachdem jeder stratifizierte Raum $(X, \mathcal{S})$ eine kanonische Zerlegung besitzt, ist das *k-Skelett* X^k als die Vereinigung aller Strata der Dimension $\leq k$ von X wohldefiniert und erbt von X die Struktur eines stratifizierten Raums.

Die Σ-Mannigfaltigkeit T_0 aller Punkte von X der Tiefe 0 bezeichnen wir in diesem Zusammenhang mit X°. Falls X° sogar eine Mannigfaltigkeit ist, so stellt X° ein Stratum dar, das sogenannte *Top-Stratum*. In diesem Fall gilt $X = \overline{X^\circ}$. Man beachte jedoch, daß nicht jeder zusammenhängende stratifizierte Raum ein Top-Stratum besitzen muß.

Für ein Stratum $S \subset X$ nennt man die Vereinigung aller Strata $R \geq S$ oft den *Stern* (oder auch *Étoile*) von S in X, in Zeichen $\mathrm{Et}_X(S)$. Offensichtlich ist der Stern $\mathrm{Et}_X(S)$ wieder ein stratifizierter Raum.

1.2.10 Hat man einen Morphismus $f : X \to Y$ zwischen stratifizierten Räumen $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{R})$ vorgegeben, so überprüft man leicht, daß zu jeder Zusammenhangskomponente S_0 eines Stratums S von X ein Stratum R_{S_0} von Y mit $f(S_0) \subset R_{S_0}$ und $f_{|S_0} \in \mathcal{C}^\infty(S_0)$ existiert. Sind all diese Einschränkungen $f_{|S_0}$ Immersionen (bzw. Submersionen), so nennen wir f eine *stratifizierte Immersion* (bzw. *stratifizierte Submersion*).

1.2.11 Beispiel Zum Schluß dieses Abschnitts möchte ich noch ein Beispiel eines stratifizierten Unterraums angeben, so daß die kanonische Inklusion Strata nicht wieder in Strata abbildet, was natürlich nicht im Widerspruch dazu steht, daß sie Zusammenhangskomponenten von Strata in Strata abbildet. Man betrachte den sich aus der Vereinigung des Würfels $W = [0,1]^3 \times \{(0,0)\}$ und des Quadrats $Q = \{(0,0,0)\} \times [0,1]^2$ im $\mathbb{R}^5$ ergebenden stratifizierten Raum X. Die Menge aller auf den Koordinatenachsen liegenden abgeschlossenen Kanten $K = [0,1] \times \{(0,0,0,0)\} \cup \cdots \cup \{(0,0,0,0)\} \times [0,1]$ ist ein stratifizierter Unterraum von X, und besteht aus einem 0-dimensionalen Stratum und einem 1-dimensionalen Stratum. Beide sind jedoch nicht Teilmenge eines Stratums von X, da die Kanten des Würfels die Tiefe 2 haben, die des Quadrats jedoch die Tiefe 1. In analoger Weise haben die Ecken des Würfels die Tiefe 3, die nicht auf W liegenden Ecken von Q dagegen die Tiefe 2.

1.3 Glatte Strukturen

1.3.1 Sei X ein stratifizierter Raum, und $\mathcal{S}$ die Familie seiner Strata. Eine *singuläre Karte* von X der *Klasse* $\mathcal{C}^m$, $m \in \mathbb{N}^{>0} \cup \{\infty\}$ ist ein Homöomorphismus $x : U \to x(U) \subset \mathbb{R}^n$ von einer offenen Menge $U \subset X$ auf einen lokal abgeschlossenen Unterraum des $\mathbb{R}^n$, so daß für jedes Stratum $S \in \mathcal{S}$ von X das Bild $x(U \cap S)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, und die Einschränkung $x_{|U \cap S} : U \cap S \to x(U \cap S)$ einen Diffeomorphismus der Klasse $\mathcal{C}^m$ darstellt. Die Definitionsmenge U einer singulären Karte nennen wir manchmal einen *Kartenbereich*. Zudem benutzen wir für singuläre Karten oft eine Notation der Form $x : U \to O \subset \mathbb{R}^n$, um auszudrücken, daß $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x(U) \subset O$ abgeschlossen ist. Zwei singuläre Karten $x : U \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{x} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ heißen *kompatibel*, falls es zu jedem $x \in U \cap \tilde{U}$ eine offene Umgebung $U_x \subset U \cap \tilde{U}$ gibt, ein $N \geq \max(n, \tilde{n})$, offene Umgebungen $O \subset \mathbb{R}^N$ und $\tilde{O} \subset \mathbb{R}^N$ von $x(U_x) \times \{0\}$ bzw. $\tilde{x}(U_x) \times \{0\}$, sowie einen Diffeomorphismus $H : O \to \tilde{O}$ der Klasse $\mathcal{C}^m$, so daß $\iota^N_{\tilde{n}} \circ \tilde{x}_{|U_x} = H \circ \iota^N_n \circ x_{|U_x}$. Dabei haben wir mit ι^N_m für $N \geq m$ die kanonische Einbettung des $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^N$ mittels der ersten m Koordinaten bezeichnet. Den Diffeomorphismus H nennen wir eine *Übergangsabbildung* von x nach $\tilde{x}$ über dem Bereich U_x. Um die Notation nicht überwuchern zu lassen, werden wir im folgenden singuläre Karten $x : U \to \mathbb{R}^n$ immer mit ihren *Erweiterungen* $\iota^N_n \circ x : U \to \mathbb{R}^N$, $N \geq n$ identifizieren.

Analog wie in der Differentialgeometrie definiert man den Begriff eines *singulären Atlanten* auf X der *Klasse* $\mathcal{C}^m$ als eine Familie $(x_j)_{j \in J}$ paarweise kompatibler singulärer Karten $x_j : U_j \to \mathbb{R}^{n_j}$ der Klasse $\mathcal{C}^m$ von X, so daß $\bigcup_{j \in J} U_j = X$ erfüllt ist. Oft notieren wir einen solchen singulären Atlas auch in der Form $\mathcal{U} = (U_j, x_j)_{j \in J}$, um die Definitionsbereiche U_j hervorzuheben und auszudrücken, daß die U_j eine Überdeckung von X liefern; wir sagen deshalb manchmal, $\mathcal{U}$ sei eine *Kartenüberdeckung* von X. Zwei Atlanten $\mathcal{U}$ und $\tilde{\mathcal{U}}$ von X heißen *kompatibel*, falls jede singuläre Karte aus $\mathcal{U}$ kompatibel zu allen Karten aus $\tilde{\mathcal{U}}$ ist.

1.3.2 Lemma *Die Kompatibilität singulärer Atlanten von* X *stellt eine Äquivalenzrelation dar.*

Beweis: Offensichtlich ist die Kompatibilität von Atlanten reflexiv und symmetrisch. Es bleibt deshalb nur noch die Transitivität nachzuweisen. Seien also $\mathcal{U}$, $\tilde{\mathcal{U}}$ und $\check{\mathcal{U}}$ drei singuläre Atlanten, von denen jeweils $\mathcal{U}$ und $\tilde{\mathcal{U}}$ sowie $\tilde{\mathcal{U}}$ und $\check{\mathcal{U}}$ als kompatibel angenommen werden. Es ist dann zu zeigen, daß jede Karte $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ aus $\mathcal{U}$ kompatibel zu jeder Karte $\check{\mathsf{x}} : \check{\mathsf{U}} \to \mathbb{R}^{\check{n}}$ aus $\check{\mathcal{U}}$ ist. Zu einem $\mathsf{x} \in \mathsf{U} \cap \check{\mathsf{U}}$ wähle man eine geeignete offene Umgebung $\mathsf{U}_\mathsf{x} \subset \mathsf{U} \cap \check{\mathsf{U}}$ und eine Karte $\tilde{\mathsf{x}} : \mathsf{U}_\mathsf{x} \to \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ aus $\tilde{\mathcal{U}}$. Nach eventueller Verkleinerung von U_x sowie Vergrößerung von $n, \tilde{n}$ und $\check{n}$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n = \tilde{n} = \check{n}$ annehmen und über U_x Übergangsabbildungen $\mathsf{H} : \mathsf{O} \to \tilde{\mathsf{O}} \subset \mathbb{R}^n$ von x nach $\tilde{\mathsf{x}}$ und $\tilde{\mathsf{H}} : \tilde{\mathsf{O}} \to \check{\mathsf{O}} \subset \mathbb{R}^n$ von $\tilde{\mathsf{x}}$ nach $\check{\mathsf{x}}$ finden. Dann ist aber $\check{\mathsf{H}} = \tilde{\mathsf{H}} \circ \mathsf{H} : \mathsf{O} \to \check{\mathsf{O}}$ eine Übergangsabbildung von x nach $\check{\mathsf{x}}$ über dem Bereich U_x, das heißt x und $\check{\mathsf{x}}$ sind kompatibel. Das war zu zeigen. □

Ebenfalls wie im Falle von Mannigfaltigkeiten induziert die Inklusion eine Ordnungsrelation zwischen kompatiblen singulären Atlanten. Faßt man nun alle Karten aus einer Äquivalenzklasse kompatibler Atlanten einer festen Klasse zu einem Atlas zusammen, so erhält man einen maximalen Atlas, der alle anderen Atlanten der Äquivalenzklasse als Teilmenge enthält, insbesondere also die Äquivalenzklasse eindeutig determiniert.

1.3.3 Definition Ein maximaler Atlas singulärer Karten der Klasse $\mathcal{C}^\mathsf{m}$ auf einem stratifizierten Raum X heißt $\mathcal{C}^\mathsf{m}$-*Struktur* auf X, und für den Fall daß $\mathsf{m} = \infty$ *glatte Struktur* auf X.

1.3.4 Bemerkung In der mathematischen Literatur (Schwarz [140], Bierstone [11], Sjamaar–Lerman [144], Huebschmann [87]) findet sich im Zusammenhang mit Orbiträumen schon ein Begriff einer glatten Struktur, der von der Definition her zwar deutlich schwächer ist als der hier vorgestellte (unter einer glatten Struktur wird dort in der Regel nur eine Algebra stetiger Funktionen verstanden, deren Einschränkungen auf die Strata jeweils glatt sind), die in den aufgezählten Arbeiten konstruierten glatten Funktionen liefern jedoch immer auch einen singulären Atlas in dem oben definierten Sinne. Diese Behauptung muß natürlich erst noch bewiesen werden, wofür der Leser auf Abschnitt 4.4 verwiesen sei.

1.3.5 Bemerkung Damit wir später die reichhaltige Theorie der Whitney-Funktionen zur Untersuchung von stratifizierten Räumen sinnvoll anwenden können, haben wir in der Definition einer singulären Karte $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ gefordert, daß $\mathsf{x}(\mathsf{U})$ eine lokal abgeschlossene Menge des $\mathbb{R}^n$ ist. Für die viele Anwendungen, insbesondere aber die Definition glatter Funktionen und die damit zusammenhängenden Begriffe, ist dies nicht unbedingt notwendig. Um gelegentlich eine etwas größere Allgemeinheit zulassen zu können, sprechen wir von einer *schwachen singulären Karte* und entsprechend von einer *schwachen glatten Struktur*, wenn alle Axiome der entsprechenden Objekte bis auf das Axiom der lokalen Abgeschlossenheit im $\mathbb{R}^n$ erfüllt sind.

1.3.6 Mit Hilfe einer glatten Struktur auf X, repräsentiert durch den maximalen Atlanten $\mathcal{U}$, können wir eine Strukturgarbe $\mathcal{C}^\infty_{\mathsf{X}}$, die sogenannte Garbe der *glatten Funktionen* auf X, konstruieren. Sei $\mathsf{U} \subset \mathsf{X}$ offen. Dann definiert man $\mathcal{C}^\infty_{\mathsf{X}}(\mathsf{U})$ als die Menge aller stetigen Funktionen $\mathsf{g} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}$, so daß für alle $\mathsf{x} \in \mathsf{U}$ und singulären Karten $\mathsf{x} : \tilde{\mathsf{U}} \to \mathbb{R}^n$ aus $\mathcal{U}$ mit $\mathsf{x} \in \tilde{\mathsf{U}}$ eine offene Menge $\mathsf{U}_{\mathsf{x}} \subset \mathsf{U} \cap \tilde{\mathsf{U}}$ sowie eine glatte Funktion $\mathsf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert mit $\mathsf{g}_{|\mathsf{U}_{\mathsf{x}}} = \mathsf{g} \circ \mathsf{x}_{|\mathsf{U}_{\mathsf{x}}}$. Man prüft leicht nach, daß die $\mathcal{C}^\infty_{\mathsf{X}}(\mathsf{U})$ die Schnitträume einer Garbe $\mathcal{C}^\infty_{\mathsf{X}}$ darstellen, die wir oft, wenn keine Verwechslungen möglich sind, nur mit $\mathcal{C}^\infty$ bezeichnen. Desweiteren ergibt sich unmittelbar aus der Definition, daß für jede singuläre Karte $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathsf{O} \subset \mathbb{R}^n$ die Algebra $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{U})$ in kanonischer Weise isomorph zu $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{O})/\mathcal{J}$ ist, wobei $\mathcal{J}$ das Ideal $\subset \mathcal{C}^\infty(\mathsf{O})$ der auf $\mathsf{x}(\mathsf{U})$ verschwindenden glatten Funktionen bezeichnet.

Auf einem stratifizierten Raum X der Klasse $\mathcal{C}^{\mathsf{k}}$ kann man in analoger Weise natürlich für jedes $\mathsf{k} \in \mathbb{N}$, $\mathsf{k} \leq \mathsf{m}$ die Garbe $\mathcal{C}^{\mathsf{k}}_{\mathsf{X}}$ der k-*fach stetig differenzierbaren Funktionen* auf X durch Rückzug der entsprechenden Funktionsgarben auf dem $\mathbb{R}^n$ definieren. Offensichtlich gilt dann $\mathcal{C}^0_{\mathsf{X}} = \mathcal{C}_{\mathsf{X}}$. In den meisten Fällen werden wir uns jedoch auf die Betrachtung glatter Strukturen beschränken.

Nun zurück zu stratifizierten Räumen mit glatter Struktur. Jeder Halm $\mathcal{C}^\infty_{\mathsf{x}}$ der Strukturgarbe über einem Punkt $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ besitzt dann ein eindeutig bestimmtes maximales Ideal $\mathfrak{m}_{\mathsf{x}}$, nämlich das Ideal der an x verschwindenden Funktionskeime, mit anderen Worten also die Menge aller Keime $[\mathsf{g}]_{\mathsf{x}} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{x}}$ mit $\mathsf{g}(\mathsf{x}) = 0$. Damit wird das Paar $(\mathsf{X}, \mathcal{C}^\infty)$ zu einem lokal geringten Raum, den wir im folgenden ebenfalls - wenn auch formal nicht ganz korrekt - als stratifizierten Raum mit glatter Struktur bezeichnen.

1.3.7 Seien $(\mathsf{X}, \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{X}})$ und $(\mathsf{Y}, \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{Y}})$ zwei stratifizierte Räume mit glatter Struktur. Eine stetige Abbildung $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ heißt *glatt*, falls $\mathsf{f}_* \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{X}} \subset \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{Y}}$ beziehungsweise mit anderen Worten, falls für alle $\mathsf{g} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{Y}}(\mathsf{V})$, $\mathsf{V} \subset \mathsf{Y}$ offen, die Beziehung $\mathsf{g} \circ \mathsf{f} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{X}}\left(\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{V})\right)$ gültig ist. Analog nennt man f vom *Typ* $\mathcal{C}^{\mathsf{m}}$, $\mathsf{m} \in \mathbb{N}$, falls $\mathsf{f}_* \mathcal{C}^{\mathsf{m}}_{\mathsf{X}} \subset \mathcal{C}^{\mathsf{m}}_{\mathsf{Y}}$. Man beachte dabei jedoch, daß eine glatte Abbildung zwischen stratifizierten Räumen nicht stratifiziert sein muß, und auch eine stratifizierte Abbildung zwischen diesen Räumen nicht notwendigerweise glatt ist.

Aufgrund der Definition folgt sofort, daß die Komposition glatter Funktionen wieder glatt ist. Offensichtlich bilden somit die stratifizierten Räume mit glatter Struktur zusammen mit den glatten Abbildungen als Morphismen eine Kategorie $\mathfrak{Esp}_{\mathfrak{fis}}$.

1.3.8 Proposition *Eine Abbildung* $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ *zwischen stratifizierten Räumen* $(\mathsf{X}, \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{X}})$ *und* $(\mathsf{Y}, \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{Y}})$ *mit glatter Struktur ist genau dann glatt, wenn es für jedes* $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ *sowie Karten* $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathsf{O} \subset \mathbb{R}^n$ *um* x *und* $\mathsf{y} : \tilde{\mathsf{U}} \to \tilde{\mathsf{O}} \subset \mathbb{R}^N$ *um* $\mathsf{f}(\mathsf{x})$ *eine offene Menge* $\mathsf{U}_{\mathsf{x}} \subset \mathsf{U}$ *mit* $\mathsf{f}(\mathsf{U}_{\mathsf{x}}) \subset \tilde{\mathsf{U}}$ *gibt und eine glatte Abbildung* $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, *so daß*

$$\mathsf{x} \circ \mathsf{f}_{|\mathsf{U}_{\mathsf{x}}} = \mathsf{f} \circ \mathsf{y}_{|\mathsf{U}_{\mathsf{x}}}. \tag{1.3.1}$$

Beweis: Da es sich um ein lokales Problem handelt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß $\mathsf{X} \subset \mathsf{O}$ und $\mathsf{Y} \subset \tilde{\mathsf{O}}$ jeweils relativ abgeschlossene Teilmengen sind. Mit $\mathsf{y}^1, \cdots, \mathsf{y}^N$ bezeichnen wir die Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^N$. Falls nun $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ glatt ist, so gibt es Funktionen $\mathsf{f}_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{O})$, $i = 1, \cdots, \mathsf{N}$, so daß $\mathsf{f}_{i|\mathsf{X}} = \mathsf{y}^i \circ \mathsf{f}$. Man wähle nun eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathsf{O}$ und $\varphi_{|\mathsf{O}_{\mathsf{x}}} = 1$ auf einer offenen Umgebung $\mathsf{O}_x \subset \mathsf{O}$ von x. Dann ist $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ mit

$$\mathsf{f}(x) = \begin{cases} \varphi(x)\,(\mathsf{f}_1(x), \cdots, \mathsf{f}_N(x)) & \text{für } x \in \mathsf{O}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die gesuchte glatte Abbildung. Die umgekehrte Implikation ist offensichtlich, also folgt die Behauptung. □

Die eben bewiesene Proposition erlaubt es uns, die Begriffe Immersion und Submersion auch auf glatte Abbildungen $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{M}$ zwischen einem stratifizierten Raum X mit glatter Struktur und einer Mannigfaltigkeit M zu übertragen. Genauer gesagt bezeichnen wir f als *glatte stratifizierte Immersion*, falls eine Überdeckung $(\mathsf{U}_j)_{j\in J}$ von X durch Kartenbereiche $\mathsf{U}_j \overset{\mathsf{x}_j}{\to} \mathsf{O}_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$ existiert sowie eine Familie $(\mathsf{f}_j)_{j\in J}$ von Immersionen $\mathsf{f}_j : \mathsf{O}_j \to \mathsf{M}$, so daß für alle j

$$\mathsf{f}_{|\mathsf{U}_j} = \mathsf{f}_j \circ \mathsf{x}_j.$$

Für den Fall, daß die f_j als Submersionen gewählt werden können, und alle Einschränkungen $\mathsf{f}_{|\mathsf{S}} \to \mathsf{M}$, $\mathsf{S} \in \mathcal{S}$ submersiv sind, nennen wir f eine *glatte stratifizierte Submersion* von X nach M.

1.3.9 Als nächstes ordnen wir jedem Punkt $x \in \mathsf{X}$ seinen Rang $\operatorname{rg} x = \dim(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$ zu. Der Rang ist tatsächlich endlich, denn jede Karte $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ von X um x induziert einen surjektiven Homomorphismus $\mathsf{x}_* : \mathfrak{m}_{\mathsf{x}(x)}/\mathfrak{m}_{\mathsf{x}(x)}^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ zwischen den maximalen Idealen der Halme $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n,\mathsf{x}(x)}$ und $\mathcal{C}^\infty_x$, woraus $\dim(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) \le \dim\left(\mathfrak{m}_{\mathsf{x}(x)}/\mathfrak{m}_{\mathsf{x}(x)}^2\right) = n$ folgt. Der Rang hat die in der folgenden Proposition dargelegte Bedeutung.

1.3.10 Proposition *Zu jedem Punkt x eines stratifizierten Raums $(\mathsf{X}, \mathcal{C}^\infty)$ mit glatter Struktur existiert eine Karte um x der Form $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^{\operatorname{rg} x}$.*

Beweis: Sei $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von X um x mit minimalem $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen schon, daß $\operatorname{rg} x \le n$. Angenommen, es sei $\operatorname{rg} x < n$ der Fall. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir nach eventueller lineare Transformation annehmen, daß $\mathsf{x}(x) = 0$. Wie oben schon erwähnt induziert die Karte x einen surjektiven Homomorphismus $\mathsf{x}_* : \mathfrak{m}_0 \to \mathfrak{m}_x$, insbesondere also auch eine surjektive lineare Abbildung $\overline{\mathsf{x}_*} : \mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Seien nun $\mathsf{y}^1, \cdots, \mathsf{y}^{\operatorname{rg} x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{U}_x)$ derart gewählt, daß $\mathsf{U}_x \subset \mathsf{U}$ offene Umgebung von x ist, und die Elemente $\overline{\mathsf{y}^i} = [\mathsf{y}_j]_x + \mathfrak{m}_x^2$, $i = 1, \cdots, \operatorname{rg} x$ eine Basis von $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ darstellen. Dann wähle man glatte Funktionen $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_{\operatorname{rg} x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{O})$ mit $\mathsf{H}_i \circ \mathsf{x}_{|\mathsf{U}_x} = \mathsf{y}^i$, wobei O eine offene Nullumgebung im $\mathbb{R}^n$ ist, und U_x eventuell verkleinert wurde. Jeder Keim $[\mathsf{f}]_0$ einer Funktion $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{O})$ kann dann in der Form

$$[\mathsf{f}]_0 = \mathsf{c}_0 + \sum_{j=1}^{\operatorname{rg} x} \mathsf{c}_i\,[\mathsf{H}_i]_0 + [\mathsf{h}]_0 \mod \mathfrak{m}_0^2$$

geschrieben werden, wobei die c_i reell sind und die glatte Funktion h im Verschwindungsideal $\mathrm{I} = \left\{\mathsf{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{O}) \middle| \mathsf{g}_{|\mathsf{x}(\mathsf{U})\cap\mathsf{O}} = 0\right\}$ liegt, da $\ker \overline{\mathsf{x}_*} = \mathfrak{m}_0 \cap \mathrm{I} + \mathfrak{m}_0^2$. Wegen $\dim(\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2) = n$ gibt es dann $\mathsf{H}_{\operatorname{rg} x+1}, \cdots, \mathsf{H}_n \in \mathrm{I}$, so daß die Keime $[\mathsf{H}_1]_0, \cdots, [\mathsf{H}_n]_0$ eine Basis in $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$ darstellen. Folglich ist aber die Abbildung $\mathsf{H} = (\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_n) : \mathsf{O} \to \mathbb{R}^n$

nach eventueller weiterer Verkleinerung von O ein Diffeomorphismus auf sein Bild. Wegen $\mathsf{H}_i \circ \mathsf{x}_{|\mathsf{U}_\mathsf{x}} = \mathsf{y}^i$ für $i = 1, \cdots, \mathrm{rg}\ \mathsf{x}$ und $\mathsf{H}_i \circ \mathsf{x}_{|\mathsf{U}_\mathsf{x}} = 0$ für $i = \mathrm{rg}\ \mathsf{x} + 1, \cdots, n$ ist damit $\mathsf{y} = (\mathsf{y}^1, \cdots, \mathsf{y}^{\mathrm{rg}\ \mathsf{x}})$ eine singuläre Karte über U_x und H eine Übergangsabbildung von x nach y. Wegen $\mathrm{rg}\ \mathsf{x} < n$ ergibt sich somit ein Widerspruch zur Minimalität von n, also muß $\mathrm{rg}\ \mathsf{x} = n$ gelten. Das war zu zeigen. □

Die beiden folgenden Korollare ergeben sich unmittelbar aus dem gerade geführten Beweis.

1.3.11 Korollar *Die Funktion* $\mathrm{rg} : \mathsf{X} \to \mathbb{N}$, $\mathsf{x} \mapsto \mathrm{rg}\ \mathsf{x}$ *ist unterhalbstetig, das heißt für jedes* $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ *existiert eine Umgebung* U *mit* $\mathrm{rg}\ \mathsf{y} \leq \mathrm{rg}\ \mathsf{x}$ *für alle* $\mathsf{y} \in \mathsf{U}$.

1.3.12 Korollar *Zu jedem Paar singulärer Karten* $\mathsf{y} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ *und* $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathsf{O} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{rg}\ \mathsf{x}}$ *um* $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ *gibt es nach eventueller Verkleinerung von* U *und* O *eine Einbettung* $\mathsf{H} : \mathsf{O} \to \mathbb{R}^n$, *so daß* $\mathsf{y} = \mathsf{H} \circ \mathsf{x}$.

Aufgrund der Proposition und des letzten Korollars kann man den Rang von x als die kleinste natürliche Zahl n interpretieren, so daß eine Umgebung von x mittels einer singulären Karte in den $\mathbb{R}^n$ eingebettet werden kann.

Die Feinheit der Garbe der glatten Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ überträgt sich mittels singulärer Karten auf jeden stratifizierten Raum mit glatter Struktur, wie der Beweis des folgenden Satzes zeigt.

1.3.13 Satz *Die Strukturgarbe* $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X}}$ *auf einem stratifizierten Raum* X *mit einer* $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}}$*-Struktur ist fein.*

Beweis: Wir führen den Beweis nur für $\mathfrak{m} = \infty$; die anderen Fälle werden genauso nachgewiesen. Es genügt zu zeigen, daß zu jeder lokal endlichen offenen Überdeckung $\mathcal{U} = (\mathsf{U}_j)_{j \in J}$ von X eine subordinierte Teilung der Eins $(\varphi_j)_{j \in J}$ durch glatte Funktionen $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})$ existiert. Nach eventueller Verfeinerung von $\mathcal{U}$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß alle U_j Kartenbereiche von singulären Karten $\mathsf{x}_j : \mathsf{U}_j \to \mathbb{R}^{n_j}$ darstellen. Zudem können wir, da X parakompakt, also insbesondere normal ist, offene Überdeckung $(\mathsf{V}_j)_{j \in J}$ und $(\mathsf{W}_j)_{j \in J}$ von X finden, so daß $\overline{\mathsf{W}_j} \subset \mathsf{V}_j \subset \overline{\mathsf{V}_j} \subset \mathsf{U}_j$ für alle j gilt. Als nächstes wähle man in jedem $\mathbb{R}^{n_j}$ offene Teilmengen $\Omega_j, \mathsf{O}_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$ derart, daß $\overline{\Omega_j} \subset \mathsf{O}_j$ gilt sowie $\mathsf{x}_j(\mathsf{U}_j) \cap \mathsf{O}_j = \mathsf{x}_j(\mathsf{V}_j)$ und $\mathsf{x}_j(\mathsf{U}_j) \cap \Omega_j = \mathsf{x}_j(\mathsf{W}_j)$ für alle j. Dann kann man glatte Funktionen $\phi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n_j})$ finden, so daß $\mathrm{supp}\, \phi_j \subset \mathsf{O}_j$ und $\phi_{j|\Omega_j} = 1$. Die Rückzüge $\phi_j \circ \mathsf{x}_j$ lassen sich nun zu glatten Funktionen $\tilde{\varphi}_j$ auf X fortsetzten, indem man sie außerhalb von U_j als verschwindend annimmt. Wegen der Lokalendlichkeit von $\mathcal{U}$ ergibt sich dann, daß $\varphi_j = \frac{\tilde{\varphi}_j}{\sum_j \tilde{\varphi}_j}$ wohldefiniert und glatt ist, sowie Träger in U_j hat. Zudem gilt $\sum_j \varphi_j = 1$, das heißt $(\varphi_j)_{j \in J}$ ist die gesuchte Teilung der Eins. □

1.3.14 Falls die Situation eintritt, daß X eine globale Karte $\mathsf{x} : \mathsf{X} \to \mathbb{R}^n$ der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ besitzt, so sagen wir X sei *Euklidisch einbettbar*. In den meisten Anwendungen ist der betrachtete stratifizierte Raum Euklidisch einbettbar. Im folgenden geben wir Kriterien an, die die Existenz einer globalen singulären Karte garantieren. Dazu erweist es sich als nützlich, injektiven glatten Funktionen $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{M}$ zwischen einem stratifizierten Raum X mit glatter Struktur und einer Mannigfaltigkeit M, die die Eigenschaft haben, eigentlich zu sein und für die die Rückzugsabbildung

$$\mathsf{f}^* : \mathcal{C}^\infty(\mathsf{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})$$

surjektiv ist, einen eigenen Namen zu geben. Wir nennen solche Abbildungen *eigentliche Einbettungen.*

1.3.15 Proposition *Jede eigentliche Einbettung* $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathbb{R}^n$ *stellt eine globale singuläre Karte von* X *dar.*

BEWEIS: Da f stetig, eigentlich und injektiv ist, stellt f einen Homöomorphismus auf sein Bild dar, und dieses liegt abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Es muß also nur noch die Kompatibilität von f mit allen singulären Karten eines Atlanten von X gezeigt werden. Sei $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathsf{O} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{rg}\,\mathsf{x}}$ eine singuläre Karte um $x \in \mathsf{X}$. Aufgrund der Glattheit von f existiert nach eventueller Verkleinerung von U und O eine glatte Funktion $\mathsf{f} : \mathsf{O} \to \mathbb{R}^n$, so daß $\mathsf{f} \circ \mathsf{x} = \mathsf{f}_{|\mathsf{U}}$. Da $\mathsf{f}^*_x : \mathfrak{m}_{\mathsf{f}(x)}/\mathfrak{m}^2_{\mathsf{f}(x)} \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}^2_x$ aufgrund der Voraussetzungen an f surjektiv ist, und $\mathsf{x}^*_x : \mathfrak{m}_{\mathsf{x}(x)}/\mathfrak{m}^2_{\mathsf{x}(x)} \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}^2_x$ isomorph, muß die Ableitung $D_{\mathsf{x}(x)}\mathsf{f}$ von f an der Stelle $\mathsf{x}(x)$ injektiv sein. Nach eventueller weiterer Verkleinerung von O ist deshalb f eine Immersion, und $\mathsf{f}(\mathsf{O})$ eine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Also existiert nach einer eventuellen letzten Verkleinerung von O ein Diffeomorphismus $\mathsf{H} : \mathsf{O} \times \mathsf{V} \to \tilde{\mathsf{O}} \subset \mathbb{R}^n$ mit offenen Teilmengen $\mathsf{V} \subset \mathbb{R}^{n-\mathrm{rg}\,\mathsf{x}}$ und $\tilde{\mathsf{O}} \subset \mathbb{R}^n$, so daß $\mathsf{H}_{|\mathsf{O}\times\{0\}} = \mathsf{f}$. Folglich ist f mit x kompatibel, was zu zeigen war. □

1.3.16 Proposition *Besitzt der stratifizierte Raum* X *einen abzählbaren Atlas von Karten* $\mathsf{x}_j : \mathsf{U}_j \to \mathbb{R}^{N_j}$, $j \in \mathbb{N}$, *der Klasse* $\mathcal{C}^\infty$ *derart, daß* $N_j \leq N$ *für ein* $N \in \mathbb{N}$ *und alle* $j \in \mathbb{N}$ *gilt, so ist* X *mittels einer eigentlichen singulären Karte in den* $\mathbb{R}^{2N+1}$ *einbettbar. Insbesondere ist jeder kompakte stratifizierte Raum mit glatter Struktur Euklidisch einbettbar.*

BEWEIS: Wir zerlegen den Beweis in zwei Schritte, wobei im ersten angenommen wird, daß X kompakt ist, und im zweiten das Resultat aus dem ersten Schritt dazu benutzt wird, die Behauptung für beliebige X zu zeigen. Der Leser wird dabei bemerken, daß sich die Argumentation eng an den Beweis des Whitneyschen Einbettungssatzes lehnt.

1. SCHRITT: Da X als kompakt angenommen wird, existiert eine endliche Überdeckung $(\mathsf{U}_j)_{j=1}^k$ von X durch Kartenbereiche $\mathsf{U}_j \xrightarrow{\mathsf{x}_j} \mathsf{O}_j \subset \mathbb{R}^{N_j}$. Sei $(\mathsf{V}_j)_{j=1}^k$ eine $(\mathsf{U}_j)_{j=1}^k$ untergeordnete offene Überdeckung mit $\overline{\mathsf{V}_j} \subset \mathsf{U}_j$. Dann existieren erstens glatte Funktionen $\varphi_j : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ mit Träger in U_j, die auf $\overline{\mathsf{V}_j}$ identisch 1 sind. Zweitens seien Abbildungen $\mathsf{y}_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}, \mathbb{R}^{n_j})$ durch $\mathsf{y}_j(x) = \varphi_j(x)\,\mathsf{x}_j(x)$ für $x \in \mathsf{U}_j$ und $= 0$ für $x \notin \mathsf{U}_j$ festgelegt. Aus den gerade eingeführten Funktionen können wir nun eine Abbildung $\mathsf{x} : \mathsf{X} \to \mathbb{R}^n$ mit $n = N_1 + \cdots + N_k + k$ folgendermaßen definieren:

$$\mathsf{x} = \big(\mathsf{y}_1, \cdots, \mathsf{y}_k, \varphi_1, \cdots, \varphi_k\big).$$

Offensichtlich ist x glatt und injektiv. Zudem ist die Abbildung x eigentlich, also muß sie ein Homöomorphismus auf ihr Bild sein. Da für jedes j die Einschränkung von y_j auf V_j eine singuläre Karte von X darstellt, ist $\mathsf{x}^*_x : \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{x}(x)} \to \mathcal{C}^\infty_x$ für alle $x \in \mathsf{X}$ surjektiv. Nach dem Beweis von Proposition 1.3.15 ist dann x eine globale singuläre Karte auf X.

Aufgrund von Korollar 1.3.12 und der Kompaktheit von X existieren Untermannigfaltigkeiten $\mathsf{M}_1, \cdots, \mathsf{M}_l \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension $\leq N$, so daß $\mathsf{X} \subset \mathsf{M}_1 \cup \cdots \cup \mathsf{M}_l$. Nehmen wir nun an, es existiere ein Vektor $\nu \in \mathbb{R}^n$, der für alle Paare $\mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathsf{x}(\mathsf{X})$ nicht parallel zu $\mathsf{y}-\mathsf{z}$ ist, und der zu keiner der Untermannigfaltigkeiten M_j tangential ist. Die Komposition $\overline{\mathsf{x}}$ von x mit der Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf die Hyperebene $\nu^\perp \cong \mathbb{R}^{n-1}$ ist dann injektiv und induziert surjektive Morphismen $\overline{\mathsf{x}}_{\mathsf{x}}^* : \mathcal{C}^\infty_{\overline{\mathsf{x}}(\mathsf{x})} \to \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{x}}$, $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$, stellt also wieder eine globale singuläre Karte von X dar. Können wir nun nachweisen, daß für $n > 2N+1$ ein solcher Vektor ν existiert, so erhalten wir nach endlicher Rekursion eine globale singuläre Karte von X in $\mathbb{R}^{2N+1}$.

Man betrachte die Abbildungen $\sigma_j : \mathsf{TM}_j \setminus \mathsf{M}_j \to \mathbb{RP}^{n-1}$, $j = 1, \cdots, l$ die dadurch entstehen, daß man einem nichtverschwindenden Tangentialvektor von M_j seine Äquivalenzklasse im projektiven Raum $\mathbb{RP}^{n-1}$ zuordnet. Mit der Bezeichnung Δ für die Diagonale in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ betrachte man desweiteren die Abbildungen $\tau_{ij} : (\mathsf{M}_i \times \mathsf{M}_j) \setminus \Delta \to \mathbb{P}^{n-1}$, $i, j = 1, \cdots, l$, die jedem Paar (y, z) mit $\mathsf{y} \neq \mathsf{z}$ die Äquivalenzklasse von $\mathsf{y} - \mathsf{z}$ zuordnen. Sowohl die σ_j als auch die τ_{ij} sind glatt, und auf Mannigfaltigkeiten der Dimension $\leq 2N$ definiert. Solange $2N < n-1$ gilt, sind deshalb nach dem Satz von Sard die Bilder der σ_j und τ_{ij} von erster Kategorie in $\mathbb{RP}^{n-1}$, also auch ihre Vereinigung. Folglich ist das Komplement nicht leer, und es existiert ein Vektor $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit den gewünschten Eigenschaften. Damit ist die Behauptung unter der Voraussetzung gezeigt, daß X kompakt ist.

2. Schritt: Nun lassen wir die Voraussetzung fallen, daß X kompakt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß alle Kartenbereiche U_j kompakten Abschluß besitzen. Wir wählen eine lokalendliche, $(\mathsf{U}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ untergeordnete glatte Teilung der Eins $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von X, und setzen $\lambda(\mathsf{x}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} j\,\varphi_j(\mathsf{x})$. Dann ist $\lambda : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ glatt und eigentlich. Sei $\mathsf{V}_j = \lambda^{-1}\big(]j-1/4, j+5/4[\big)$ und $\mathsf{K}_j = \lambda^{-1}\big([j-1/3, j+4/3]\big)$. Dann ist V_j offen, K_j kompakt und $\overline{\mathsf{U}_j} \subset \mathsf{K}_j^\circ$. Zudem sind alle K_{2j} paarweise disjunkt, ebenso alle K_{2j+1}. Nach dem 1. Schritt können wir glatte Funktionen $\mathsf{g}_j : \mathsf{X} \to \mathbb{R}^{2N+1}$ mit beschränktem Bild derart wählen, daß die Einschränkungen der g_j auf $\overline{\mathsf{V}_j}$ singuläre Karten sind, und $\operatorname{supp} \mathsf{g}_j \subset \mathsf{K}_j^\circ$ gilt. Wir definieren nun $\mathsf{x}_\mathrm{e} := \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathsf{g}_{2j}$, $\mathsf{x}_\mathrm{o} := \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathsf{g}_{2j+1}$ und setzen $\mathsf{x} := (\mathsf{x}_\mathrm{e}, \mathsf{x}_\mathrm{o}, \lambda) : \mathbb{R}^{2N+1} \times \mathbb{R}^{2N+1} \times \mathbb{R}$. Dann ist x erst einmal glatt, eigentlich und injektiv. Aufgrund der Tatsache, daß die g_j auf $\overline{\mathsf{V}_j}$ singuläre Karten darstellen, und aufgrund der Definition von x müssen alle induzierten Abbildungen $\mathsf{x}_\mathsf{x}^* : \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{x}(\mathsf{x})} \to \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{x}(\mathsf{x})}$, $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ surjektiv sein, also ist nach dem Beweis von Proposition 1.3.15 x eine singuläre Karte von X. Analog den Überlegungen im 1. Schritt kann mit Hilfe des Satzes von Sard eine $(2N+1)$-dimensionale Hyperebene $\mathsf{H} \subset \mathbb{R}^{4N+3}$ derart gefunden werden, daß die Komposition von x mit der Orthogonalprojektion π_H auf H wieder eine eigentliche singuläre Karte von X darstellt. Um die Eigentlichkeit von $\pi_\mathsf{H} \circ \mathsf{x}$ zu garantieren, muß H dabei so gewählt werden, daß der von der letzten Koordinate in $\mathbb{R}^{4N+3}$ erzeugte Unterraum $\mathbb{R}_{4N+3}$ nicht im Kern von π_H liegt. Dies ist tatsächlich möglich, da $\mathbb{R}_{4N+3}$ von erster Kategorie in $\mathbb{R}^{4N+3}$ ist. Somit erhalten wir schließlich wie behauptet eine globale singuläre und eigentliche Karte von X in einen $(2N+1)$-dimensionalen Vektorraum. □

Für den Fall, daß X nicht Euklidisch einbettbar ist, hat man spezielle Atlanten zur Hand, die in vielen Fällen fast das Gleiche leisten wie eine globale Karte. Bevor wir dies erläutern, sei kurz an den Begriff einer *kompakte Ausschöpfung* von X erinnert: das ist eine Familie $(\mathsf{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von X, so daß $\mathsf{K}_j \subset \mathsf{K}_{j+1}^\circ$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathsf{K}_j = \mathsf{X}$. Eine solche kompakte Ausschöpfung von X existiert, da X lokalkompakt Hausdorffsch mit abzählbarer Topologie ist. Wählt man sich nun eine kompakte Ausschöpfung $(\mathsf{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von X, so heißt ein singulärer Atlas $(\mathsf{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von X bestehend aus Karten der Form $\mathsf{x}_j : \mathsf{K}_{j+1}^\circ \to \mathsf{O}_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$ *induktiv einbettend* bezüglich $(\mathsf{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$, falls $n_{j+1} \geq n_j$ für alle j gilt, und relativ kompakte offene Umgebungen $\mathsf{U}_j \subset\subset \mathsf{K}_{j+1}^\circ$ von K_j existieren, so daß $\mathsf{x}_{j+1}(\mathsf{x}) = \iota_{n_j}^{n_{j+1}} \circ \mathsf{x}_j(\mathsf{x})$ für alle $\mathsf{x} \in \mathsf{U}_j$ ist.

1.3.17 Lemma *Zu jeder kompakten Ausschöpfung existiert ein induktiv einbettender Atlas.*

Beweis: Da alle K_j kompakt sind, existiert nach Proposition 1.3.16 ein Atlas von Karten $\mathsf{y}_j : \mathsf{K}_{j+2}^\circ \to \mathbb{R}^{m_j}$. Seien nun V_j, W_j und U_j relativ kompakte offene Umgebungen von K_{j-1} in K_{j+1}° mit

$$\mathsf{K}_{j-1} \subset \mathsf{U}_{j-1} \subset\subset V_j \subset\subset W_j \subset\subset \mathsf{K}_j^\circ \subset\subset \mathsf{U}_j \subset\subset \mathsf{K}_{j+1}^\circ.$$

Dann existieren glatte Funktionen $\varphi_j : \mathsf{X} \to [0,1]$ und $\psi_j : \mathsf{X} \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subset\subset \mathsf{K}_j^\circ$, $\varphi_{j|W_j} = 1$, $\operatorname{supp} \psi_j \subset \mathsf{K}_{j+1}^\circ \setminus \overline{\mathsf{U}_{j-1}}$ sowie $\psi_{j|\mathsf{X}\setminus\overline{V_j}} = 1$. Man definiere $\mathsf{x}_0 : \mathsf{K}_1^\circ \to \mathbb{R}^{n_0}$ durch $\mathsf{x}_0 = \mathsf{y}_0$. Sind für ein j schon alle x_i mit $i < j$ bestimmt, so lege man $\mathsf{x}_j : \mathsf{K}_{j+1}^\circ \to \mathbb{R}^{n_j} := \mathbb{R}^{m_j} \times \mathbb{R}^{n_{j-1}} \times \mathbb{R}^2$ rekursiv durch

$$\mathsf{x}_j(\mathsf{x}) = \begin{cases} \big(\varphi_j(\mathsf{x})\,\mathsf{x}_{j-1}(\mathsf{x}),\ \psi_j(\mathsf{x})\,\mathsf{y}_j(\mathsf{x}),\ 1-\varphi_j(\mathsf{x}),\ \psi_j(\mathsf{x})\big) & \text{für } \mathsf{x} \in \mathsf{K}_j^\circ, \\ \big(0,\ \mathsf{y}_j(\mathsf{x}),\ 1-\varphi_j(\mathsf{x}),\ \psi_j(\mathsf{x})\big), & \text{für } \mathsf{x} \in \mathsf{K}_{j+1}^\circ \setminus \mathsf{K}_j^\circ, \end{cases}$$

fest. Aufgrund der Definition von x_j ist die Beziehung $\mathsf{x}_{j+1|\mathsf{U}_j} = \iota_{n_j}^{n_{j+1}} \circ \mathsf{x}_{j|\mathsf{U}_j}$ erfüllt. Zudem sieht man leicht, daß x_j injektiv ist, einen Homöomorphismus auf sein Bild darstellt, und mit den singulären Karten x_{j-1} und y_j kompatibel ist. Induktiv erhält man so einen Atlas mit den gewünschten Eigenschaften. □

1.3.18 Beispiel Mannigfaltigkeiten-mit-Ecken haben mittels ihrer Eckdaten eine glatte Struktur, und sind per Definition Euklidisch einbettbar. Insbesondere sind Mannigfaltigkeiten-mit-Rand mit einer kanonischen glatten Struktur versehen, deren glatte Funktionen genau die glatten Funktionen im üblichen Sinne sind.

1.3.19 Beispiel Die Beispiele 1.1.12 bis 1.1.17 erben als Unterräume des Euklidischen Raums ebenfalls eine kanonische glatte Struktur.

1.3.20 Beispiel Jede Triangulierung eines Polyeders liefert eine glatte Struktur. Man beachte dabei jedoch, daß die durch zwei verschiedene Triangulierungen definierten glatten Strukturen nicht unbedingt miteinander kompatibel sein müssen.

1.3.21 Beispiel Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bekanntlich keine glatte Funktion, wenn man $\mathbb{R}$ mit der üblichen differenzierbare Struktur versieht. Man kann jedoch $\mathbb{R}$ auch als stratifizierten Raum mit der Zerlegung $\mathcal{R}$ in $\mathsf{R}_0 = \{0\}$ und $\mathsf{R}_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auffassen, und durch $\mathsf{x} \mapsto (\mathsf{x}, |\mathsf{x}|)$ in den $\mathbb{R}^2$ einbetten. Der mit der Stratifizierung $\mathcal{R}$ versehene Raum $\mathbb{R}$ erbt dann von $\mathbb{R}^2$ eine glatte Struktur, bezüglich der die Betragsfunktion glatt ist. $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ ist übrigens in kanonischer Weise diffeomorph zur Kante X_{Edge}.

1.3.22 Beispiel Der Kegelkamm besitzt zwar eine natürliche glatte Struktur, ist aber als unendlichdimensionaler stratifizierter Raum nicht Euklidisch einbettbar. Aus dem Kegelkamm kann man sich sogar ein Beispiel für einen stratifizierten Raum mit glatter Struktur basteln, der nur aus zwei Strata besteht, damit endlichdimensional ist, aber trotzdem nicht Euklidisch einbettbar. Der Leser lasse uns dies etwas genauer erläutern.

Nach Definition entsteht $\mathsf{X}_{\mathrm{Cmb}}$ durch geeignetes Ankleben der Kegel CS^n an die Halbgerade $\mathbb{R}^{\geq 0}$. Setzt man $\mathsf{U}_n := \mathsf{CS}^n \cup]n-1/2, n+1/2[$, und beachtet, daß

$$\mathsf{CS}^n = \left\{(\mathsf{t}\mathsf{y}, \mathsf{t}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \mathsf{y} \in \mathsf{S}^n\right\}$$

als stratifizierter Unterraum des $\mathbb{R}^{n+2}$ aufgefaßt werden kann, so stellt

$$\mathsf{x}_n : \mathsf{U}_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+3} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+2}, \quad \mathsf{x} \mapsto \begin{cases} (\mathsf{x}, 0) & \text{falls } \mathsf{x} \in]n-1/2, n+1/2[, \\ (n, \mathsf{x}) & \text{falls } \mathsf{x} \in \mathsf{CS}^n \setminus \{\mathsf{o}_n\}, \end{cases}$$

eine singuläre Karte von $\mathsf{X}_{\mathrm{Cmb}}$ dar, und die Familie $(\mathsf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen singulären Atlanten. Andererseits ist für jedes n die Menge (wobei "F" für frame steht)

$$\mathsf{CS}^n_{\mathrm{F}} := \left\{(\mathsf{t}\mathsf{y}, \mathsf{t}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times [0,1[\,\middle|\, \mathsf{y} \in \{\mathsf{e}_1, \cdots, \mathsf{e}_{n+1}\}\right\}$$

in natürlicher Weise ein stratifizierter Unterraum von CS^n der Dimension 1. Damit wird

$$\mathsf{X}_{\mathrm{FCmb}} := \left\{\mathsf{x} \in \mathsf{X}_{\mathrm{Cmb}} \,\middle|\, \mathsf{x} \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathsf{x} \in \mathsf{CS}^n_{\mathrm{F}} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\right\}$$

zu einem stratifizierten Unterraum von $\mathsf{X}_{\mathrm{Cmb}}$ der Dimension 1, besitzt nur zwei Strata, und erbt von $\mathsf{X}_{\mathrm{Cmb}}$ eine glatte Struktur. Offensichtlich ist $\mathsf{X}_{\mathrm{FCmb}}$ versehen mit dieser glatten Struktur nicht Euklidisch einbettbar.

1.4 Lokale Trivialität und Whitney-Bedingungen

Einige der in Abschnitt 1.1 vorgestellten zerlegten Räume haben unnatürlich erscheinende Eigenschaften, wie zum Beispiel der Raum Y aus 1.1.12, der $\dim \mathsf{S}_1 > \dim \mathsf{S}_2$ erfüllt, obwohl S_1 ein Randstück von S_2 ist. Solche und andere "pathologische" stratifizierte Räume möchte man für weitere Betrachtungen nicht zulassen, weshalb man im Laufe der Entstehung der Stratifikationstheorie nach Kriterien gesucht hat, die derartige Räume ausschließen. Üblicherweise werden bei den aus der mathematischen Literatur bekannten Stratifizierungsbedingungen Einschränkungen an das Verhaltens eines Stratums in der Nähe eines Randstratums gestellt. Dadurch soll garantiert werden, daß die dann zugelassenen stratifizierten Räume Eigenschaften haben, die weitergehende topologische, geometrische oder analytische Untersuchungen ermöglichen.

Als erstes wird in diesem Abschnitt die topologische lokale Trivialität eines stratifizierten Raums eingeführt. Wie schon in der Einleitung kurz erläutert besagt diese Bedingung, daß ein lokal trivialer stratifizierter Raum lokal um jeden seiner Punkte isomorph zu einem trivialen Faserbündel über dem Stratum ist, in dem der Punkt liegt. Oft wird dabei zusätzlich angenommen, daß die typische Faser durch einen Kegel über einem kompakten stratifizierten Raum gegeben ist, wobei hier die Literatur uneinheitlich ist. Da Kegel ja bekanntlich wichtige nichttriviale und doch verhältnismäßig gut zu studierende Beispiele stratifizierter Räume sind, haben wir lokal trivialen Räumen, deren Fasern durch Kegel gegeben sind, den Namen “Kegelräume” gegeben. In Abschnitt 3.10 werden sie ausführlicher behandelt. In gewissem Sinne kann man die topologische lokale Trivialität als eine Minimalvoraussetzung an einen vernünftigen stratifizierten Raum ansehen, weshalb sie auch von manchen Autoren in der Definition eines stratifizierten Raumes gefordert wird (siehe z.B. [58, 144]).

Für stratifizierte Räume, die (lokal) als Unterräume von Mannigfaltigkeiten gegeben sind, führen wir anschließend in 1.4.3 die berühmten Whitney-Bedingungen (A) und (B) ein. Im wesentlichen werden dabei Forderungen an die Limes-Tangentialräume von einem höheren Stratum bei Annäherung an ein Randstratum gestellt. Die Whitney-Bedingungen haben weitreichende Implikationen, insbesondere garantiert die Bedingung (B), daß der betrachtete stratifizierte Raum topologisch lokal trivial ist (siehe Korollar 3.9.3). Die entsprechenden Beweise sind teilweise sehr aufwendig, und haben zu der in Kapitel 3 erklärten Kontrolltheorie von J. Mather geführt.

In der historischen Entwicklung der Stratifikationstheorie sind noch sehr viel mehr Bedingungen an “gute” stratifizierte Räume eingeführt worden. Ziel ist es dabei, möglichst einfach nachzuprüfende Kriterien zu formulieren, die dann schwieriger nachzuweisende aber wesentliche Eigenschaften wie zum Beispiel lokale Trivialität, eine besondere metrische Struktur oder auch geometrische Merkmale nach sich ziehen. Am Ende dieses Abschnitts sollen einige davon vorgestellt und ihre Bedeutung erläutert werden.

1.4.1 Topologische lokale Trivialität Ein stratifizierter Raum X heißt *topologisch lokal trivial* oder auch nur kurz *lokal trivial*, falls es für jedes $x \in X$ eine Umgebung U gibt, einen stratifizierten Raum F mit Stratifizierung $\mathcal{S}^F$, einen ausgezeichneten Punkt $o \in F$ und einen Isomorphismus stratifizierter Räume

$$h : U \to (S \cap U) \times F,$$

so daß $h^{-1}(y, o) = y$ für alle $y \in S \cap U$ gilt und so daß $\mathcal{S}^F_o$ der Keim der Menge $\{o\}$ ist. Dabei ist S das Stratum von X, in dem x liegt. Gelegentlich nennt man F auch die *typische Faser* über x.

In vielen Fällen ist F durch einen Kegel $F = CL$ über einem kompakten stratifizierten Raum L gegeben. L heißt dann der *Link* von x, und man sagt, X sei *lokal trivial* mit *Kegeln als typischer Faser*. Ist auch L wieder lokal trivial mit Kegeln als typische Fasern, und gilt das wiederum auch für die Links der Punkte der Links und so weiter, so erhalten wir eine Klasse stratifizierter Räume, die wir als *Kegelräume* der *Klasse* $\mathcal{C}^0$ bezeichnen. Für eine präzise rekursive Definition des Begriffs Kegelraum sowie einige Ausführungen dazu sei der Leser nochmals auf Abschnitt 3.10 verwiesen.

1.4.2 Beispiel Man erkennt relativ einfach, daß Mannigfaltigkeiten mit Rand oder mit Ecken lokal trivial sind, insbesondere also auch Simplizes und Polytope. Viel schwerer ist dagegen einzusehen, daß alle (reell oder komplex) algebraischer Varietäten topologisch lokal triviale Stratifizierungen besitzen, allgemeiner sogar alle semialgebraischen, semianalytischen und subanalytischen Mengen. Dies folgt jedoch aus der Tatsache, daß all diese Räume eine im wesentlichen eindeutige Whitney-Stratifizierung besitzen (siehe Beispiel 1.4.10 für Referenzen) und Whitney-Stratifizierungen nach Thom [149] und Mather [113] lokal trivial sind. Im weiteren Verlauf dieser Monographie wird neben dem

Nachweis der lokalen Trivialität von Whitney-Stratifizierungen in Korollar 3.9.3 auch für Orbiträume 4.4.6 explizit gezeigt, daß sie lokal trivial sind.

Aus der lokalen Trivialität folgt noch nicht unmittelbar, daß auch die Fasern oder Links lokal trivial sind. Falls die verschiedenen Trivialisierungen jedoch miteinander kompatibel sind, so kann man zeigen, daß auch für die Fasern bzw. Links die lokale Trivialität gilt. Die richtige Axiomatik hierfür, eine geeignete Definition von Kompatibilität und die entsprechenden Implikationen findet man wieder in der Kontrolltheorie von Mather (siehe Kap. 3).

1.4.3 Die Whitney-Bedingungen Es werden eine Mannigfaltigkeit M benötigt, sowie Untermannigfaltigkeiten R und S. Man sagt dann, das Paar (R, S) genüge der *Whitney-Bedingung* (A) an der *Stelle* $x \in \mathsf{R}$, oder auch (R, S) sei (A)-*regulär* an x, falls das folgende Axiom erfüllt ist:

(A) Ist $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen x konvergenten Folge von Punkten $y_k \in \mathsf{S}$ derart, daß die Folge der Tangentialräume $\mathsf{T}_{y_k}\mathsf{S}$ im Graßmannbündel der $\dim \mathsf{S}$-dimensionalen Unterräume von TM gegen $\tau \subset \mathsf{T}_x\mathsf{M}$ konvergiert, so gilt $\mathsf{T}_x\mathsf{R} \subset \tau$.

Ist $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Karte von M um $x \in \mathsf{R}$, so daß das nachstehende Axiom (B) erfüllt ist, so sagt man, (R, S) genüge an der *Stelle* x der *Whitney-Bedingung* (B) bezüglich der Karte x.

(B) Seien $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen von Punkten $x_k \in \mathsf{R} \cap \mathsf{U}$, $y_k \in \mathsf{S} \cap \mathsf{U}$, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

(B1) $x_k \neq y_k$ und $\lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} y_k = x$.

(B2) Die Folge der Verbindungsgeraden $\overline{\mathsf{x}(x_k)\,\mathsf{x}(y_k)} \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert im projektiven Raum gegen eine Gerade ℓ.

(B3) Die Folge der Tangentialräume $\mathsf{T}_{y_k}\mathsf{S}$ konvergiert in der Graßmannschen gegen einen Unterraum $\tau \subset \mathsf{T}_x\mathsf{M}$.

Dann gilt $(\mathsf{T}_x\mathsf{x})^{-1}(\ell) \subset \tau$.

Es ergibt sich nun die Frage, wie sich die Whitney-Bedingung (B) unter Kartenwechseln transformiert.

1.4.4 Lemma *Erfüllt* (R, S) *an der Stelle* $x \in \mathsf{R}$ *die Whitney-Bedingung* (B) *bezüglich* $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$, *und ist* $\mathsf{y} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ *eine weitere glatte Karte von* M *um* x, *so ist* (B) *auch bezüglich* y *erfüllt.*

Beweis: Seien $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zwei gegen x konvergente Folgen von Punkten $x_k \in \mathsf{R} \cap \mathsf{U}$, $y_k \in \mathsf{S} \cap \mathsf{U}$, so daß die Folge der Sekanten $\ell_k = \overline{\mathsf{y}(x_k)\,\mathsf{y}(y_k)}$ gegen die Gerade ℓ konvergiert, und die Bedingung (B3) erfüllt ist. Sei weiter $\mathsf{H} : \mathsf{O} \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung derart, daß (nach eventueller Verkleinerung von U) die konvexe Hülle K der Menge $\mathsf{x}(\mathsf{U})$ kompakt in O enthalten ist und $\mathsf{H} \circ \mathsf{y} = \mathsf{x}$ gilt. Nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolgen können wir annehmen, daß die Folge der Einheitsvektoren $v_k := \frac{\mathsf{y}(y_k) - \mathsf{y}(x_k)}{\|\mathsf{y}(y_k) - \mathsf{y}(x_k)\|}$ gegen einen Einheitsvektor $v_\infty \in \ell$ konvergiert. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definieren wir nun Wege

$\gamma_k :]-1,1[\to \mathbb{R}^n$ durch $t \mapsto y(x_k) + t v_k$, wobei noch $x_\infty := x$ gesetzt wird. Wir betrachten die mittels H transformierten Wege $\eta_k = H \circ \gamma_k :]-1,1[\to \mathbb{R}^n$. Es gilt dann für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{t} \left\| \eta_k(t) - x(x_k) - t \frac{x(y_k) - x(x_k)}{\|x(y_k) - x(x_k)\|} \right\| \leq 2t \sup_{z \in K} \|D_z^2 H\|, \tag{1.4.1}$$

wobei zu bemerken ist, daß $C := \sup_{z \in K} \|D_z^2 H\| < \infty$ und von k unabhängig ist. Nach eventueller Auswahl einer weiteren Teilfolge können wir annehmen, daß $\frac{x(y_k)-x(x_k)}{\|x(y_k)-x(x_k)\|}$ für $k \to \infty$ gegen einen nicht verschwindenden Vektor w_∞ strebt. Aus (1.4.1) folgt dann

$$w_\infty = \dot{\eta}_\infty(0) = TH(\dot{\gamma}_\infty(0)) = TH(v_\infty).$$

Andererseits gilt nach Voraussetzung über x die Beziehung $(T_{x(x)}x)^{-1}(w) \in \tau$, so daß sich insgesamt

$$(T_{y(x)}y)^{-1}(v_\infty) = (T_{x(x)}x)^{-1}(w_\infty) \in \tau$$

ergibt. Das war zu zeigen. □

Aufgrund des eben bewiesenen Lemmas ist das Erfülltsein der Whitney-Bedingung (B) unabhängig von der gewählten Karte, insofern ist klar, was unter der Aussage "(R, S) erfüllt die Whitney-Bedingung (B) an der Stelle x" oder äquivalent dazu unter "(R, S) ist (B)-regulär an x" zu verstehen ist.

1.4.5 Lemma *Ist das Paar* (R, S) *an der Stelle* $x \in R$ (B)*-regulär, so genügt* (R, S) *an der Stelle* x *auch der Whitney-Bedingung* (A).

Beweis: Da es sich um eine lokale Aussage handelt, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß R und S Untermannigfaltigkeiten des Euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ seien.

Sei $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen x strebende Folge von Punkten aus S, so daß die Folge der Tangentialräume $T_{y_k}S$ gegen $\tau \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert. Sei weiter $v \in T_x R$ ein nichtverschwindender Tangentialvektor und $\gamma(t)$, $t \in [-1,1]$ ein glatter Weg mit $\dot{\gamma}(0) = v$. Sei $t_k = \|y_k - x\|$ und $w_k = \frac{y_k - x}{t_k}$. Dann konvergiert $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen 0, und, nach eventueller Auswahl einer Teilfolge, $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen ein $w \in \mathbb{R}^n$. Andererseits strebt wegen der Voraussetzung an γ die Folge der $v_k := \frac{\gamma(t_k) - x}{t_k}$ gegen v. Folglich konvergiert auch die Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $z_k = w_k - v_k = \frac{y_k - \gamma(t_k)}{t_k}$ gegen ein $z \in \mathbb{R}^n$. Aufgrund von Whitney (B) liegen w und z in τ, folglich auch $v = w - z$. Das war zu zeigen. □

Wir vereinbaren die folgenden weiteren Sprechweisen. Falls die Bedingung (A) bzw. (B) an jedem Punkt $x \in R$ erfüllt ist, so sagen wir, das Paar (R, S) genüge der *Whitney-Bedingung* (A) bzw. (B), oder auch S sei (A) bzw. (B)-regulär über R.

Ein stratifizierten Raum mit glatter Struktur derart, daß für jedes Paar (R, S) von Strata die Whitney-Bedingung (A) erfüllt ist, heißt *Whitney* (A)*-Raum* oder auch (A)*-stratifizierter Raum*. Als *Whitney-Raum* oder (B)*-stratifizierten Raum* bezeichnen wir einen stratifizierten Raum mit glatter Struktur, der für jedes Paar (R, S) von Strata der Whitney-Bedingung (B) genügt.

1.4.6 Bemerkung Falls $m \in \mathbb{N}^{>0}$, so kann man natürlich auch für $\mathcal{C}^m$-Mannigfaltigkeiten M, R, S die Whitney-Bedingungen (A) und (B) formulieren. Nur für den in Lemma

1.4.4 angegebenen Beweis zur Invarianz der Whitney-Bedingung (B) gegenüber Kartenwechseln muß $m \geq 2$ vorausgesetzt werden. Nichtsdestotrotz ist die Bedingung (B) eine $\mathcal{C}^1$-Invariante. Ein Beweis dieser Tatsache findet man in TROTMAN [152] (siehe auch 3.4.2).

1.4.7 Beispiel Aus dem Whitney-Regenschirm X_{WUmb} kann man sich einen stratifizierten Raum basteln, der nicht (A)-regulär ist. Anschaulich klappt man dazu ein Blatt des Regenschirms nach unten und erhält damit in mathematisch präziseren Termen erst einmal den folgenden topologischen Raum:

$$X = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^6 \,\middle|\, x^2 = y^2\,|z| \;\&\; \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(yz)\right\}.$$

Als Stratifizierung von X wähle man die durch $S_0 = \{z\text{-Achse}\}$ und $S_1 = X \setminus S_0$ erzeugte. Im Ursprung ist dann das Paar (S_0, S_1) nicht (A)-regulär. Betrachtet man nämlich den Limes τ der Tangentialräume $T_{x_k}S_1$ mit $x_k = (0, 1/k, 0)$ so ist einerseits τ durch die xy-Ebene gegeben, andererseits liegt aber die z-Achse als Tangentialraum von S_0 im Ursprung nicht in der xy-Ebene.

Im allgemeinen ist es recht schwer, Beispiele nicht (A)-regulärer Stratifizierungen zu finden, insbesondere vor allem von nicht (A)-regulären stratifizierten Varietäten. Eine Quelle solcher Beispiele liefern die Trotmanschen Varietäten [153, 8].

1.4.8 Beispiel Die schnelle Spirale X_{Spirr} aus Beispiel 1.1.13 ist ein Whitney-stratifizierter Raum, die langsame Spirale X_{Spir} dagegen nicht. Dies sieht man folgendermaßen. Das Top-Stratum der schnellen Spirale wird durch $\gamma(\theta) = e^{-\theta^2}(\sin\theta, \cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^{>0}$ parametrisiert, das der langsamen durch $\eta(\theta) = e^{-\theta}(\sin\theta, \cos\theta)$. Es gilt nun

$$\dot\gamma(\theta) = e^{-\theta^2}\big((\cos\theta, -\sin\theta) - 2\theta(\sin\theta, \cos\theta)\big).$$

Außerdem stellt $\frac{\dot\gamma(\theta)}{\|\dot\gamma(\theta)\|}$ einen Einheitstangentialvektor am Fußpunkt $\gamma(\theta)$ dar, und $(\sin\theta, \cos\theta)$ spannt die den Ursprung und $\gamma(\theta)$ verbindende Sekante auf. Da

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(\frac{\dot\gamma(\theta)}{\|\dot\gamma(\theta)\|} + (\sin\theta, \cos\theta)\right) = 0,$$

genügt X_{Spirr} der Whitney-Bedingung (B). Betrachten wir nun die langsame Spirale und rechnen nach:

$$\dot\eta(\theta) = e^{-\theta}\big((\cos\theta, -\sin\theta) - (\sin\theta, \cos\theta)\big).$$

Für $\theta_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ impliziert dies $\frac{\dot\eta(\theta_k)}{\|\dot\eta(\theta_k)\|} = (0, -1)$ und $\eta(\theta_k) = \frac{1}{2}e^{-\theta_k}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Nun strebt die Folge der Punkte $\eta(\theta_k)$ gegen den Ursprung, die Folge der Tangentialräume gegen den von $(0, 1)$ aufgespannten Unterraum, und die Folge der Sekanten $\overline{\eta(\theta_k)0}$ gegen die von $(1, 1)$ erzeugte Gerade. Also kann X_{Spir} die Whitney-Bedingung (B) nicht erfüllen. Zudem ergibt sich aus diesem Argument, daß auch keine weitere feinere Zerlegung der langsamen Spirale existiert, die X_{Spir} zu einem Whitney-stratifizierten Raum macht.

1.4.9 Beispiel Von den beiden in Beispiel 1.1.17 angegebenen Zerlegungen der Whitney-Spitze X_{WCsp} induziert die Zerlegung in $R_0 = \{0\}$, $R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y = 0,\ z \neq 0\}$ und $R_2 = X_{\mathrm{WCsp}} \setminus (R_0 \cup R_1)$ eine Whitney-Stratifizierung, wie man leicht sieht. Für die

Zerlegung von X_{WCsp} in die z-Achse S_1 und ihr Komplement S_2 ist das nicht der Fall. Zwar wird die Whitney Bedingung (A) auch von der Zerlegung (S_1, S_2) erfüllt, jedoch ist Whitney (B) verletzt. Dies wollen wir genauer darlegen. Man betrachte die gegen den Ursprung strebende Folge der Punkte $w_k = (1/k^2, 0, 1/k) \in X_{\mathrm{WCsp}}$. Da mit (x, y, z) auch $(x, -y, z)$ in X_{WCsp} liegt, wird der Tangentialraum von S_2 am Fußpunkt w_k durch die Vektoren $(0, 1, 0)$ und $(2/k, 0, 1)$ aufgespannt. Für $k \to \infty$ strebt die Folge der Tangentialräume gegen die von den Vektoren $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ aufgespannte Hyperebene τ. Andererseits streben die verbindenden Sekanten $\overline{w_k w_k'}$ mit $w_k' = (0, 0, 1/k) \in X_{\mathrm{WCsp}}$ gegen die von $(1, 0, 0)$ aufgespannte Gerade ℓ. Da offensichtlich ℓ nicht in τ liegt, gilt, wie behauptet, Whitney (B) nicht für die Zerlegung (S_1, S_2).

1.4.10 Beispiel Im Laufe der Entwicklung der Stratifizierungstheorie konnte für immer allgemeiner Klassen von Räumen gezeigt werden, daß sie Whitney-Stratifizierungen besitzen. Die Anfänge gehen dabei auf Whitney [171] zurück, der zuerst gezeigt hat, daß jede reell- oder komplex-analytische Varietät eine Whitney-Stratifizierung besitzt. Łojasiewicz gelang in [108] der Nachweis, daß jede semianalytische Teilmenge einer reell-analytischen Mannigfaltigkeit eine Whitney-Stratifizierung durch analytische Mannigfaltigkeiten besitzt, und daß die Strata *stark analytisch* sind, das heißt analytische Mannigfaltigkeiten darstellen, die wiederum selbst semianalytisch sind. Für subanalytische Mengen konnten Hardt [71, 72] und Hironaka [80] den Nachweis der Whitney-Stratifizierbarkeit führen. Dabei soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, daß die ersten Ideen zu einem Beweis dieses Resultats auf Thom zurückgehen. In seiner Arbeit [149] hatte Thom nämlich schon einige grundlegende Eigenschaften subanalytischer Mengen, denen er den Namen *PSA* für *Projection d'ensemble Semi-Analytique* gab, herausgearbeitet.

1.4.11 Die Thomsche Bedingung (T) Wohl eine der ersten Regularitätsbedingungen an einen stratifizierten Raum wurde 1964 von Thom [148] vorgestellt. In der Literatur wird sie deshalb meistens Thomsche Bedingung (T) genannt. In unserer Notation ausgedrückt erklärt man ein Paar (R, S) disjunkter Untermannigfaltigkeiten von M als (T)-*regulär*, falls jede zu R transversale glatte Funktion $g : \mathbb{R}^N \to M$ in einer Umgebung von R auch transversal zu S ist.

Die Bedingung (T) ist eine relativ schwache Forderung an einen stratifizierten Raum. Whitney zeigte 1964 in der Arbeit [172], daß seine Bedingung (A) die Thomsche Transversalitätsbedingung (T) impliziert. Die Bedeutung von (T) liegt hauptsächlich in der Untersuchung der topologischen Stabilität differenzierbarer Abbildungen.

1.4.12 Verdiers Bedingung (W) Ein Paar (R, S) von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ heißt (W)-*regulär* an der *Stelle* $x_0 \in R$, falls es eine Umgebung U von x_0 und eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $x \in R \cap U$ und alle $y \in S \cap U$

$$d_{\mathrm{Gr}}(T_x R, T_y S) < C \, \|y - x\|,$$

wobei d_{Gr} den Vektorraumabstand aus Appendix A.1 bezeichnet. Ähnlich wie bei der Whitney-Bedingung (B) zeigt man, daß die Bedingung (W) invariant gegenüber Diffeomorphismen der Klasse $\mathcal{C}^2$ zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ ist, folglich ist damit auch der Begriff der (W)-*Regularität* eines Paares (R, S) von $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeiten einer Mannigfaltigkeit M an der *Stelle* $x_0 \in R$ wohldefiniert.

Für jeden $\mathcal{C}^2$-stratifizierten Unterraum einer Mannigfaltigkeit M impliziert nach [155] die Bedingung (W) immer die topologisch lokale Trivialität des betrachteten stratifizierten Raums. Aus den Arbeiten von Kuo [98] und Verdier [155] ergibt sich, daß für subanalytische Stratifizierungen eines subanalytischen Raums, das heißt alle Strata sind subanalytisch, (W) die Bedingung (B) nach sich zieht. Auf der Kategorie der komplex-analytischen Stratifizierungen einer komplex-analytischen Varietät sind (W) und (B) sogar äquivalent (siehe hierzu Trotman [154]). Anders ist es jedoch im reell-algebraischen Fall, dort sind die beiden Bedingungen nicht äquivalent. Es gilt noch mehr. Unter Verwendung des Desingularisierungssatzes von Hironaka gelang Verdier [155] der Nachweis, daß jede subanalytische Menge (bzw. semialgebraische Menge, bzw. komplex-analytische Varietät) eine (W)-reguläre subanalytische (bzw. semialgebraische, bzw. komplex-analytische) Stratifizierung besitzt. Mittlerweile existieren auch Beweise dieses Resultats von Łojasiewicz–Stasica–Wachta [109] und Denkowska–Wachta [47], die mit elementaren Methoden und ohne Hironakas Auflösung der Singularitäten auskommen.

1.4.13 Bekkas Bedingung (C) Man nehme an $R, S \subset M$ seien disjunkt und auf einer offenen Umgebung T von $R \subset M$ sei eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $\rho : T \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ derart vorgegeben, daß $R = \rho^{-1}(0)$ gilt. Bekka [6, 7] nennt das Paar (R, S) dann (C)-*regulär* an der *Stelle* $x \in R \cap \overline{S}$, falls

(BC1) eine offene Umgebung U von x existiert, so daß $\rho_{|S \cap U} : S \cap U \to \mathbb{R}$ submersiv ist, und

(BC2) für jede gegen x konvergierende Folge (y_k) von Punkten $y_k \in S$ derart, daß die Folge der Kerne $\ker T_{y_k}(\rho_{|S})$ gegen einen Unterraum $\lambda \subset T_x M$ strebt, die Beziehung $T_x R \subset \lambda$ erfüllt ist.

Es gilt die Implikationskette (B) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (A), wobei sich die zweite Implikation (C) $\Rightarrow$ (A) sofort aus der Definition von (C) ergibt. Ein Beweis von (B) $\Rightarrow$ (C) findet der Leser in Korollar 3.4.3. Man beachte, daß die jeweiligen Umkehrungen nicht erfüllt sind.

Wesentliches Merkmal der (C)-Regularität ist nach den Ergebnissen von Bekka [6, 7], daß die (C)-Regularität schon ausreicht, um auf dem zugrunde liegenden stratifizierten Raum ein Mathersches Kontrolldatum im Sinne von 3.6.4 konstruieren zu können. Eine Folgerung daraus ist, daß (C)-reguläre stratifizierte Räume topologisch lokal trivial sind.

1.4.14 Eine notwendige Zutat bei der Formulierung der folgenden Bedingung aber auch der später in dieser Arbeit definierten krümmungsmoderaten Stratifizierungen spielt der Begriff eines projektionswertigen Schnitts.

Eine $\mathcal{C}^m$-Abbildung $P : T \to \mathrm{End}(TM)$ von einer Untermannigfaltigkeit $T \subset M$ in das Endomorphismenbündel von TM heißt *projektionswertiger Schnitt* (der *Klasse* $\mathcal{C}^m$), falls für jedes $x \in T$ das Bild P_x eine Projektion in $\mathrm{End}(T_x M)$ ist, falls also mit anderen Worten $P_x^2 = P_x$ gilt.

Jede Untermannigfaltigkeit $S \subset \mathbb{R}^n$ erzeugt einen kanonischen projektionswertigen Schnitt $P_S : S \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, indem man jedem $x \in S$ die Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^n$ auf $T_x S$ zuordnet.

1.4.15 Die Bekka–Trotman Bedingung (δ) Wir sagen, ein Paar (R, S) von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ genüge an der Stelle $x \in R$ der Bedingung (δ), falls es eine offene Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$ gibt und ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $y \in \mathsf{S} \cap \mathsf{U}$ und $z \in \mathsf{R} \cap \mathsf{U}$

$$\|\mathsf{P}_{\mathsf{S},y}(y - z)\| \geq \delta \|y - z\|. \tag{1.4.2}$$

Ein stratifizierter Raum $(\mathsf{X}, \mathcal{C}^\infty)$ mit glatter Struktur heißt (δ)-*stratifiziert*, falls es für jedes Paar (R, S) von Strata und jeden Punkt $x \in \mathsf{R}$ eine singuläre Karte $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ um x gibt, so daß $(\mathsf{x}(\mathsf{R} \cap \mathsf{U}), \mathsf{x}(\mathsf{S} \cap \mathsf{U}))$ der Bedingung (δ) an der Stelle $\mathsf{x}(x)$ genügt.

Die ursprünglich von Bekka–Trotman [9] und Bekka [6] eingeführte Bedingung (δ) ist besonders nützlich bei der Untersuchungen metrischer Eigenschaften eines stratifizierten Raums X. Sie garantiert, daß der geodätische Abstand auf X lokal endlich ist (siehe Abschnitt 1.6) und, unter der zusätzlichen Annahme, daß X keine Strata der Dimension $\leq \dim \mathsf{X} - 2$ besitzt, daß X volumen-regulär ist, insbesondere also lokal endliches Hausdorff-Maß hat (siehe Bekka [6] und Ferrarotti [50, 52]).

Man kann die Bekka–Trotman-Bedingung (δ) etwas abschwächen und zwar derart, daß die Lokal-Endlichkeit des geodätischen Abstands erhalten bleibt. Wir sagen, das Paar (R, S) genüge an der Stelle x der Bedingung (δ_l) mit $l \in \mathbb{R}^{\geq 1}$, falls es eine offene Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$ gibt und ein $\delta > 0$, so daß für alle $y \in \mathsf{S} \cap \mathsf{U}$ und $z \in \mathsf{R} \cap \mathsf{U}$

$$\|\mathsf{P}_{\mathsf{S},y}(y - z)\| \geq \delta \|y - z\|^{2 - 1/l}. \tag{1.4.3}$$

1.4.16 Proposition *Genügt das Paar* (R, S) *von Untermannigfaltigkeiten des Euklidischen Raums an der Stelle* $x \in \mathsf{R}$ *der Whitney-Bedingung* (B), *so ist* (R, S) *an der Stelle* x *auch* (A)+(δ)-*regulär.*

(A)+(δ) impliziert desweiteren die Gültigkeit von (C), der Beweis dafür wird aber bis auf 3.4.4 verschoben.

Beweis: Daß (R, S) an der Stelle x der Bedingung (A) genügt, wurde schon bei der Einführung der Whitney-Bedingungen gezeigt. Nehmen wir nun an, (δ) könne an x nicht erfüllt werden, das heißt es gäbe Folgen $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten $y_k \in_{\mathsf{S}}$ und $z_k \in \mathsf{R}$ mit $\lim_{k \to \infty} y_k = \lim_{k \to \infty} z_k = x$ und

$$\frac{1}{k} \|y_k - z_k\| \geq \|\mathsf{P}_{\mathsf{S},y_k}(y_k - z_k)\|.$$

Nach eventueller Auswahl von Teilfolge konvergiert dann $\left(\frac{y_k - z_k}{\|y_k - z_k\|}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$, und $(\mathsf{P}_{\mathsf{S},y_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen die Orthogonalprojektion auf einen Unterraum $\tau \subset \mathbb{R}^n$. Nach Voraussetzung an die Folgen $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt $\|\mathsf{P}v\| \leq \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also kann v nicht in τ liegen. Das steht aber im Widerspruch zur Whitney-Bedingung (B). $\square$

1.5 Die Garbe der Whitney-Funktionen

Eine glatte Struktur auf einem stratifizierten Raum X erzeugt mittels einer fest gewählten Überdeckung durch Kartenbereiche neben der Garbe $\mathcal{C}^\infty$ der glatten Funktionen auch noch die der sogenannten Whitney-Funktionen. Diese Garbe wird insbesondere in der Fortsetzungstheorie glatter Funktionen (Abschnitte 1.7 und 3.8) sowie für kohomologische Untersuchungen von X (Abschnitt 5.4) hilfreiche Dienste leisten.

1.5.1 Zur Definition der Whitney-Funktionen nehmen wir zuerst an, X besitze eine globale Karte $x : X \to \mathbb{R}$. Dann ist $A := x(X)$ ein lokal abgeschlossener, stratifizierter Unterraum des $\mathbb{R}^n$, und es existiert eine offene Teilmenge O des Euklidischen Raums derart, daß $A \cap O$ abgeschlossen in O ist. Desweiteren sei $m \in \mathbb{N}^{>0} \cup \{\infty\}$. Für jede in X lokal abgeschlossene Menge ist dann $x(U)$ in $\mathbb{R}^n$ lokal abgeschlossen, nach Anhang C existieren also die Räume $J^m(x(U))$ und $\mathcal{E}^m(x(U))$ der m-Jets bzw. Whitney-Funktion der Klasse $\mathcal{C}^m$ auf X. Mittels der Karte x ziehen wir diese beiden Räume auf X zurück, setzen also mit anderen Worten

$$J^m_{X,x}(U) := J^m(x(U)) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}^m_{X,x}(U) := \mathcal{E}^m(x(U)).$$

Durchläuft nun U die Menge aller offenen Teilmengen von X, so erhalten wir, was der Leser im Detail selbst nachprüfen möge, zwei Garben $J^m_{X,\mathbb{R}^n}$ und $\mathcal{E}^m_{X,\mathbb{R}^n}$, von denen die erste als die Garbe der m-*Jets* auf X bezüglich der Karte x bezeichnet wird, und die zweite als die der *Whitney-Funktionen* der *Klasse* $\mathcal{C}^m$ auf X bezüglich der Karte x. Aufgrund der Konstruktion in Abschnitt C.3 ist $\mathcal{E}^m_{X,x}$ natürlich eine Untergarbe von $J^m_{X,x}$.

Für das Folgende erweist es sich als nützlich, noch eine andere Darstellung von $\mathcal{E}^m_{X,x}$ zu haben. Bekanntlich wird eine Garbe eindeutig durch ihren espace étalé festgelegt (siehe Godement [54] für die verwendeten garbentheoretischen Begriffe). Das legt es nahe, den espace étalé $\acute{\mathrm{E}}(\mathcal{E}^m_{X,\mathbb{R}^n})$ der Whitney-Funktionen zu bestimmen. Um die Notation etwas einfacher zu gestalten schreiben wir meistens nur $\mathcal{E}^m$ anstelle von $\mathcal{E}^m_{X,x}$. Als Menge ist $\acute{\mathrm{E}}(\mathcal{E}^m)$ die Vereinigung aller Halme $\mathcal{E}^m_x$, $x \in X$. Wie sehen die Halme $\mathcal{E}^m_x$ aus? Um diese Frage zu beantworten, sei $z = x(x) \in \mathbb{R}^n$. Dann erinnern wir daran, daß $\mathcal{C}^m_{\mathbb{R}^n,z}$ den Halm der Keime glatter Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ an der Stelle z bedeutet und $\mathcal{J}^m(A,\mathbb{R}^n)_z \subset \mathcal{C}^m_{\mathbb{R}^n,z}$ das Ideal der auf A bis zur *Ordnung* m *flachen Funktionskeime* (siehe Abschnitt C.3), das heißt die Menge aller Funktionskeime $[f]_z \in \mathcal{C}^m_{\mathbb{R}^n,z}$, so daß alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung m auf A verschwinden. Gemäß des Fortsetzungssatzes von Whitney C.3.2 kann der Halm $\mathcal{E}^m_x$ mit dem Quotienten $\mathcal{C}^m_{\mathbb{R}^n,z}/\mathcal{J}^m(X,\mathbb{R}^n)_z$ identifiziert werden. Die Topologie von $\acute{\mathrm{E}}(\mathcal{E}^m_{X,\mathbb{R}^n})$ ergibt sich folgendermaßen. Für jede glatte Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit $V \subset O$ offen bezeichne $\overline{f} : A \cap V \to \acute{\mathrm{E}}(\mathcal{E}^m)$ die Abbildung $z \mapsto [f]_z + \mathcal{J}^m(X,\mathbb{R}^n)_z$. Dann ist $\acute{\mathrm{E}}(\mathcal{E}^m)$ mit der feinsten Topologie versehen, so daß alle $\overline{f}$ stetig sind. Damit besteht für $U \subset X$ offen der Raum $\mathcal{E}^m(U)$ aus allen Schnitten $F : U \to \acute{\mathrm{E}}(\mathcal{E}^m)$ derart, daß für jedes $x \in U$ eine offene Menge $V \subset O$ mit $x \in V$ und eine Funktion $f \in \mathcal{C}^m(V)$ existieren, so daß $[F]_y = [f]_{x(y)} + \mathcal{J}^m(X,\mathbb{R}^n)_{x(y)}$ für alle $y \in x^{-1}(V)$. Setzt man nun $F^{(0)}(x) := f(x)$, so hängt $F^{(0)}(x)$ offensichtlich nicht von der speziellen Wahl von f ab, das heißt wir können somit F eine Funktion $F^{(0)} : X \to \mathbb{R}$ zuordnen, die aufgrund der Definition von $\mathcal{E}^m$ in $\mathcal{C}^m(U)$ liegen muß. Insgesamt erhält man also einen kanonischen Epimorphismus $\mathcal{E}^m \to \mathcal{C}^m$ von Garben kommutativer Algebren.

Die Definition der Garbe der Whitney-Funktionen hängt natürlich von der speziellen Wahl der globalen Karte x ab. In den meisten Anwendungen spielt diese Abhängigkeit keine wesentliche Rolle, deswegen werden wir sie häufig auch nicht notiert.

1.5.2 Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall eines stratifizierten Raums X mit einer glatten oder auch nur einer $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}}$-Struktur. Dazu wählen man sich erst einmal einen (abzählbaren) singulären Atlas von X bestehend aus singulären Karten $\mathsf{x}_j : \mathsf{U}_j \to \mathsf{O}_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in J$. Zudem kürze man ab und schreibe $\mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_j$ anstelle von $\mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{U}_j,\mathsf{x}_j}$ sowie $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_j$ anstelle von $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{U}_j,\mathsf{x}_j}$. Dann definieren wir für jede offene (oder auch lokal abgeschlossene) Menge $\mathsf{U} \subset \mathsf{X}$ den Raum $\mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}(\mathsf{U})$ als die Menge all derjenigen Familien $\mathsf{F} = (\mathsf{F}_j)_{j\in J}$ von $\mathfrak{m}$-Jets $\mathsf{F}_j \in \mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_j(\mathsf{U} \cap \mathsf{U}_j)$, so daß für jedes Paar von Indizes j, i die Relation

$$\mathsf{F}^{(0)}_{j\,|\mathsf{U}\cap\mathsf{U}_j\cap\mathsf{U}_i} = \mathsf{F}^{(0)}_{i\,|\mathsf{U}\cap\mathsf{U}_j\cap\mathsf{U}_i} \tag{1.5.1}$$

erfüllt ist. Dem Unterraum aller Familien $\mathsf{F} = (\mathsf{F}_j)_{j\in J}$ mit $\mathsf{F}_j \in \mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_j$ geben wir erwartungsgemäß die Bezeichnung $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}(\mathsf{U})$. Die Einschränkungsmorphismen $\mathsf{r}^{\mathsf{U}}_{\tilde{\mathsf{U}}} : \mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}(\mathsf{U}) \to \mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}(\tilde{\mathsf{U}})$ mit $\tilde{\mathsf{U}} \subset \mathsf{U} \subset \mathsf{X}$ offen und analog die für $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}(\mathsf{U})$ ergeben sich unmittelbar aus denen von $\mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_j$: für $\mathsf{F} = (\mathsf{F}_j) \in \mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}(\mathsf{U})_{j\in J}$ sei $\mathsf{r}^{\mathsf{U}}_{\tilde{\mathsf{U}}}(\mathsf{F}) = \left(\mathsf{F}_{j\,|\tilde{\mathsf{U}}\cap\mathsf{U}_j}\right)$. Damit werden $\mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}$ und $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}$ erst einmal zu Prägarben, erfüllen aber auch die Garbenaxiome, wie man sofort aus den entsprechenden Eigenschaften der $\mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_j$ und $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_j$ erkennt. Schließlich haben wir also wie gewünscht Garben $\mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}$ und $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}$ erhalten, die wir die Garbe der $\mathfrak{m}$-*Jets* beziehungsweise der *Whitney-Funktionen* auf X der *Klasse* $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}}$ nennen. Explizit sei jedoch nochmals bemerkt, daß beide Garben von der speziellen Wahl der Kartenüberdeckung $\mathfrak{U}$ abhängen.

Genauso wie im Euklidisch einbettbaren Fall existiert ein natürlicher Garbenmorphismus $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}} \to \mathcal{C}^{\mathfrak{m}}$, indem man $\mathsf{F} \in \mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}$ die Funktion $\mathsf{F}^{(0)} \in \mathcal{C}^{\mathfrak{m}}(\mathsf{U})$ mit $\mathsf{F}^{(0)}_{|\mathsf{U}\cap\mathsf{U}_j} = \mathsf{F}^{(0)}_j$ zuordnet.

1.5.3 Beispiel Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann existiert einerseits eine Einbettung $\mathsf{x} : \mathsf{X} \to \mathbb{R}^N$ in einen Euklidischen Raum genügend großer Dimension, andererseits aber auch eine offene Überdeckung $(\mathsf{U}_j)_{j\in J}$ zusammen mit differenzierbaren Karten $\mathsf{x}_j : \mathsf{U}_j \to \mathbb{R}^n$. Die diesen beiden Ausgangssituationen zugeordneten Garben von Whitney-Funktionen $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathsf{x}}$ und $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}$ sind in der Regel verschieden, und stellen in gewissem Sinne die beiden extremen Beispiele für solche Garbe dar. Falls $N > n$, so ist nämlich $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathsf{x}}(\mathsf{X})$ gleich dem Raum der $\mathfrak{m}$-Jets von $\mathsf{x}(\mathsf{X})$ in $\mathbb{R}^N$, und $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}(\mathsf{X})$ kanonisch isomorph zur Algebra der $\mathfrak{m}$-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf X.

1.5.4 Proposition *Die einem stratifizierten Raum* $(\mathsf{X}, \mathcal{C}^{\mathfrak{m}})$ *mit einer* $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}}$*-Struktur und einer Kartenüberdeckung* $\mathfrak{U}$ *zugeordnete Garbe* $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}$ *der Whitney-Funktionen der Klasse* $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}}$ *ist fein. Gleiches gilt für die Garbe* $\mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}$ *der* $\mathfrak{m}$*-Jets.*

Beweis: Dieser kann analog dem Beweis von Satz 1.3.13 geführt werden, weswegen wir ihn nicht nochmals angeben. □

1.5.5 Die wohlbekannten und im Anhang C aufgeführten Normen auf Räumen von Jets und Whitney-Funktionen lassen sich auf $\mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}(\mathsf{U})$ und $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}(\mathsf{U})$ übertragen. Sei dazu $\mathcal{K} = (\mathsf{K}_j)_{j\in J}$ eine Familie von Kompakta $\mathsf{K}_j \subset \mathsf{U}_j \cap \mathsf{U}$, und $I \subset J$ eine endliche Familie von Indizes. Dann werden durch

$$|\mathsf{F}|_{\mathcal{K},\mathfrak{m},I} := \sum_{j\in I} |\mathsf{F}_j|_{\mathsf{K}_j,\mathfrak{m}}, \qquad \mathsf{F} \in \mathsf{J}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}(\mathsf{U}), \quad \text{und}$$

$$\|\mathsf{G}\|_{\mathcal{K},\mathfrak{m},I} := \sum_{j\in I} \|\mathsf{G}_j\|_{\mathsf{K}_j,\mathfrak{m}}, \quad \mathsf{G} \in \mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{\mathsf{X},\mathfrak{U}}(\mathsf{U}),$$

Seminormen $|\cdot|_{\mathcal{K},m,I}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{K},m,I}$ auf $\mathrm{J}^m_{X,\mathcal{U}}(\mathrm{U})$ bzw. $\mathcal{E}^m_{X,\mathcal{U}}(\mathrm{U})$ definiert, die, wenn die K_j jeweils eine Ausschöpfung von U_j durchlaufen und I alle endlichen Indexmengen, $\mathrm{J}^m_{X,\mathcal{U}}(\mathrm{U})$ und $\mathcal{E}^m_{X,\mathcal{U}}(\mathrm{U})$ zu Fréchet-Algebren machen.

1.6 Rektifizierbare Kurven und Regularität

In einer zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit können je zwei Punkte durch eine Kurve endlicher Länge miteinander verbunden werden. In einem stratifizierten Raum mit glatter Struktur muß das nicht notwendigerweise der Fall sein, zudem ist für solche Räume auch nicht unmittelbar klar, was unter einer Kurve endlicher Länge oder mit anderen Worten unter einer rektifizierbaren Kurve zu verstehen ist. Ziel dieses Abschnitts ist es, einen geeigneten Begriff dafür einzuführen. Darüber hinaus werden verschiedene Regularitätsbegriffe eingeführt, die lokal in singulären Karten die Länge einer rektifizierbaren Kurve in Relation zum Euklidischen Abstand setzen. Diese Regularitätsbegriffe dienen einerseits dazu, die metrischen Eigenschaften eines singulären Raums besser zu verstehen, andererseits aber auch dazu, Fortsetzungssätze für glatte Funktionen auf (A)-stratifizierten Räumen formulieren und beweisen zu können.

1.6.1 Wir betrachten zuerst die folgende Situation. Sei (Y, d) ein bogenzusammenhängender metrischer Raum. Dann ist für jedes Paar von Punkten $x, y \in Y$ der *geodätische Abstand*

$$\delta(x,y) = \inf\left\{|\gamma| \;\middle|\; \gamma \in \mathcal{C}\big([0,1];Y\big),\ \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y\right\} \in [0,\infty]$$

wohldefiniert, wobei $\mathcal{C}\big([t^-,t^+],Y\big)$ die Menge aller in Y verlaufenden Kurven über dem Intervall $[t^-,t^+]$ bezeichnet, und die Länge einer Kurve $\gamma : [t^-,t^+] \to Y$ durch

$$|\gamma| = \sup\left\{\sum_{1\le j\le k} d\big(\gamma(t_j),\gamma(t_{j-1})\big) \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ t^- = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = t^+\right\}$$

gegeben ist.

1.6.2 Erläuterung Damit es nicht zu Unklarheiten bezüglich der verwendeten Notation kommt, weisen wir kurz darauf hin, daß unter einer *Kurve* oder einem *Weg* in einem topologischen Raum Y immer eine stetige Abbildung der Form $\gamma : [t^-,t^+] \to Y$ mit reellen Zahlen $t^- \le t^+$ gemeint ist. Unter einem *Bogen* verstehen wir das Bild einer Kurve.

Der geodätische Abstand muß nicht immer endlich sein, wie das folgende Beispiel aus [53] zeigt.

1.6.3 Beispiel Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ der stratifizierte Unterraum

$$X = \{0\} \cup \left\{(t, r_t\cos\theta, r_t\sin\theta) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t > 0,\ \theta \in [0,2\pi],\ r_t = 2t + t\sin(1/t)\right\}.$$

X erbt dann von $\mathbb{R}^3$ eine Metrik durch Einschränkung des Euklidischen Abstands. Je zwei Punkte $x, y \in X \setminus \{0\}$ können offensichtlich durch einen rektifizierbaren Weg miteinander verbunden werden. Es gilt jedoch $\delta(0,x) = \infty$, denn mit $x = (t, r_t \cos\theta, r_t \sin\theta))$, $s_n := \frac{1}{2\pi n}$ und $s'_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{6}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta(0,x) &= \int_0^t \sqrt{1 + |\dot{r}_s|^2}\, ds \geq \int_0^t |\dot{r}_s|\, ds \\ &\geq -3 + \int_0^t \frac{1}{s} \,|\cos(1/s)|\, ds \geq -3 + \sum_{n \in \mathbb{N}^{>0}} \int_{s'_n}^{s_n} \frac{1}{s}\,|\cos(1/s)|\, ds \\ &\geq -3 + \sum_{n \in \mathbb{N}^{>0}} \frac{1}{12n+1} = \infty.\end{aligned}$$

1.6.4 Falls je zwei Punkte eines metrischen Raums (Y, d) durch einen *rektifizierbaren Weg*, also durch einen Weg γ mit endlicher Länge miteinander verbunden werden können, so gilt $\delta(x,y) < \infty$ für alle $x, y \in Y$. Man sagt in diesem Fall, Y sei ein *endlich bogenzusammenhängender Raum*. Besitzt (Y, d) für jeden seiner Punkte eine Umgebungsbasis aus endlich bogenzusammenhängenden Mengen, so heißt (Y, d) *lokal endlich bogenzusammenhängend*. Ein zusammenhängender lokal endlich bogenzusammenhängender metrischer Raum ist endlich bogenzusammenhängend.

Eine Kurve $\gamma : [t^-, t^+] \to X$ in einem stratifizierten Raum $(X, \mathcal{C}^\infty)$ mit glatter Struktur heißt *rektifizierbar*, falls es eine Umgebung $U \subset X$ von $\gamma([t^-, t^+])$ gibt und eine singuläre Karte $x : U \to \mathbb{R}^n$, so daß der Weg $x \circ \gamma$ bezüglich der Euklidischen Metrik rektifizierbar ist. In Analogie zum metrischen Fall nennt man dann den stratifizierten Raum $(X, \mathcal{C}^\infty)$ (*lokal*) *endlich bogenzusammenhängend*, wenn je zwei Punkte von X durch einen rektifizierbaren Bogen miteinander verbunden werden können, bzw. wenn jeder Punkt von X eine Umgebungsbasis aus endlich bogenzusammenhängenden Mengen besitzt.

Wie man leicht nachprüft, ist die Rektifizierbarkeit einer Kurve in X unabhängig von der speziell gewählten singulären Karte, das heißt, ist $x \circ \gamma$ rektifizierbar für eine Karte $x : U \to \mathbb{R}^n$, so gilt das auch für jeden Weg $y \circ \gamma$, wobei $y : V \to \mathbb{R}^N$ die zu x kompatiblen Karten mit $\operatorname{im}\gamma \subset V \subset U$ durchläuft.

1.6.5 Nehmen wir nun an, A sei eine Teilmenge des Euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ und d der auf A eingeschränkten Euklidischen Abstand. Offensichtlich besitzt der geodätische Abstand $\delta(x,y)$ auf A dann eine Abschätzung nach unten durch den Euklidischen Abstand, das heißt es gilt

$$d(x,y) = \|x - y\| \leq \delta(x,y), \qquad x, y \in A.$$

Umgekehrt muß das nicht immer der Fall sein, insbesondere sind in der Regel die Metriken δ und d nicht äquivalent. Wir treffen deshalb die folgende Definition.

1.6.6 Definition (Tougeron [150, Def. 3.10]) Eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt l-*regulär* mit $l \in \mathbb{R}^{\geq 1}$, falls sie endlich bogenzusammenhängend ist, und eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß für alle $x, y \in K$

$$\delta(x,y) \leq C d(x,y)^{1/l}.$$

Eine lokal abgeschlossene zusammenhängende und lokal endlich bogenzusammenhängende Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt l-*regulär*, falls jede ihrer Punkte eine kompakte l-reguläre Umgebung besitzt. Existiert für jeden Punkt z von A ein von z abhängiges $l \in \mathbb{R}^{\geq 1}$ und eine l-reguläre kompakte Umgebung $K \subset \mathbb{R}^n$, so sagen wir, A sei *Whitney-Tougeron-regulär* oder kurz *regulär*.

Schließlich nennt man einen zusammenhängenden stratizierten Raum $(X, \mathcal{C}^\infty)$ mit glatter Struktur *Whitney-Tougeron-regulär* oder *regulär* (bzw. $\mathfrak{l}$-*regulär*), falls eine Überdeckung von X durch singuläre Karten $x : U \to O \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so daß $x(U)$ eine reguläre (bzw. $\mathfrak{l}$-reguläre) Menge im Euklidischen Raum darstellt.

Mittels einer einfachen Rechnung überzeugt man sich davon, daß die $\mathfrak{l}$-Regularität invariant gegenüber Diffeomorphismen auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. Für den stratifizierten Fall bedeutet dies, daß aus der $\mathfrak{l}$-Regularität von $x(U)$ schon die $\mathfrak{l}$-Regularität von $y(U)$ für jede weiter singuläre Karte $y : U \to \mathbb{R}^N$ folgt.

1.6.7 Beispiel Jede subanalytische Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist Whitney-Tougeron-regulär. Für einen Beweis dieser Tatsache siehe Kurdyka–Orro [100, Cor. 2].

1.6.8 Proposition *Jeder* $(\delta_\mathfrak{l})$*-stratifizierte Raum* $(X, \mathcal{C}^\infty)$ *ist lokal endlich bogenzusammenhängend und* $\mathfrak{l}$*-regulär im Sinne von Tougeron. Insbesondere ist jeder Whitney-stratifizierte Raum* 1*-regulär.*

Für den Fall $\mathfrak{l} = 1$ ist dieses Resultat in Bekka–Trotman [9] gezeigt worden. Dort finden sich auch weitergehende Methoden, mit denen man prüfen kann, ob ein aus Mannigfaltigkeiten zusammengesetzter aber nicht notwendig stratifizierter Raum endlich bogenzusammenhängend ist.

Beweis: Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß X eine zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Sei nun $x \in X$ ein Punkt, S das Stratum, in dem x liegt, und U eine offene Kugel um x derart, daß U nur endlich viele Strata von X trifft und für jedes Stratum R mit $R \cap U \neq \emptyset$ die Beziehung $R \geq S$ gilt. Nach Verkleinerung von U und geeigneter Wahl von $\delta > 0$ gilt für alle $z \in S \cap U$ und $y \in (X \setminus S) \cap U$ die Relation

$$\|P_y(z - y)\| \geq \delta \|z - y\|^{2-1/\mathfrak{l}}.$$

Dabei ist P_y die Orthogonalprojektion auf den Tangentialraum T_yR des Stratums, in dem y liegt. Wir versehen als nächstes S mit der durch das Euklidische Skalarprodukt versehenen Riemannschen Metrik und betrachten die zugehörige Exponentialfunktion exp. Durch weitere Verkleinerung von U kann erreicht werden, daß $U \cap S = \exp B_r$ gilt, wobei B_r die Kugel um den Ursprung von T_xS vom Radius $r < 1$ ist und exp auf einer Umgebung von $\overline{B_r}$ injektiv sein soll. Für jedes $y \in S \cap U$ definiere man den Weg $\gamma_y : [0, 1] \to S$ durch $\gamma_y(t) = \exp(tw)$, wobei $w = \exp_x^{-1}(y)$ und $t \in [0, 1]$ ist. Es gibt dann ein $C_1 > 0$, so daß

$$|\gamma_y| < C_1 \|y - x\| \leq C_1 \|y - x\|^{1/\mathfrak{l}}, \tag{1.6.1}$$

wobei die zweite Ungleichung aus $\|y - x\| < r < 1$ und $\mathfrak{l} \geq 1$ folgt. Nun gehen wir zu den Strata $R > S$ über. Für ein jedes solche Stratum definiere man das glatte Vektorfeld $V_R : R \to TR$ durch

$$V_R(y) = \frac{\|x - y\|}{\|P_y(x - y)\|^2} P_y(x - y).$$

Für jedes $y \in R$ sei $t_y^+ > 0$ die positive Fluchtzeit von y bezüglich V_R, das heißt es gibt eine glatte Kurve $\gamma_y : [0, t_y^+[\to R$, die

$$\dot{\gamma}_y(t) = V_R(\gamma_y(t)), \quad t \in [0, t_y^+[$$

erfüllt, und t_y^+ ist maximal mit dieser Eigenschaft. Da

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\gamma_y(t) - x\| &= \frac{d}{dt}\sqrt{\langle \gamma_y(t) - x, \gamma_y(t) - x\rangle} = \frac{\langle \dot{\gamma}_y(t) - x, \gamma_y(t) - x\rangle}{\sqrt{\langle \gamma_y(t) - x, \gamma_y(t) - x\rangle}} \\ &= -\frac{1}{\|P_{\gamma_y(t)}(x - \gamma_y(t))\|^2}\left\langle P_{\gamma_y(t)}(x - \gamma_y(t)), x - \gamma_y(t)\right\rangle = -1\end{aligned}$$

gilt, ist für $0 \leq t < t_y^+$

$$\|\gamma_y(t) - x\| = -t + \|y - x\|. \tag{1.6.2}$$

Wir rechnen weiter

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\dot{\gamma}_y(s)\|\, ds &= \int_0^t \frac{\|\gamma_y(s) - x\|}{\|P_{\gamma_y(s)}(x - \gamma_y(s))\|} ds \leq \frac{1}{\delta}\int_0^t \|\gamma_y(s) - x\|^{1/l - 1} ds \\ &= \frac{1}{\delta l}\left(\|y - x\|^{1/l} - (\|y - x\| - t)^{1/l}\right),\end{aligned} \tag{1.6.3}$$

also hat γ_y eine endliche Länge. Da U eine relativ kompakt Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, kann $Z := \overline{\gamma_y([0, t_y^+[)} \setminus \gamma_y([0, t_y^+[)$ nicht leer sein, zudem liegt Z wegen (1.6.2) in U. Angenommen, Z enthielte zwei verschiedene Punkt z und z'. Dann gäbe es zwei disjunkte Kugeln B und B' um z bzw. z', und γ_y müßte unendlich oft zwischen B und B' pendeln, könnte insbesondere also keine endliche Länge haben. Folglich besteht Z genau aus einem Punkt y_1, der in einem Stratum $R_1 \leq R$ liegen muß. Wegen der Maximalität von t_y^+ kann nicht $R_1 = R$ sein, also gilt $R_1 < R$. Falls $R_1 \neq S$ fahren wir fort und erhalten als Endpunkt des Weges γ_{y_1} einen Punkt y_2 aus einem Stratum $R_2 < R_1$. Rekursiv erhält man so eine Folge von Punkten $y = y_0, y_1, \cdots, y_k$ und von Strata $R > R_1 > \cdots > R_k$ mit $y_l = \lim_{t \to t_{l-1}^+} \gamma_{y_{l-1}}(t) \in R_l$, wobei $1 \leq l \leq k$ und $t_{l-1}^+ = t_{y_{l-1}}^+$. Da U nur endlich viele Strata enthält, bricht diese Rekursion nach endlich vielen Schritten ab, das heißt es gilt $R_k = S$ für ein geeignetes k. Dem Punkt $y_k \in S$ ordne man den oben definierten Weg $\gamma_{y_k} \subset S$ zu; er verbindet dann y_k mit x in S. Die Gesamtlänge des aus $\gamma_y, \gamma_{y_1}, \cdots, \gamma_{y_k}$ zusammengesetzten Wegs γ beträgt somit aufgrund von (1.6.3), (1.6.2) und (1.6.1)

$$\begin{aligned}|\gamma| &\leq C\left(\left(\|y - x\|^{1/l} - \|y_1 - x\|^{1/l}\right) + \left(\|y_1 - x\|^{1/l} - \|y_2 - x\|^{1/l}\right) + \cdots + \|y_k - x\|^{1/l}\right) \\ &= C\,\|y - x\|^{1/l},\end{aligned}$$

wobei $C = \max\{\frac{1}{\delta l}, C_1\}$. Folglich kann jeder Punkt y aus $X \cap U$ durch einen rektifizierbaren Weg in X mit x verbunden werden, und es gilt

$$\delta(x, y) \leq C\,\|y - x\|^{1/l}.$$

Das war zu zeigen. □

In einem zusammenhängenden regulären (A)-stratifizierten Raum können zwei Punkte zwar im allgemeinen nicht durch einen stückweise differenzierbaren, aber zumindest durch einen so genannten schwach-stückweise differenzierbaren Weg miteinander verbunden werden.

1.6.9 Definition Sei X ein stratifizierter Raum mit glatter Struktur. Eine Kurve γ in X heißt *schwach-stückweise* $\mathcal{C}^1$, falls eine in $[\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+]$ offene Menge $\mathrm{I} \subset [\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+]$ mit abzählbarem Komplement existiert, die sogenannte *Differenzierbarkeitsmenge*, und eine singuläre Karte $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathsf{X}$ um $\gamma([\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+])$, so daß $\mathsf{x} \circ \gamma_{|\mathrm{I}}$ stetig differenzierbar ist, $\overline{\mathrm{I}} = [\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+]$ gilt sowie

$$\int_{\mathrm{I}} \|\mathsf{T}\mathsf{x}(\dot{\gamma}(\mathsf{t}))\| \, \mathsf{d}\mathsf{t} < \infty. \tag{1.6.4}$$

Hat I die Form $\mathrm{I} = [\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+] \setminus \{\mathsf{t}_0, \cdots, \mathsf{t}_k\}$ mit $\mathsf{t}^- = \mathsf{t}_0 < \cdots < \mathsf{t}_k = \mathsf{t}^+$, und ist $\mathsf{x} \circ \gamma_{|[\mathsf{t}_j, \mathsf{t}_{j+1}]}$ stetig differenzierbar für $j = 0, \cdots, k-1$, so nennt man γ bekanntlich *stückweise* $\mathcal{C}^1$.

Der Raum aller schwach-stückweisen $\mathcal{C}^1$-Kurven von $[\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+]$ nach X werde mit $\mathcal{C}^{\mathrm{w}1}\big([\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+]; \mathsf{X}\big)$ bezeichnet.

Eine schwach-stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve γ ist offensichtlich rektifizierbar, wobei die Länge von $\mathsf{x} \circ \gamma$ durch das Integral in (1.6.4) gegeben ist.

Aufgrund von Proposition 1.3.16 ist jede aus endlich vielen rektifizierbaren bzw. schwach-stückweisen $\mathcal{C}^1$-Kurven zusammengesetzte Kurve ebenfalls rektifizierbar bzw. schwach-stückweise $\mathcal{C}^1$.

1.6.10 Lemma *Sei $\lambda : [\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+] \to \mathsf{X}$ eine rektifizierbaren Kurve und $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ eine singuläre Karte um $\lambda([\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+])$. Dann existiert eine schwach-stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : [\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+] \to \mathsf{X}$, die der Abschätzung*

$$|\mathsf{x} \circ \gamma| \leq |\mathsf{x} \circ \lambda|. \tag{1.6.5}$$

genügt.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\mathsf{X} \subset \mathbb{R}^n$ annehmen. Da jedes Stratum $\mathsf{S} \subset \mathsf{X}$ lokal abgeschlossen ist, muß $\mathrm{I}_\mathsf{S} := \{\mathsf{t} \in [\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+] \mid \lambda(\mathsf{t}) \in \mathsf{S}\}$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge von $[\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+]$ sein. Mit Hilfe der Tatsache, daß jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ abzählbare Vereinigung offener Intervalle ist, prüft man nun leicht nach, daß I_S die disjunkte Vereinigung abzählbar vieler offener, abgeschlossener und halboffener Intervalle ist, insbesondere also abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt. Explizit ist also

$$\mathrm{I}_\mathsf{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_{\mathsf{S},k},$$

wobei $\mathrm{I}_{\mathsf{S},k} \cap \mathrm{I}_{\mathsf{S},l} = \emptyset$ für $k \neq l$ gilt und $\mathrm{I}_{\mathsf{S},k}$ entweder leer oder eines der Intervalle $]\mathsf{t}^-_{\mathsf{S},k}, \mathsf{t}^+_{\mathsf{S},k}[$, $[\mathsf{t}^-_{\mathsf{S},k}, \mathsf{t}^+_{\mathsf{S},k}]$, $]\mathsf{t}^-_{\mathsf{S},k}, \mathsf{t}^+_{\mathsf{S},k}]$, oder $[\mathsf{t}^-_{\mathsf{S},k}, \mathsf{t}^+_{\mathsf{S},k}[$ mit $\mathsf{t}^-_{\mathsf{S},k} < \mathsf{t}^+_{\mathsf{S},k}$ ist. Wir definieren nun eine offene Menge

$$\tilde{\mathrm{I}} := \bigcup_{(\mathsf{S},k) \in J} \mathrm{I}^\circ_{\mathsf{S},k},$$

wobei J aus alle Paaren $(\mathsf{S}, k) \in \mathcal{S} \times \mathbb{N}$ mit $\mathrm{I}^\circ_{\mathsf{S},k} \neq \emptyset$ besteht. Das Komplement $[\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+] \setminus \tilde{\mathrm{I}}$ enthält dann höchstens abzählbar unendlich viele Punkte, und es gilt $\overline{\tilde{\mathrm{I}}} = [\mathsf{t}^-, \mathsf{t}^+]$. Für $(\mathsf{S}, k) \in J$ wählen wir als nächstes eine streng monoton fallende Folge $(\mathsf{t}^-_{\mathsf{S},k,-l})_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{I}^\circ_{\mathsf{S},k}$ mit $\lim_{l \to \infty} \mathsf{t}^-_{\mathsf{S},k,-l} = \mathsf{t}^-_{\mathsf{S},k}$ und eine streng monoton wachsende Folge $(\mathsf{t}^+_{\mathsf{S},k,l})_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{I}^\circ_{\mathsf{S},k}$ mit

$t^-_{S,k,0} < t^+_{S,k,0}$ und $\lim_{l\to\infty} t^+_{S,k,l} = t^+_{S,k}$. Man definiere dann für $l \in \mathbb{N}^{>0}$ weitere Punkte $t^+_{S,k,-l} := t^-_{S,k,-l+1}$ sowie $t^-_{S,k,l} := t^+_{S,k,l-1}$ und setze für $l \in \mathbb{Z}$

$$I_{S,k,l} := [t^-_{S,k,l}, t^+_{S,k,l}].$$

Nach Konstruktion liegt $\lambda(I_{S,k,l})$ ganz im Stratum S, und es gilt $\bigcup_{l\in\mathbb{Z}} I_{S,k,l} = I^\circ_{S,k}$. Die Zeiten $t^\pm_{S,k,l}$ können offenbar so gewählt werden, daß die Punkte $\lambda(t^-_{S,k,l})$ und $\lambda(t^+_{S,k,l})$ durch eine differenzierbare Kurve $\gamma_{S,k,l} : I_{S,k,l} \to S$ minimaler Länge miteinander verbunden werden können, wobei S mit der durch das Euklidische Skalarprodukt induzierten Riemannschen Metrik versehen ist. Es gilt dann

$$|\gamma_{S,k,l}| \leq |\lambda_{|I_{S,k,l}}|.$$

Die Kurven $\gamma_{S,k,l}$ setzten wir zu einem Weg $\gamma : [t^-, t^+] \to X$ folgendermaßen zusammen:

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_{S,k,l}(t) & \text{falls } t \in I_{S,k,l}, \\ \lambda(t) & \text{falls } t \notin \tilde{I}. \end{cases}$$

Nach Konstruktion wird γ damit zu einer schwach-stückweisen $\mathcal{C}^1$ Kurve in X mit Differenzierbarkeitsmenge $I = \tilde{I} \setminus \bigcup_{(S,k,l)\in J\times\mathbb{Z}} \{t^\pm_{S,k,l}\}$ und genügt der Ungleichung (1.6.5). □

Als nächstes werden wir erste Implikationen aus der Whitney-Tougeron-Regularität für die Whitney-Funktionen auf dem betrachteten Raum vorstellen.

1.6.11 Lemma (Tougeron [150, Rem. 2.5]) *Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ zwei Punkte und γ eine rektifizierbare Kurve, die x mit y verbindet. Sei weiter $g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}^{>0}$ eine auf x von der Ordnung $(m-1)$ flache Funktion, es gelte also $D^\alpha g(x) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq m-1$. Dann genügt $g(y)$ der folgenden Abschätzung:*

$$\big|g(y)\big| \leq n^{m/2}\, |\gamma|^m \sup_{\substack{\xi\in \operatorname{im}\gamma \\ |\alpha|=m}} \big|D^\alpha g(\xi)\big|. \tag{1.6.6}$$

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz gilt für jede Funktion $g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$

$$\big|g(y) - g(x)\big| \leq \sqrt{n}\, |x-y| \sup_{\substack{\xi\in [x,y] \\ |\alpha|=1}} \big|D^\alpha g(\xi)\big|,$$

wobei $[x, y] \subset \mathbb{R}^n$ die Verbindungsstrecke von x nach y bezeichnet. Für jeden stückweise linearen Weg γ, der x mit y verbindet, folgt dann

$$\big|g(y) - g(x)\big| \leq \sqrt{n}\, |\gamma| \sup_{\substack{\xi\in \operatorname{im}\gamma \\ |\alpha|=1}} \big|D^\alpha g(\xi)\big|. \tag{1.6.7}$$

Mittels eines Grenzübergang zeigt man, daß (1.6.7) auch für beliebige rektifizierbare Wege γ richtig ist. Falls nun g flach auf x von der Ordnung $(m-1)$ ist, so ergibt sich mit einem einfachen Induktionsargument die Abschätzung (1.6.6). □

Sei nun $K \subset \mathbb{R}^n$ eine l-reguläre kompakte Menge, und F eine Whitney-Funktion der Klasse $\mathcal{C}^m$, $m < \infty$ auf K. Nach dem Whitneyschen Fortsetzungssatz C.3.2 existiert eine

Funktion $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$, so daß $F = J^m(f)$. Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq m$ und $x \in K$ liegt dann $g = D^\alpha(f - T_x^m F)$ in $\mathcal{C}^{m-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$. Zudem ist g flach auf x von der Ordnung $m - |\alpha|$, und ist auf K gleich dem Restglied $(R_x^m F)^{(\alpha)}$. Aufgrund von Lemma 1.6.11 ergibt sich dann für alle $x, y \in K$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|(R_x^m F)^{(\alpha)}(y)\right| &\leq n^{\frac{m-|\alpha|}{2}} \delta(x,y)^{m-|\alpha|} \sup_{\substack{\xi \in K \\ |\beta|=m}} \left|F^{(\beta)}(\xi) - F^{(\beta)}(x)\right| \\ &\leq 2n^{\frac{m-|\alpha|}{2}} \delta(x,y)^{m-|\alpha|} \, |F|_{K,m}. \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

Daraus ergibt sich der erste Teil der folgenden Proposition.

1.6.12 Proposition (Whitney [167], Tougeron [150, Prop. 2.6]) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Definieren der euklidische und der geodätische Abstand auf K äquivalente Metriken, ist also mit anderen Worten K eine 1-reguläre Menge, so sind für alle $m \in \mathbb{N}$ die Seminormen $\|\cdot\|_{K,m}$ und $|\cdot|_{K,m}$ äquivalent auf $\mathcal{E}^m(A)$.*

(Tougeron [150, Prop. 3.11]) *Ist K jedoch l-regulär mit $l \in \mathbb{R}^{\geq 1}$, so existiert eine Konstante $C_m > 0$, so daß für alle $F \in \mathcal{E}^\infty(K)$*

$$\|F\|_{K,m} \leq C_m \, |F|_{K,ml}.$$

Beweis: Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $x, y \in K$ und alle $F \in \mathcal{E}^\infty(K)$

$$\left|(R_x^m F)^{(\alpha)}(y)\right| \leq \left|(R_x^{ml} F)^{(\alpha)}(y)\right| + C|x-y|^{m-|\alpha|} \, |F|_{K,ml}.$$

Andererseits existiert aufgrund der Voraussetzung und (1.6.8) ein $D > 0$, so daß für alle $F \in \mathcal{E}^\infty(K)$

$$\begin{aligned} \left|(R_x^{ml} F)^{(\alpha)}(y)\right| &\leq 2n^{\frac{m-|\alpha|}{2}} \delta(x,y)^{ml-|\alpha|} \, |F|_{K,ml} \\ &\leq D|x-y|^{m-|\alpha|} |F|_{K,ml}. \end{aligned}$$

Aus den beiden Abschätzungen ergibt sich schließlich die Behauptung. □

1.6.13 Korollar *Für jeden regulären stratifizierten Raum X mit glatter Struktur und jede Kartenüberdeckung $\mathfrak{U}$ von X ist $\mathcal{E}^\infty_{X,\mathfrak{U}}(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von $J^\infty_{X,\mathfrak{U}}(X)$.*

Der Regularitätsbegriff von Tougeron aus Definition 1.6.6 für eine lokal abgeschlossen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ermöglicht keine Aussage darüber, wie sich der geodätische Abstand zweier Punkte $x, y \in A$ zum Euklidischen verhält, wenn die beiden Punkte x und y gegen den Rand ∂A von A streben. Ferrarotti und Wilson haben in der Arbeit [53] einen Regularitätsbegriff eingeführt, der das Verhalten des geodätischen Abstands in der Nahe des Randes berücksichtigt. Die wesentliche Anwendung dieser neuen Regularität liegt in der Fortsetzungstheorie für glatte Funktionen, was Thema des nächsten Abschnitts sein wird. Um in unserer Notation kompatibel mit der oben vorgestellten l-Regularität zu bleiben, haben wir den Regularitätsbegriff aus [53] geeignet angepaßt. Die nachfolgend definierte (r, l)-Regularität entspricht der (r, l^{-1})-Regularität in [53].

1.6.14 Definition (vgl. Ferrarotti–Wilson [53, Sec. I]) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende, lokal abgeschlossene und lokal endlich bogenzusammenhängende Menge, sowie $Z \subset A$ eine lokal abgeschlossene, endlich bogenzusammenhängender *Randmenge*, das heißt es ist $Z \subset \partial(A \setminus Z)$. Man nennt A dann (r,l)-*regulär relativ* Z, wobei $l, r \in \mathbb{R}^{\geq 1}$, falls für jeden Punkt $z \in Z$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von z existiert, so daß $V \cap A$ endlich bogenzusammenhängend ist, und für geeignete Konstanten $C_1, C_2, D > 0$ die folgenden Axiome (RA1) und (RA2) oder (RB1) und (RB2) erfüllt sind:

(RA1) $\delta(x,Z) \leq C_1\, d(x,Z)^{1/l}$ für jedes $x \in V \cap A \setminus Z$.

(RA2) Aus $d(x,y) \leq D \max\{d(x,Z), d(y,Z)\}^r$ mit $x, y \in V \cap A \setminus Z$ folgt

$$\delta(x,y) \leq C_2\, d(x,y) \max\{d(x,Z), d(y,Z)\}^{1/l-r}.$$

(RB1) $\delta(x,y) \leq C_1\, d(x,y)^{1/l}$ für alle $x, y \in V \cap A \setminus Z$.

(RB2) Aus $d(x,y) \leq D \max\{d(x,Z), d(y,Z)\}^r$ mit $x, y \in V \cap A \setminus Z$ folgt

$$\delta(x,y) \leq C_2\, d(x,y) \max\{d(x,Z), d(y,Z)\}^{r(1/l-1)}.$$

Im ersten Fall sagt man, A sei (r,l)-regulär vom *Typ* RA, im zweiten vom *Typ* RB. Gibt es für jedes $z \in Z$ eine Umgebung in A, die dem Axiom (RA1) (bzw. (RB1)) genügt, so sagen wir kurz, A erfülle (RA1) (bzw. (RB1)) relativ Z mit Exponenten l.

Ein Stratum S eines stratifizierten Raums X mit glatter Struktur, oder genauer der Abschluß $\overline{S}$, heißt (r,l)-*regulär* (vom *Typ* RA bzw. *Typ* RB) relativ einer relativ ∂S offenen Teilmenge $Z \subset \partial S$, falls eine Überdeckung von X durch singuläre Karten $x : U \to \mathbb{R}^n$ existiert, so daß $x(S \cap U)$ eine bezüglich $x(Z \cap U)$ (r,l)-reguläre Menge (vom Typ RA bzw. Typ RB) ist.

Schließlich nennen wir A (bzw. S) *Ferrarotti–Wilson-regulär* oder kurz *FW-regulär* bezüglich Z, falls für jeden Punkt z von Z eine Umgebung in A existiert, die (r,l)-regulär bezüglich $Z \cap U$ für geeignete, von z abhängige Konstanten $l, r \geq 1$ ist.

1.6.15 Beispiel Jeder 1-reguläre Raum $A \subset \mathbb{R}^n$ ist bezüglich einer beliebigen abgeschlossenen, endlich bogenzusammenhängenden Randmenge $Z \subset A$ $(1,1)$-regulär (vom Typ RA und vom Typ RB).

1.6.16 Beispiel Für jede subanalytische Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist der Abschluß $\overline{X}$ FW-regulär bezüglich dem Rand ∂X (siehe [53]).

Einem (r,l)-regulären Raum A bzw. Stratum S wird für jedes $m \in \mathbb{N}^{>0}$ eine *kritische Konstante* $c_A^m(r,l)$ bzw. $c_S^m(r,l)$ zugeordnet:

$$c_{A/S}^m(r,l) = \begin{cases} m(lr-1) & \text{falls } A \text{ (bzw. } S\text{) vom Typ RA,} \\ mr(l-1)\frac{l'}{l} & \text{falls } A \text{ (bzw. } S\text{) vom Typ RB.} \end{cases}$$

Dabei ist im Typ RB-Fall $l' \leq l$ ein nach dem folgenden Lemma existierender Exponent, so daß (RA1) für A bzw. X erfüllt ist.

1.6.17 Lemma (Ferrarotti–Wilson [53, Lem. I.1]) *Sei* $\mathsf{V} \subset \mathbb{R}^n$ *eine Umgebung eines Punktes* $z \in \mathsf{Z}$*, so daß* $\mathsf{V} \cap \mathsf{A}$ *endlich bogenzusammenhängend ist, und* $l \in \mathbb{R}^{>0}$*. Dann ist* (RA1) *äquivalent zu*

(RA1)' *Es gilt* $\hat{\delta}(x, y) := \inf\left\{\delta(x, y), \delta(x, \mathsf{Z}) + \delta(y, \mathsf{Z})\right\} \leq \mathsf{C} \max\left\{\mathsf{d}(x, \mathsf{Z}), \mathsf{d}(y, \mathsf{Z})\right\}^{1/l}$ *für alle* $x, y \in \mathsf{V} \cap \mathsf{A} \setminus \mathsf{Z}$ *und ein geeignetes* $\mathsf{C} > 0$.

Zudem impliziert (RA1) *die Abschätzung* $l \geq 1$.

Ist schließlich über $\mathsf{V} \cap \mathsf{A}$ *das Axiom* (RB1) *erfüllt, so gilt nach eventueller Verkleinerung von* V *über* $\mathsf{V} \cap \mathsf{A}$ *auch das Axiom* (RA1).

Beweis: Gilt (RA1), so folgt (RA1)' sofort, denn

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(x, y) &\leq \delta(x, \mathsf{Z}) + \delta(y, \mathsf{Z}) \\ &\leq \mathsf{C}_1\big(\mathsf{d}(x, \mathsf{Z})^{1/l} + \mathsf{d}(y, \mathsf{Z})^{1/l}\big) \leq 2\mathsf{C}_1 \max\left\{\mathsf{d}(x, \mathsf{Z})^{1/l}, \mathsf{d}(y, \mathsf{Z})^{1/l}\right\}.\end{aligned}$$

Falls umgekehrt (RA1)' erfüllt ist, so wähle man sich zu $x \in \mathsf{V} \cap \mathsf{A} \setminus \mathsf{Z}$ zuerst Punkte $y_j \in \mathsf{V} \cap \mathsf{A} \setminus \mathsf{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ mit $y_0 = x$ und $\mathsf{d}(y_j, z) \leq \frac{1}{2^{jl}}\mathsf{d}(x, \mathsf{Z})$ für alle $j \geq 1$. Anschließend wähle man sich rektifizierbare Kurven γ_j von y_j nach y_{j+1} derart, daß die Länge μ_j des in $\mathsf{V} \cap \mathsf{A} \setminus \mathsf{Z}$ verlaufenden Teils $\leq 2\hat{\delta}(y_j, y_{j+1})$ ist. Verbindet man die Wege γ_j zu einem Weg γ in $\mathsf{V} \cap \mathsf{A}$, so ist dieser aufgrund der Konstruktion stetig und der in $\mathsf{V} \cap \mathsf{A} \setminus \mathsf{Z}$ liegende Teil $(\operatorname{im}\gamma) \setminus \mathsf{Z}$ hat endliche Länge μ. Nach Voraussetzung existiert ein $\mathsf{C} > 0$ mit

$$\begin{aligned}\delta(x, \mathsf{Z}) \leq \mu &\leq 2\hat{\delta}(x, y_1) + \sum_{j \geq 1} 2\hat{\delta}(y_j, y_{j+1}) \\ &\leq 2\mathsf{C}\Big(\mathsf{d}(x, \mathsf{Z})^{1/l} + \sum_{j \geq 1} \mathsf{d}(y_j, \mathsf{Z})^{1/l}\Big) \\ &\leq 2\mathsf{C}\Big(\mathsf{d}(x, \mathsf{Z})^{1/l} + \sum_{j \geq 1} \frac{1}{2^j}\mathsf{d}(x, \mathsf{Z})^{1/l}\Big) \leq 4\mathsf{C}\mathsf{d}(x, \mathsf{Z})^{1/l},\end{aligned}$$

das heißt das Axiom (RA1) ist erfüllt.

Wäre $l < 1$, so würde (RA1) für x genügend nahe bei Z die Ungleichungskette

$$\mathsf{d}(x, \mathsf{Z}) \leq \delta(x, \mathsf{Z}) \leq \mathsf{C}_1\mathsf{d}(x, \mathsf{Z})^{1/l} < \mathsf{d}(x, \mathsf{Z})$$

nach sich ziehen, was unmöglich ist.

Wir kommen nun zur letzten Behauptung. Zuerst verkleinern wir V zu einer Umgebung $\tilde{\mathsf{V}}$ von z derart, daß für jedes $x \in \tilde{\mathsf{V}} \cap \mathsf{A} \setminus \mathsf{Z}$ ein $y \in \mathsf{V} \cap \mathsf{Z}$ mit $\mathsf{d}(x, \mathsf{Z}) = \mathsf{d}(x, y)$ existiert. Man findet dann zu $\varepsilon > 0$ eine gegen y strebende Folge von Punkten $y_j \in \mathsf{V} \cap \mathsf{A} \setminus \mathsf{Z}$ mit $y_0 = x$, $\mathsf{d}(y_0, y_1)^{1/l} \leq \mathsf{d}(x, y)^{1/l} + \varepsilon$ sowie $\mathsf{d}(y_j, y_{j+1})^{1/l} \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$ für alle $j \geq 1$. Dazu gibt es dann rektifizierbare Kurven γ_j von y_j nach y_{j+1}, so daß $|\gamma_j| \leq \delta(y_j, y_{j+1}) + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Der aus den γ_j zusammengesetzte Weg γ verbindet nun x mit y und hat endliche Länge, die aufgrund der Voraussetzung folgendermaßen abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned}|\gamma| \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |\gamma_j| &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \delta(y_j, y_{j+1}) + \frac{\varepsilon}{2^j} \\ &\leq \mathsf{C}_1\Big(\sum_{j \in \mathbb{N}} \mathsf{d}(y_j, y_{j+1})^{1/l}\Big) + 2\varepsilon \\ &\leq \mathsf{C}_1\mathsf{d}(x, b)^{1/l} + 2(\mathsf{C}_1 + 1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Da ε beliebig war, folgt $\delta(x, Z) \leq C_1 d(x, Z)$, was zu beweisen war. □

Als letztes führen wir in diesem Abschnitt einen Begriff ein, der das Verhalten des Abstands zweier Teilmengen des Euklidischen oder eines (A)-stratifizierten Raums bei Annäherung an die gemeinsame Schnittmenge regelt.

1.6.18 Definition (vgl. [150, Def. 4.4], [111, Sec. I.5]) Seien A, Z zwei abgeschlossene Teilmengen von $O \subset \mathbb{R}^n$ offen. Man sagt dann, A, Z seien *regulär situiert* (*in* O), falls für jeden Punkt $z \in A \cap Z$ eine Umgebung V sowie Konstanten $c \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ gibt, so daß

(RS) $$d(x, A) + d(x, Z) \geq C d(x, A \cap Z)^c \qquad \text{für alle } x \in V.$$

Sind A, Z abgeschlossene Teilmengen eines (A)-stratifizierten Raums X, so heißen A, Z (*relativ* Z) *regulär situiert*, falls ein singulärer Atlas $\mathcal{U} = (U_j, x_j)_{j \in J}$ von X existiert, so daß für jede singuläre Karte x_j die Mengen $\overline{x_j(A \cap U_j)}$ und $\overline{x_j(Z \cap U_j)}$ regulär situiert in $\mathbb{R}^{n_j}$ sind.

Eine offene Umgebung T einer Untermannigfaltigkeit $S \subset O$ oder einer offenen Untermannigfaltigkeit S eines Stratums von X heißt *regulär situiert*, falls die relativ abgeschlossenen Mengen $O \setminus T$ und $\overline{S} \cap O \subset O$ bzw. $X \setminus T$ und $\overline{S} \subset X$ regulär situiert sind.

Durch einfache Überlegung ergibt sich das folgende recht nützliche Resultat.

1.6.19 Lemma *Die relativ abgeschlossenen Mengen $A, Z \subset O$ sind genau dann regulär situiert, wenn es für jeden Punkt $z \in A \cap Z$ eine Umgebung V sowie Konstanten $c' \in \mathbb{N}$ und $C' > 0$ gibt, so daß*

(RS') $$d(x, Z) \geq C' d(x, A \cap Z)^{c'} \qquad \textit{für alle } x \in V.$$

1.7 Fortsetzungstheorie für Whitney-Funktionen auf regulären Räumen

Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ auf einem (A)-stratifizierten Raum X induziert über jedem Stratum S eine glatte Einschränkung $f_{|S} \in \mathcal{C}^\infty(S)$. Hat man umgekehrt eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $g : S \to \mathbb{R}$ gegeben, so ist wegen der Normalität von X relativ einfach zu entscheiden, ob g zu einer stetigen Funktion auf X fortgesetzt werden kann. Bekanntlich ist dies genau dann der Fall, wenn für jedes $x \in \partial S$ und jede Folge $x_k \to x$ der Grenzwert $\lim_{k \to \infty} g(x_k)$ existiert und unabhängig von der speziellen Wahl der Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist. Es stellt sich aber - vor allem im Hinblick auf analytische Anwendungen - die viel weitergehende Frage, ob man vernünftige Kriterien an ein glattes $g : S \to \mathbb{R}$ angeben kann, die garantieren, daß g eine glatte Fortsetzung auf X besitzt. Zwar erscheint es unmöglich, eine so einfache Bedingung wie im stetigen Fall auch für die Fortsetzungstheorie glatter Funktionen zu finden, jedoch haben wir mit der Theorie der Jets und Whitney-Funktionen gute Werkzeuge an der Hand, die uns in vielen Situationen weiterhelfen können. Insbesondere gelingt es damit, Kriterien anzugeben, wann eine Whitney-Funktion $G : S \to \mathbb{R}$ vom Typ $\mathcal{C}^m$, die am Rand von S genügend schnell abfällt, zu einer Whitney-Funktion F auf X ausgedehnt werden kann. Dazu muß zuerst geklärt werden, was unter dem Begriff „flach auf dem Rand“ zu verstehen ist.

Zur Vereinfachung der Notation bezeichne für den Rest dieses Abschnitts $\mathcal{U} = (U_j, x_j)_{j\in J}$ eine Kartenüberdeckung auf dem vorgegebenen (A)-stratifizierten Raum X mit glatter Struktur $\mathcal{C}^\infty$.

1.7.1 Definition Sei $m \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ eine lokal abgeschlossene Menge, und $Z \subset A$ relativ abgeschlossen. Ein m-Jet $F \in J^m(A)$ auf A heißt dann *flach* von der *Ordnung* $c \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ über Z, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(FJ1) Es gilt $F_{|Z} = 0$.

(FJ2) Für jeden Punkt $z \in Z$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$ ist

$$\lim_{\substack{x\to z\\ x\in A\setminus Z}} \frac{F^{(\alpha)}(x)}{d(x,Z)^c} = 0.$$

Ein m-Jet $F \in J^m_{\mathcal{U}}(\overline{S})$ auf dem Abschluß eines Stratums S von X heißt *flach* von der *Ordnung* c über $Z \subset \partial S$ abgeschlossen, falls in jeder singulären Karte x_j der m-Jet $F_j \in J^m(x_j(\overline{S}\cap U_j))$ flach über $x_j(Z\cap U_j)$ von der Ordnung c ist.

Der Raum der von der Ordnung c über Z flachen Jets auf A (bzw. $\overline{S}$) wird mit $\mathcal{J}^{m,c}(Z;A)$ (bzw. $\mathcal{J}^{m,c}_{\mathcal{U}}(Z;\overline{S})$) bezeichnet.

Schließlich setzen wir noch

$$\mathcal{J}^m(Z;A) = \left\{F \in \mathcal{E}^m(A) \,\middle|\, F^{(\alpha)}_{|Z} = 0 \text{ für alle } |\alpha| \leq m\right\},$$
$$\mathcal{J}^m_{\mathcal{U}}(Z;\overline{S}) = \left\{F \in \mathcal{E}^m_{\mathcal{U}}(\overline{S}) \,\middle|\, F^{(\alpha)}_{|Z} = 0 \text{ für alle } |\alpha| \leq m\right\},$$

und bemerken, daß diese Definition für den Fall, daß A eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, mit der in Anhang C gegebenen übereinstimmt, daß dann also $\mathcal{J}^m(Z;A) = \ker J^m$ gilt, wobei $J^m : \mathcal{C}^m(A) \to \mathcal{E}^m(Z)$ die Jet-Abbildung darstellt.

Wir haben jetzt alle Zutaten, die zur Formulierung und zum Beweis des angekündigten Fortsetzungsresultats notwendig sind.

1.7.2 Verallgemeinertes Lemma von Hesténès (Ferrarotti–Wilson [53]) *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ lokal abgeschlossen, $Z \subset A$ eine relativ abgeschlossene, lokal endlich bogenzusammenhängende Randmenge, bezüglich der A (r,l)-regulär ist, und F ein Jet der Ordnung m auf A. Falls die Einschränkung $F_{|A\setminus Z}$ eine $\mathcal{C}^m$-Whitney-Funktion auf $A \setminus Z$ darstellt, und F über Z flach von der Ordnung $c \geq c^m_A(r,l)$ ist, so ist F sogar eine Whitney-Funktion der Klasse $\mathcal{C}^m$ auf A.*

Aus dem verallgemeinerten Lemma von Hesténès ergibt sich unmittelbar das Hauptresultat dieses Abschnitts, der folgende

1.7.3 Fortsetzungssatz *Sei X ein stratifizierter Raum mit glatter Struktur, S ein (r,l)-reguläres Stratum, und $\mathcal{U}$ eine Kartenüberdeckung von X. Jeder m-Jet $G \in J^m_{X,\mathcal{U}}(\overline{S})$, der flach bezüglich ∂S von der Ordnung $c \geq c^m_S(r,l)$ ist, kann dann zu einer Whitney-Funktion $F \in \mathcal{E}^m_{X,\mathcal{U}}(X)$ mit $F_{|S} = G$ und $F_{|X\setminus S} = 0$ fortgesetzt werden.*

Beweis von 1.7.2: Wir folgen der Darstellung in [53]. Aufgrund des Fortsetzungssatzes C.3.2 von Whitney, und da $F_{|A\setminus Z}$ eine $\mathcal{C}^m$-Whitney-Funktion darstellt, genügt es zu zeigen, daß für jedes $z \in Z$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$

$$\frac{(R_x^m F)^{(\alpha)}(y)}{|x-y|^{m-|\alpha|}} \to 0 \tag{1.7.1}$$

gilt, falls x und y gegen z streben. Sei nun $V \cap A$ mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen eine endlich bogenzusammenhängende Umgebung von z gemäß Definition 1.6.14. Offensichtlich kann dabei V so gewählt werden, daß auch $V \cap Z$ endlich bogenzusammenhängend ist. Sei weiter $\gamma : [0,1] \to V \cap A$ eine rektifizierbare Kurve mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Der Bogen $\Delta := \operatorname{im} \gamma$ besitzt dann eine eindeutige Partition der Form $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ mit $\Delta_1 \subset X \setminus Z$ und $\Delta_2 \subset Z$. Dabei sind die Δ_i offensichtlich rektifizierbar. Da $V \cap Z$ endlich bogenzusammenhängend ist, können wir γ derart wählen, daß $|\Delta_1| \leq 2\hat{\delta}(x,y)$ (mit $\hat{\delta}$ aus Lemma 1.6.17) und so daß

$$\sup_{\xi \in \Delta} d(\xi, Z) \leq \max\big\{d(x,Z), d(y,Z)\big\} + 2\hat{\delta}(x,y) \leq 3 \max\big\{\delta(x,Z), \delta(y,Z)\big\}. \tag{1.7.2}$$

Nach Voraussetzung stellt $F_{A\setminus Z}$ eine Whitney-Funktion dar, es existiert also ein $f \in \mathcal{C}^m(O)$ mit $F_{A\setminus Z} = J^m(f)$, wobei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und $A \setminus Z \subset O$ abgeschlossen. Die Funktion $g = D^\alpha(f - T_x^m F) \in \mathcal{C}^{m-|\alpha|}(O)$ mit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$ ist dann flach auf x von der Ordnung $m - |\alpha|$, und es gilt $(R_x^m F)^{(\alpha)}(y) = g(y)$ für alle $y \in A \setminus Z$. Aufgrund der Tatsache, daß $F_{|Z} = 0$ und Δ kompakt ist, folgt analog dem Beweis von Lemma 1.6.11 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \big|(R_x^m F)^{(\alpha)}(y)\big| &\leq n^{\frac{m-|\alpha|}{2}} \hat{\delta}(x,y)^{m-|\alpha|} \sup_{\substack{\xi \in \Delta_1 \\ |\beta| = m}} \big|F^{(\beta)}(\xi) - F^{(\beta)}(x)\big| \\ &\leq C\, \hat{\delta}(x,y)^{m-|\alpha|}\, |F|_{\Delta,m}. \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Andererseits gilt wegen der Flachheits-Voraussetzung an F und (1.7.2)

$$|F|_{\Delta,m} = o\left(\sup_{\xi\in\Delta} d(\xi,Z)^c\right) = o\left(\max\big\{\delta(x,Z),\delta(y,Z)\big\}^c\right), \tag{1.7.4}$$

wobei wir die Landau-Notation verwendet haben (siehe C.2.1 im Anhang). Folglich ist

$$\frac{\big|(R_x^m F)^{(\alpha)}(y)\big|}{|x-y|^{m-|\alpha|}} = o\left(\left(\frac{\hat{\delta}(x,y)}{|x-y|}\right)^{m-|\alpha|} \max\big\{\delta(x,Z),\delta(y,Z)\big\}^c\right) \tag{1.7.5}$$

woraus sich die Beziehung

$$\frac{\big|(R_x^m F)^{(\alpha)}(y)\big|}{|x-y|^{m-|\alpha|}} = o\left(\left(\frac{\hat{\delta}(x,y)}{|x-y|}\right)^{m-|\alpha|} \max\big\{d(x,Z),d(y,Z)\big\}^{c/l'}\right) \tag{1.7.6}$$

ergibt, wobei $l' \leq l$ der nach Lemma 1.6.17 existierende Exponent in (RA1) ist. Wir behandeln nun den Typ RA und den Typ RB-Fall getrennt, um (1.7.1) abzuleiten.

Typ RA: Erst einmal bemerken wir, daß in diesem Fall $l = l'$. Sei nun D die Konstante aus dem Axiom (RA2). Falls $|x-y| \leq D \max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^r$, so folgt aus (RA2) und $\hat{\delta} \leq \delta$

$$\frac{\hat{\delta}(x,y)}{|x-y|} \leq C_2 \max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^{1/l-r}.$$

Gilt jedoch $|x-y| \geq D \max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^r$, so folgt mit (RA1)

$$\frac{\hat{\delta}(x,y)}{|x-y|} \leq \frac{C_1}{D} \max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^{1/l-r}.$$

In jedem Fall ergibt sich also wegen (1.7.6)

$$\begin{aligned}
\frac{\left|(R_x^m F)^{(\alpha)}(y)\right|}{|x-y|^{m-|\alpha|}} &= o\left(\left(\max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^{1/l-r}\right)^{m-|\alpha|} \max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^{c/l}\right) \\
&= o\left(\max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^{(1/l-r)(m-|\alpha|)+c/l}\right) \\
&= o\left(\max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^{|\alpha|(r-1/l)}\right),
\end{aligned}$$

wobei ausgenützt wurde, daß $c \geq c_A^m(r,l) = m(lr-1)$. Da $(r - 1/l) \geq 0$ wegen $l, r \geq 1$ erhalten wir somit (1.7.1).

Typ RB: Sei zuerst $|x-y| \leq D \max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^r$. Dann folgt aus (RB2) und $\hat{\delta} \leq \delta$

$$\frac{\hat{\delta}(x,y)}{|x-y|} \leq C_2 \max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^{r(1/l-1)}.$$

Falls jedoch $|x-y| \geq D \max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^r$, so ist wegen (RB1)

$$\frac{\hat{\delta}(x,y)}{|x-y|} \leq \frac{C_1}{D} \left|x-y\right|^{(1/l-1)} \leq \left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^{r(1/l-1)}.$$

Daraus schließt man mit $c \geq c_A^m(r,l) = rm(l-1)\frac{l'}{l}$

$$\begin{aligned}
\frac{\left|(R_x^m F)^{(\alpha)}(y)\right|}{|x-y|^{m-|\alpha|}} &= o\left(\max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^{r(1/l-1)(m-|\alpha|)+c/l'}\right) \\
&= o\left(\max\left\{d(x,Z), d(y,Z)\right\}^{|\alpha| r(1-1/l)}\right).
\end{aligned}$$

Also ist auch im Typ RB-Fall (1.7.1) erfüllt. Das war zu zeigen. □

1.7.4 Bemerkung Das klassische Lemma von Hesténès (siehe [78] oder [150, Lem. 4.3]) erhält man aus dem verallgemeinerten, indem man für A eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ nimmt. Diese ist dann 1-regulär, insbesondere also (1, 1)-regulär bezüglich $Z \subset A$. Ein m-Jet F auf A, der über Z verschwindet, und auf $A \setminus Z$ eine Whitney-Funktion der Klasse $\mathcal{C}^m$ darstellt, ist dann nach Hesténès schon eine $\mathcal{C}^m$-Funktion auf A.

1.7.5 Bemerkung Man mag sich die Frage stellen, ob die auf den ersten Blick etwas kompliziert erscheinende (r,l)-Regularität tatsächlich notwendig ist, um ein verallgemeinertes

Hesténès-Lemma beweisen zu können. In ihrem Artikel [53] haben FERRAROTTI–WILSON anhand eines Gegenbeispiels jedoch gezeigt, daß die Whitney–Tougeron-Regularität allein nicht genügt, um flache Jets wie in 1.7.2 als Whitney-Funktionen zu identifizieren, und daß ein weiterer Regularitätsbegriff, der das Verhalten bei Annäherung an den Rand regelt, für ein Fortsetzungsresultat à la HESTÉNÈS notwendig ist.

1.7.6 Bemerkung Das erste Fortsetzungsresultat für glatte Funktionen auf einer speziellen Klasse stratifizierter Räume, nämlich auf Mannigfaltigkeiten-mit-Ecken, stammt von SEELEY [141]. Das Resultat von SEELEY besagt letztlich, daß für jede abgeschlossen in einen $\mathbb{R}^n$ eingebettete Mannigfaltigkeit-mit-Ecken X ein stetiger Fortsetzungsoperator

$$e : \mathcal{C}^\infty(X) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

existiert. Für einen beliebigen stratifizierten Unterraum $Y \subset \mathbb{R}^n$ gilt eine analoge Aussage im allgemeinen nicht.

Multipliziert man einen auf über Z von der Ordnung c flachen Jet F auf A mit einer Whitney-Funktion G auf A, so ist das Produkt FG natürlich wieder flach über Z von der Ordnung c. Verlangt man jedoch nur, daß G eine Whitney-Funktion auf $A \setminus Z$ ist, so liegt das Produkt FG nicht notwendigerweise wieder im Raum der von der Ordnung c relativ Z flachen Jets. Im folgenden werden wir Kriterien an G angeben, die garantieren, daß das Produkt FG flach von der Ordnung $d \leq c$ relativ Z ist.

1.7.7 Definition Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ lokal abgeschlossen, $m \in \mathbb{N}$, und $Z \subset \overline{A}$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge, so daß $A \setminus Z$ dicht in A liegt. Eine Whitney-Funktion $G \in \mathcal{E}^m(A \setminus Z)$ heißt *temperiert relativ* Z von der *Klasse* $\mathcal{C}^m$ und *Ordnung* $c \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, falls entweder $Z = \emptyset$ oder falls für jedes $z \in Z$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so daß

$$\sup_{y \in V \cap A \setminus Z} G^{(\alpha)}(y)\, d(y, Z)^c < \infty.$$

Eine Whitney-Funktion $G \in \mathcal{E}^m_{\mathfrak{U}}(S)$ über einem Stratum S von X heißt *temperiert relativ* ∂S von der *Klasse* $\mathcal{C}^m$ und *Ordnung* $c \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, falls in jeder Karte x_j die Whitney-Funktion $G_j \in \mathcal{E}^m(x_j(S \cap U_j))$ temperiert relativ $x_j(\partial S \cap U_j)$ von der Klasse $\mathcal{C}^m$ und Ordnung c ist.

Der offensichtlich lineare Raum aller relativ Z (bzw. ∂S) temperierten Whitney-Funktionen der Klasse $\mathcal{C}^m$ und Ordnung c auf $A \setminus Z$ (bzw. S) werde mit $\mathcal{M}^{m,c}(Z; A)$ (bzw. $\mathcal{M}^{m,c}_{\mathfrak{U}}(\partial S; \overline{S})$) bezeichnet. Zudem setzen wir $\mathcal{M}^m(Z; A) := \bigcup_{c \geq 0} \mathcal{M}^{m,c}(Z; A)$ und $\mathcal{M}^m_{\mathfrak{U}}(\partial S; \overline{S}) := \bigcup_{c \geq 0} \mathcal{M}^{m,c}_{\mathfrak{U}}(\partial S; \overline{S})$.

Eine Whitney-Funktion $G \in \mathcal{E}^\infty(A \setminus Z)$ heißt *temperiert relativ* Z von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$, falls für jedes $x \in A$ eine offene Umgebung O derart existiert, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $c_m \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ gewählt werden kann, so daß G temperiert relativ $O \cap Z$ von der Klasse $\mathcal{C}^m$ und Ordnung c_m ist. Dieser Raum werde mit $\mathcal{M}^\infty(Z; A)$ bezeichnet. In analoger Weise definiert man $\mathcal{M}^\infty_{\mathfrak{U}}(Z; \overline{S})$, und nennt ihn den Raum der *relativ* Z *temperierten* Whitney-Funktionen der *Klasse* $\mathcal{C}^\infty$ auf S.

1.7.8 Proposition *Unter den Voraussetzungen der vorangehenden Definition und der zusätzlichen Annahme, daß* Z *abgeschlossen in* A *liegt, seien* c, d *zwei nichtnegative reelle*

Zahlen. Ist dann $F \in J^m(A)$ *ein auf* Z *von der Ordnung* $c+d$ *flacher Jet, und* $G \in \mathcal{E}^m(A \setminus Z)$ *temperiert von der Ordnung* d*, so kann das Produkt* $F \cdot G \in \mathcal{E}^m(A \setminus Z)$ *durch* 0 *zu einem auf* Z *von der Ordnung* c *flachen Jet* $\in J^m(A)$ *fortgesetzt werden, in Zeichen:*

$$\mathcal{M}^{m,d}(Z;A) \cdot \mathcal{J}^{m,c+d}(Z;A) \subset \mathcal{J}^{m,c}(Z;A).$$

Zudem stellt der Raum $\mathcal{M}^\infty(Z;A)$ *eine Multiplieralgebra für das Ideal* $\mathcal{J}^\infty(Z;A) \subset \mathcal{E}^\infty(A)$ *dar, das heißt* $\mathcal{M}^\infty(Z;A)$ *ist eine Algebra, und es gilt*

$$\mathcal{M}^\infty(Z;A) \cdot \mathcal{J}^\infty(Z;A) \subset \mathcal{J}^\infty(Z;A).$$

Für den Fall, daß Z *abgeschlossen im Rand* ∂S *eines Stratums* S *von* X *liegt, gilt in analoger Weise*

$$\mathcal{M}^{m,d}_{\mathcal{U}}(Z;\overline{S}) \cdot \mathcal{J}^{m,c+d}_{\mathcal{U}}(Z;\overline{S}) \subset \mathcal{J}^{m,c}_{\mathcal{U}}(Z;\overline{S}).$$

Ebenso ist $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{U}}(Z;\overline{S})$ *Multiplieralgebra von* $\mathcal{J}^\infty_{\mathcal{U}}(Z;\overline{S}) \subset \mathcal{E}^\infty_{\mathcal{U}}(\overline{S})$.

Beweis: Der erste Teil der Behauptung ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen 1.7.1 und 1.7.7. Der zweite Teil ist im wesentliche eine Konsequenz aus dem Satz von Taylor. Um den Nachweis im Detail zu führen, wähle man sich zuerst eine offene Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ derart, daß A abgeschlossen in O liegt. Nach dem Fortsetzungssatz von Whitney C.3.2 existiert zu $F \in \mathcal{E}^\infty(A)$ eine glatte Funktion f auf O, so daß $F = f \mod \mathcal{J}^\infty(A;O)$. Falls F sogar in $\mathcal{J}^\infty(Z;A)$ liegt, verschwinden alle partiellen Ableitungen von f auf Z. Folglich kann man das Produkt aus F und einem Element $G \in \mathcal{M}^\infty(Z;A)$ durch 0 zu einem Jet auf A fortsetzen. Es bleibt zu zeigen, daß der so definierte Jet $F \cdot G$ wieder eine Whitney-Funktion ist. Genauer gesagt muß nachgewiesen werden, daß für alle $z \in Z$, $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq m$

$$\frac{(R^m_x(F \cdot G))^{(\alpha)}(y)}{|x-y|^{m-|\alpha|}} \to 0, \tag{1.7.7}$$

sofern $x, y \in A$ gegen z streben. Da alle partiellen Ableitungen von f über Z jedoch verschwinden, und G temperiert relativ Z von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ ist, muß 1.7.7 erfüllt sein. Das ergibt die Behauptung. □

In den folgenden Überlegungen dieses Abschnitts konstruieren wir nichttriviale temperierte Funktionen. Zuerst wird dafür in Lemma 1.7.9 eine spezielle Teilung der Eins für das Komplement einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ bereitgestellt. Das entsprechende Resultat spielt auch für den Beweis des Fortsetzungssatzes von Whitney eine wesentliche Rolle und wird hier in einer etwas allgemeineren Form als üblich vorgestellt (vgl. Malgrange [111, Lem. 3.1] oder Tougeron [150, Lem. 2.1]). Anschließend zeigen wir, daß zwei regulär situierte Mengen durch eine temperierte Funktion getrennt werden können, und zuletzt, daß die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, die sich aus temperierten Funktionen der Klasse $\mathcal{C}^m$ mit $m \in \mathbb{N}^{>0}$ ergibt, ebenfalls temperiert von der Klasse $\mathcal{C}^m$ ist.

1.7.9 Lemma *Sei* $d \in \mathbb{N}^{>0}$ *und* $\delta > 0$ *reell, wobei für den Fall* $d = 1$ *angenommen wird, daß auch* $\delta = 1$ *gilt. Dann existiert zu jeder vorgegebenen kompakten Menge* $K \subset \mathbb{R}^n$ *eine abzählbare Familie von glatten Funktionen* $\phi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$*,* $j \in J$*, mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Für alle* $j \in J$ *ist* $\phi_j \geq 0$.

(2) *Die Familie der Träger* $\operatorname{supp} \phi_j$ *ist lokalendlich, wobei die Anzahl* $\mathsf{N}(\mathsf{x})$ *der* $\operatorname{supp} \phi_j$, *in denen* x *liegt, durch* 4^n *beschränkt ist, d.h. es gilt* $\mathsf{N}(\mathsf{x}) \leq 4^n$.

(3) $\sum_{j \in J} \phi_j(\mathsf{x}) = 1$ *für alle* $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathsf{K}$.

(4) *Für alle* j *gilt* $2\delta\, \mathsf{d}(\operatorname{supp} \phi_j, \mathsf{K})^{\mathsf{d}} \geq \operatorname{diam}(\operatorname{supp} \phi_j)$.

(5) *Zu jedem* $\mathfrak{m} \in \mathbb{N}$ *gibt es eine Konstante* $\mathsf{D}_{\mathfrak{m}}$, *die nur von* d, δ, n *und* $\mathfrak{m}$ *abhängt, so daß für alle* $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathsf{K}$

$$\left|\partial^\alpha \phi_j(\mathsf{x})\right| \leq \mathsf{D}_{\mathfrak{m}} \left(1 + \frac{1}{\mathsf{d}(\mathsf{x}, \mathsf{K})^{\mathsf{d}|\alpha|}}\right), \qquad |\alpha| = \mathfrak{m},\ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Beweis: Für jedes $p \in \mathbb{N}$ zerlegen wir den $\mathbb{R}^n$ erst einmal mittels der Hyperebenen $\mathsf{x}_k = \frac{j_k}{(\delta 2)^{p\mathsf{d}}}$, wobei $k = 1, \cdots, n$ und j_k die ganzen Zahlen durchläuft, in abgeschlossen Würfel mit der Seitenlänge $\frac{1}{(\delta 2^p)^{\mathsf{d}}}$. Sei Σ_p die Menge dieser Würfel.

Sei J_0 die Menge aller Würfel W aus Σ_0, so daß $\mathsf{d}(\mathsf{K}, W) \geq \frac{\sqrt{n}}{\delta^{\mathsf{d}}}$. Wir definieren nun J_p rekursiv. Sie besteht aus all denjenigen Würfeln $W \in \Sigma_p$, die nicht in einem Würfel aus $J_0, \cdots, J_{p-1}$ enthalten sind und die der Abschätzung $\mathsf{d}(\mathsf{K}, W) \geq \frac{\sqrt{n}}{\delta^{\mathsf{d}} 2^p}$ genügen. Schließlich setze man $J = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} J_p$.

Trifft ein $W \in \Sigma_p$ einen Würfel W' aus $J_0, \cdots, J_{p-1}$, so gilt:

$$\mathsf{d}(\mathsf{K}, W) \geq \mathsf{d}(\mathsf{K}, W') - \frac{\sqrt{n}}{\delta^{\mathsf{d}} 2^{p\mathsf{d}}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\delta^{\mathsf{d}} 2^{p-1}} - \frac{\sqrt{n}}{\delta^{\mathsf{d}} 2^{p\mathsf{d}}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\delta^{\mathsf{d}} 2^p},$$

folglich ist W entweder in einem der Würfel aus $J_0, \cdots, J_{p-1}$ enthalten oder liegt in J_p. Also stellt die Familie J eine Überdeckung von $\mathbb{R}^n \setminus \mathsf{K}$ dar, und die Würfel aus J_p treffen höchsten Würfel aus J_{p-1},J_p und J_{p+1}.

Sei als nächstes $\psi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion, so daß $\psi(\mathsf{x}) = 1$, falls $|\mathsf{x}_k| \leq \frac{1}{2}$ für jedes $k = 1, \cdots, n$, und $\psi(\mathsf{x}) = 0$, sofern ein Index k mit $|\mathsf{x}_k| \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4^{\mathsf{d}}}$ existiert. Für $W \in J$ setzen wir $\psi_W(\mathsf{x}) = \psi\left(\frac{\mathsf{x} - \mathsf{x}_W}{\mathsf{l}_W}\right)$, wobei x_W das Zentrum von W bezeichnet und l_W seine Seitenlänge. Offensichtlich ist dann die Familie $(\operatorname{supp} \psi_W)_{W \in J}$ lokalendlich und überdeckt $\mathbb{R}^n \setminus \mathsf{K}$ mit Kompakta. Wir setzen deshalb

$$\phi_W(\mathsf{x}) = \frac{\psi_W(\mathsf{x})}{\sum_{j \in J} \psi_j(\mathsf{x})}, \qquad \mathsf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathsf{K}.$$

Man sieht dann leicht, daß die Familie der ϕ_W ($W \in J$) die Bedingungen (1) bis (3) erfüllt.

Falls $W \in j_p$, so gilt die folgende Ungleichungskette:

$$\mathsf{d}(\mathsf{K}, \operatorname{supp} \phi_W) \geq \mathsf{d}(\mathsf{K}, W) - \frac{\sqrt{n}}{\delta^{\mathsf{d}} 2^{(p+2)\mathsf{d}}} \geq \frac{3\sqrt{n}}{\delta^{\mathsf{d}} 2^{p+2}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2 \sqrt[\mathsf{d}]{n}\, \delta^{\mathsf{d}-1}} \sqrt[\mathsf{d}]{\operatorname{diam}(\operatorname{supp} \phi_W)}.$$

also ergibt sich auch (4).

Offensichtlich gilt für alle α mit $|\alpha| \leq m$

$$|D^\alpha \psi_W(x)| \leq \left| \frac{1}{l_W^{|\alpha|}} D^\alpha \psi \left(\frac{x - x_W}{l_W}) \right) \right| \leq \frac{D}{l_W^{|\alpha|}},$$

wobei D eine nur von m (und der Wahl von ψ) abhängende Konstante ist. Da andererseits für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$

$$1 \leq \sum_{W \in J} \psi_W(x) \leq 4^n,$$

folgt aus der Leibniz-Regel und den vorangehenden Ungleichungen die Existenz einer nur von m und n abhängenden Konstante $D_1 > 0$ derart, daß

$$|D^\alpha \phi_W(x)| \leq \frac{D_1}{l_W^{|\alpha|}}.$$

Für $W \in J_0$ ist $|D^\alpha \phi_W(x)| \leq \frac{D_1}{\delta^{d|\alpha|}}$. Sei nun $W \in J_p$, $p \geq 1$. Für jeden W enthaltenden Würfel W' aus Σ_{p-1} gilt dann notwendigerweise:

$$d(K, W') < \frac{\sqrt{n}}{\delta^d 2^{p-1}},$$

also für alle $x \in W$

$$d(x, K) \leq \frac{\sqrt{n}}{\delta^d 2^{p-1}} + \operatorname{diam}(W') \leq \frac{\sqrt{n}}{\delta^d 2^{p-2}},$$

und für alle $x \in \operatorname{supp} \phi_W$

$$d(x, K) \leq \frac{\sqrt{n}}{\delta^d 2^{p-2}} + \frac{\sqrt{n}}{\delta^d 2^{d(p+2)}} \leq D_2 \sqrt[d]{l_W},$$

wobei $D_2 > 0$ nur von c, δ und n abhängt. Somit ist für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$

$$|D^\alpha \phi_W(x)| \leq D_1 \left(1 + \frac{D_2^{d|\alpha|}}{d(x, K)^{d|\alpha|}} \right),$$

woraus sich auch die letzte Behauptung des Lemmas ergibt. □

1.7.10 Lemma (*vgl.* TOUGERON [150, Lem. 4.5]) *Seien* A, Z *zwei regulär situierte Teilmengen von* $O \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Dann gibt es eine Funktion* $\phi \in \mathcal{M}^\infty(A \cap Z; O)$ *derart, daß* $\phi = 0$ *über einer Umgebung von* $A \setminus (A \cap Z)$ *und* $\phi = 1$ *über einer Umgebung von* $B \setminus (A \cap Z)$.

BEWEIS: Wir gehen analog wie in [150] vor. Zum Nachweis der Behauptung genügt es, jedem Punkt $z \in O$ eine offene Umgebung $V_z \subset O$ und eine Funktion $\phi_z \in \mathcal{E}(V_x \setminus (A \cap Z))$ so zuzuordnen, daß $\phi_z = 0$ auf einer Umgebung von $(V_z \cap A) \setminus (A \cap Z)$ ist, $\phi_z = 1$ auf einer Umgebung von $(V_z \cap Z) \setminus (A \cap Z)$ und so daß für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ Konstanten $c' \in \mathbb{N}^{>0}$ und $C' > 0$ derart existieren, daß die folgende Abschätzung erfüllt ist:

$$\left| D^\alpha \phi_z(x) \right| \leq C' \left(1 + \frac{1}{d(x, A \cap Z)^{c'}} \right) \qquad \text{für alle } x \in V_z \setminus (A \cap Z).$$

Hat man nämlich derartige ϕ_z konstruiert, so kann man $\phi = \sum_{j\in\mathbb{N}} \psi_j \, \phi_{x_j}$ setzen, wobei $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine lokalendliche Familie glatter Funktionen aus O ist, so daß $\sum_{j\in\mathbb{N}} \psi_j = 1$ und $\operatorname{supp}\psi_j \subset V_{z_j}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt, wobei die Punkte $z_j \in O$ geeignet gewählt seien.

Wir können $z \in A \cap Z$ annehmen, der Fall $z \notin A \cap Z$ ist schließlich trivial. Dann gibt es eine offene Umgebung V_z von z, die relativ kompakt in O ist, und so daß über V_z eine Ungleichung der Form (RS) (siehe S. 54) gültig ist. Sei unter diesen Voraussetzungen $K \subset A$ ein Kompaktum, so daß $d(x, A) = d(x, K)$ für alle $x \in V_z$.

Wir betrachten nun zu K und $d = \delta = 1$ die Konstruktion aus dem vorangehenden Lemma und ordnen jedem $W \in J$ eine ganze Zahl λ_W folgendermaßen zu: falls ein $x \in \operatorname{supp}\phi_W$ existiert mit $d(x, K) < \frac{1}{2}d(x, Z)$, so sei $\lambda_W = 0$, ansonsten sei $\lambda_W = 0$. Setzt man nun $\phi_z = \sum_{W\in J} \lambda_w \, \phi_W$ so ist $\phi_z \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$ und $\phi_z(x) = 0$ falls $d(x, K) < \frac{1}{2}d(x, Z)$. Folglich setzt sich ϕ_z zu einer (ebenfalls mit ϕ_z bezeichneten) $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus (K \cap Z)$, die zudem auf einer Umgebung von $K \setminus (K \cap Z)$ verschwindet. Andererseits ist $\phi_z = 1$ auf einer Umgebung von $Z \setminus (K \cap Z)$, denn durchläuft W all die Indizes derart, daß $\operatorname{supp}\phi_W \cap Z$ nichtleer ist, so gilt für jedes $x \in \operatorname{supp}\phi_W$

$$d(x, K) \geq d(\operatorname{supp}\phi_W, K) \geq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\phi_W) \geq \frac{1}{2}d(x, Z),$$

also $\lambda_W = 1$. Sei $x \in V_z \setminus (A \cap Z)$, insbesondere also $d(x, K) = d(x, A)$. Falls $d(x, A) < \frac{1}{2}d(x, Z)$, so hat man $\phi_z(x) = 0$, falls $d(x, A) \geq \frac{1}{2}d(x, Z)$, so gilt nach Lemma 1.7.9 und (RS')

$$|D^\alpha \phi_z(x)| \leq C' \, d(x, A \cap Z)^{-c|\alpha|},$$

wobei C' eine geeignete Konstante ist. Damit ist das Lemma gezeigt. □

Zur Formulierung des letzten Resultats in diesem Abschnitt benötigen wir den Begriff einer tubularen Umgebung. Zwar wird dieser Begriff ausführlich erst in Abschnitt 3.1 vorgestellt, wir führen ihn hier aber schon einmal in seiner einfachsten Form ein und verweisen für weitere Einzelheiten auf das Kapitel 3. Unter einer *tubularen Umgebung* einer Untermannigfaltigkeit $S \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine offene Umgebung $T \subset \mathbb{R}^n$ von S derart, daß für jedes $x \in T$ genau ein Punkt $\pi(x) \in S$ existiert mit $d(x, \pi(x)) = d(x, S)$, und so daß $\pi(x) + t(x - \pi(x)) \in T$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt. Die Abbildung π wird die *Projektion* der tubularen Umgebung genannt.

1.7.11 Satz *Sei $m \in \mathbb{N}^{>0}$, $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Klasse $\mathcal{C}^m$, und $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine regulär situierte tubulare Umgebung von $\{0\} \times S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Desweiteren sei $f : T \to \mathbb{R}^n$ eine relativ $\{0\} \times \partial S$ temperierte Funktion der Klasse $\mathcal{C}^m$. Dann existiert eine regulär situierte tubulare Umgebung $T^m \subset T$ von $\{0\} \times S$ zusammen mit einer eindeutig bestimmte Lösung $\gamma : T^m \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto \gamma(t, x) = \gamma_x(t)$ des Anfangswertproblems*

$$\dot{\gamma}_x(t) = f(t, \gamma_x(t)), \qquad \gamma_x(0) = x.$$

Überdies können T^m und γ so gewählt werden, daß γ temperiert relativ $\{0\} \times \partial S$ von der Klasse $\mathcal{C}^m$ ist.

Beweis: Aufgrund des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen ist es möglich, lokale Lösungen global zusammenzukleben, folglich können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß S eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Nach Voraussetzung an T gibt es dann stetige Funktionen $\varepsilon : S \to \mathbb{R}^{>0}$ und $\delta : S \to \mathbb{R}^{>0}$ sowie Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ und $C_1, C_2 > 0$ derart, daß für alle $x \in S$ erstens

$$\varepsilon(x) \geq C_1\, d(x, \partial S)^{c_1} \quad \text{und} \quad \delta(x) \geq C_2\, d(x, \partial S)^{c_2}$$

gilt und zweitens $B^1_{4\delta(x)}(0) \times B^n_{4\varepsilon(x)}(x) \subset T$. Dabei bezeichnet $B^k_r(y)$ die Kugel in $\mathbb{R}^k$ um y vom Radius r. Als nächstes setzen wir für $x \in S$

$$\begin{aligned} L(x) &:= 1 + \sup\left\{ \|\partial_y f(t,y)\| \;\middle|\; (t,y) \in B^1_{3\delta(x)}(0) \times B^n_{3\varepsilon(x)}(x) \right\}, \\ M(x) &:= \sup\left\{ \|f(t,y)\| \;\middle|\; (t,y) \in B^1_{3\delta(x)}(0) \times B^n_{3\varepsilon(x)}(x) \right\}, \end{aligned}$$

und definieren $\tau(x) := \min\left\{1, \delta(x), \frac{\varepsilon(x)}{M(x)}\right\}$. Dann gilt $\tau(x) \geq C_3\, d(x, \partial S)^{c_3}$ mit geeigneten Konstanten $c_3 \in \mathbb{N}$ und $C_3 > 0$, folglich ist

$$T^0 := \bigcup_{x \in S} B^1_{\tau(x)}(0) \times \left(B^n_{\varepsilon(x)}(x) \cap \pi^{-1}(x) \right)$$

eine regulär situierte Umgebung von S in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Schließlich definieren wir noch einen Banachraum E durch

$$E := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}(T^0, \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \varphi(t,y) \in \overline{B^n_{2\varepsilon(\pi(y))}(\pi(y))} \text{ für } (t,y) \in T^0 \right\},$$

wobei die Norm durch $\|\varphi\|_E := \sup\left\{ \|\varphi(t,y)\|\, e^{-2L(y)|t|} \;\middle|\; (t,y) \in T^0 \right\}$ gegeben ist. Dann bildet der Operator

$$K : E \to \mathcal{C}(T^0, \mathbb{R}^n), \; \varphi \mapsto K\varphi(t,y) = y + \int_0^t f(s, \varphi(s,y))\, ds$$

den Banachraum E wieder in sich selbst ab, denn es gilt

$$\|K\varphi(t,y) - y\| \leq \left| \int_0^t \|f(s, \varphi(s,y))\|\, ds \right| \leq \tau(\pi(y))\, M(\pi(y)) \leq \varepsilon(\pi(y)), \quad (t,y) \in T^0,$$

also $\|K\varphi(t,y) - \pi(y)\| \leq 2\varepsilon(\pi(y))$. Wie beim Standard-Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf zeigt man, daß K eine Kontraktion ist. Für $\varphi, \psi \in E$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \|K\varphi(t,y) - K\psi(t,y)\| &\leq \left| \int_0^t \|f(s,\varphi(s,y)) - f(s,\psi(s,y))\|\, ds \right| \\ &\leq L(y) \left| \int_0^t \|\phi(s,y) - \psi(s,y)\|\, ds \right| \leq L(y)\, \|\phi - \psi\|_E \left| \int_0^t e^{2L(y)|s|}\, ds \right| \leq \frac{1}{2}\, e^{2L(y)|t|}, \end{aligned}$$

also $\|K\varphi - K\psi\|_E \leq \frac{1}{2}\|\phi - \psi\|_E$. Also besitzt K genau einen Fixpunkt in E, den wir mit γ bezeichnen und der eine Lösung des obigen Anfangswertproblems darstellt. Nach Definition von E ist γ zudem temperiert relativ $\{0\} \times \partial S$ von der Klasse $\mathcal{C}^0$.

Als nächstes schränke man T^0 auf eine regulär situierte tubulare Umgebung T^1 von $\{0\} \times S$ ein, so daß für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ der Integraloperator

$$K_v : E^1 \to \mathcal{C}(T^1, \mathbb{R}^n), \; \varphi \mapsto K_v\varphi(t,y) = v + \int_0^t Df(s, \gamma(s,y)).(0, \varphi(s,y))\, ds$$

genau einen Fixpunkt γ_v im Banachraum

$$E_v := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}(T^1, \mathbb{R}^n) \,\middle|\, \varphi(t, y) \in \overline{B^n_{2\varepsilon(\pi(y))}(v)} \text{ für } (t, y) \in T^1 \right\}$$

besitzt. Nach Definition von K_v stimmt dann γ_v mit der Ableitung $D\gamma(t, y).(0, v)$ überein, und die Einschränkung $\gamma_{|T^1} : T^1 \to \mathbb{R}^n$ wird zu einer relativ $\{0\} \times \partial S$ temperierten Funktion der Klasse $\mathcal{C}^1$. Rekursiv erhält man somit eine Folge regulär situierte tubulare Umgebungen $T^m \subset \cdots \subset T^1 \subset T^0 \subset T$ von $\{0\} \times S$, so daß $\gamma_{|T^m} : T^m \to \mathbb{R}^n$ temperiert relativ $\{0\} \times \partial S$ von der Klasse $\mathcal{C}^m$ ist. Das war zu zeigen. □

Kapitel 2

Differentialgeometrische Objekte auf singulären Räumen

2.1 Tangentialbündel und Whitneys Bedingung (A)

In diesem Abschnitt wollen wir zu jedem stratifizierten Raum X mit Stratifizierung $\mathcal{S}$ und einer glatter Struktur $\mathcal{C}^\infty$ das Tangentialbündel TX konstruieren. Dabei kristallisiert sich in natürlicher Weise die Whitney-Bedingung (A) als genau die Eigenschaft heraus, die garantiert, daß das Tangentialbündel wieder ein stratifizierter Raum ist.

2.1.1 Als Menge definieren wir das Tangentialbündel eines stratifizierten Raums X durch

$$TX = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} TS.$$

Wie im Falle von Mannigfaltigkeiten hat man eine kanonische Projektion

$$\pi = \pi_{TX} : TX \to X, \quad TS \ni v \mapsto \pi_{TS}(v) \in S,$$

wobei $\pi_{TS} : TS \to S$ die kanonische Projektion des Tangentialbündels des Stratums $S \in \mathcal{S}$ bezeichne. Falls X eine glatte Struktur besitzt, so können wir TX auf folgende Weise topologisieren. Sei $U \subset X$ offen, und $x : U \to O \subset \mathbb{R}^n$ eine singuläre Karte. Dann setzen wir $TU := \pi^{-1}(U)$ und definieren $Tx : TU \to TO \subset \mathbb{R}^{2n}$ durch die Forderung, daß $(Tx)_{|TS\cap TU} = T\left(x_{|S\cap U}\right)$ für alle Strata S. Nun kann man TX mit der gröbsten Topologie versehen, so daß alle $TU \subset TX$ offen und alle Tx stetig sind. Die Projektion π wird dann zu einer stetigen Abbildung, die auf allen TS differenzierbar ist. Zudem folgert man leicht aus entsprechenden Eigenschaften für X, daß die TS lokal abgeschlossene Unterräume von TX sind, und daß die Partition von TX in die TS lokal endlich ist. Es ergibt sich somit die Frage, ob TX ein stratifizierter Raum mit Strata TS ist, und ob π auch eine Projektion im topologischen Sinne darstellt, das heißt, ob X die Quotiententopologie von TX trägt. Mit anderen Worten muß gezeigt werden, unter welchen Bedingungen $TR \subset \overline{TS}$ für alle Stücke $R < S$ gilt und gleichzeitig $\pi^{-1}\left(\overline{Y}\right) = \overline{\pi^{-1}(Y)}$ für alle Unterräume $Y \subset X$. Es wird sich im folgenden herausstellen, daß dies genau dann der Fall ist, wenn X die Whitney-Bedingung (A) erfüllt.

2.1.2 Satz *Das zu einem stratifizierten Raum mit glatter Struktur* $(\mathsf{X}, \mathcal{C}^\infty_\mathsf{X})$ *konstruierte Tangentialbündel ist genau dann wieder ein stratifizierter Raum, und* $\pi : \mathsf{TX} \to \mathsf{X}$ *eine topologische Projektion, falls* X *die Whitney-Bedingung A erfüllt. In diesem Fall erbt* TX *zudem von* $(\mathsf{X}, \mathcal{C}^\infty_\mathsf{X})$ *eine kanonische (schwache) glatte Struktur* $\mathcal{C}^\infty_{\mathsf{TX}}$*, die bestimmt ist durch die Karten* $\mathsf{Tx} : \mathsf{TU} \to \mathbb{R}^{2n}$*, wobei* $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ *alle singulären Karten von* X *durchläuft. Die Projektion* $\pi : \mathsf{TX} \to \mathsf{X}$ *ist dann glatt, und ein Morphismus stratifizierter Räume.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, X sei Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $\mathsf{U} = \mathsf{X}$ und x die identische Abbildung auf U. Wir zeigen zuerst, daß (A) aus der Bedingung folgt, daß TX ein stratifizierter Raum ist und π eine topologische Projektion. Sei also $\mathsf{R} < \mathsf{S}$, $x \in \mathsf{R}$ und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge von Punkten aus S, so daß $\tau = \lim_{k \to \infty} \mathsf{T}_{x_k}\mathsf{S}$ existiert. Zum Nachweis der Beziehung $\mathsf{T}_x\mathsf{R} \subset \tau$ wähle man $v \in \mathsf{T}_x\mathsf{R}$ und lasse Y die Menge aller x_k sein. Nach Voraussetzung ist $v \in \pi^{-1}\left(\overline{\mathsf{Y}}\right) = \overline{\pi^{-1}(\mathsf{Y})}$, das heißt es gibt eine gegen v konvergente Folge von Tangentialvektoren $v_k \in \mathsf{T}_{x_k}\mathsf{S}$. Dann muß aber $v \in \tau$ gelten, folglich ist die Whitney-Bedingung (A) erfüllt.

Sei nun umgekehrt die Bedingung (A) erfüllt. Dann muß $\mathsf{T}_x\mathsf{R} \subset \overline{\mathsf{TS}}$ für alle $x \in \mathsf{R}$ gelten, also ist $\mathsf{TR} \subset \overline{\mathsf{TS}}$. Damit wird TX zu einem zerlegten Raum. Als nächstes wählen wir einen Unterraum Y von X, und $v \in \pi^{-1}\left(\overline{\mathsf{Y}}\right)$. Dann gibt es eine Folge von Punkten $x_k \in \mathsf{Y}$ mit $\lim x_k = x := \pi(v)$. Wir können annehmen, daß $x \in \mathsf{R}$ und $x_k \in \mathsf{S}$ für ein inzidentes Paar von Stücken $\mathsf{R} < \mathsf{S}$; ansonsten ergibt sich der triviale Fall. Aufgrund von (A) folgt die Existenz von Vektoren $v_k \in \mathsf{T}_{x_k}\mathsf{S}$ mit $\lim v_k = v$. Also muß $\pi^{-1}\left(\overline{\mathsf{Y}}\right) \subset \overline{\pi^{-1}(\mathsf{Y})}$ gelten. Da die umgekehrte Inklusion offensichtlich ist, erhalten wir $\pi^{-1}\left(\overline{\mathsf{Y}}\right) = \overline{\pi^{-1}(\mathsf{Y})}$, das heißt π ist eine topologische Projektion.

Es bleibt nur zu zeigen, daß die $\mathsf{Tx} : \mathsf{TU} \to \mathbb{R}^{2n}$ eine glatte Struktur auf TX festlegen. Seien $\mathsf{Tx} : \mathsf{TU} \to \mathbb{R}^{2n}$ und $\mathsf{T}\tilde{\mathsf{x}} : \mathsf{T}\tilde{\mathsf{U}} \to \mathbb{R}^{2\tilde{n}}$ zwei singuläre Karten und $v \in \mathsf{TU} \cap \mathsf{T}\tilde{\mathsf{U}} = \mathsf{T}(\mathsf{U} \cap \tilde{\mathsf{U}})$. Nach eventuellem Übergang zu kleineren Umgebungen U und $\tilde{\mathsf{U}}$ von $\pi(v)$ können wir eine offene Umgebung $\mathsf{O} \subset \mathbb{R}^m$ mit $m \geq \max(n, \tilde{n})$ von $\mathsf{x}(\mathsf{U} \cap \tilde{\mathsf{U}})$ finden, so daß ein Diffeomorphismus $\mathsf{H} : \mathsf{O} \to \tilde{\mathsf{O}} \subset \mathbb{R}^m$ existiert, der der Beziehung $\mathsf{x}\big|_{\mathsf{U} \cap \tilde{\mathsf{U}}} = \mathsf{H} \circ \tilde{\mathsf{x}}_{|\mathsf{U} \cap \tilde{\mathsf{U}}}$ genügt. Nun ist aber $\mathsf{T}(\mathsf{U} \cap \tilde{\mathsf{U}})$ offene Umgebung von v, und es gilt $\mathsf{Tx}_{|\mathsf{T}(\mathsf{U} \cap \tilde{\mathsf{U}})} = \mathsf{TH} \circ \mathsf{T}\tilde{\mathsf{x}}\big|_{\mathsf{T}(\mathsf{U} \cap \tilde{\mathsf{U}})}$. Das bedeutet aber nichts anderes als die Tatsache, daß Tx und $\mathsf{T}\tilde{\mathsf{x}}$ kompatibel sind. Aufgrund der Definition der Topologie auf TX stellen die Tx damit auch Homöomorphismen dar, die über jedem Stück TS als Diffeomorphismus wirken. Da die Vereinigung aller TU das Tangentialbündel TX überdeckt, bilden die Tx damit einen singulären Atlas und definieren somit eine glatte Struktur auf TX. Daß π dann zu einem glatten Morphismus stratifizierter Räume wird, folgt aus der eben beschriebenen Konstruktion. Damit ergibt sich die Behauptung. □

2.1.3 Beispiel Sei M eine Mannigfaltigkeit, von der wir annehmen, daß sie eingebettet in einer Sphäre S^n liegt. Der Kegel CM kann dann in kanonischer Weise mit dem Unterraum

$$\left\{ty \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, t \in [0,1[,\ y \in \mathsf{M} \subset \mathsf{S}^n\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

identifiziert werden, und erbt als solcher eine glatte Struktur. Offensichtlich wird CM damit zu einem (A)-stratifizierten, ja sogar zu einem Whitney-Raum. Folglich ist TCM ein wohldefinierter (A)-stratifizierter Raum und hat die Gestalt

$$\mathsf{TCM} = \left\{(ty, sy + v) \in \mathbb{R}^{2(n+1)} \,\middle|\, t \in]0,1[,\ y \in \mathsf{M},\ s \in \mathbb{R},\ v \in \mathsf{T}_y\mathsf{M}\right\} \cup \{0\}.$$

Man beachte, daß TCM als topologischer Raum nicht, wie man vermuten könnte, homöomorph zum Kegel über $\mathsf{TM} \times \mathbb{R}$ ist. Zudem sieht man an diesem Beispiel schon, daß das Tangentialbündel eines stratifizierten Raums mittels seiner singulären Karten in der Regel nicht auf lokal abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ abgebildet wird.

Im speziellen Fall der Kante und des Standardkegels identifizieren wir S^0 bzw. S^1 erst einmal mit dem Unterräumen $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1, 1)\right\} \subset S^1$ und $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi, \sin\varphi, 1) \,\middle|\, \varphi \in \mathbb{R}\right\} \subset S^2$. Dann berechnen sich die entsprechenden Tangentialbündel wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathsf{TX}_{\text{Edge}} &= \left\{(x, |x|, \operatorname{sgn}(x)\, y, \operatorname{sgn}^2(x)\, y) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}\right\}, \\
\mathsf{TX}_{\text{Cone}} &= \Big\{ \Big(\tfrac{t\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi, \sin\varphi, 1), \operatorname{sgn}(t)\big(\tfrac{s\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi, \sin\varphi, 1) + u\,(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\big)\Big) \in \mathbb{R}^6 \,\Big| \\
&\qquad t \in [0, 1[,\ \varphi \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}\Big\},
\end{aligned}$$

wobei $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{\pm 1, 0\}$ die im Ursprung verschwindende Signum-Funktion bezeichnet.

2.1.4 Unter einem *stratifizierten Vektorfeld* auf X verstehen wir einen Schnitt $\mathsf{V} : \mathsf{X} \to \mathsf{TX}$, so daß für jedes Stratum $\mathsf{S} \in \mathcal{S}$ die Einschränkung $\mathsf{V}_{|\mathsf{S}} : \mathsf{S} \to \mathsf{TS}$ ein glattes Vektorfeld auf S ist. Man beachte dabei, daß der Begriff eines stratifizierten Vektorfeldes nicht notwendigerweise voraussetzt, daß X eine glatte Struktur besitzt. Ist das jedoch der Fall, so sprechen wir von einem *stetigen Vektorfeld* auf X, wenn $\mathsf{V} : \mathsf{X} \to \mathsf{TX}$ stetig ist, und, vorausgesetzt X ist ein (A)-stratifizierter Raum, von einem *Vektorfeld der Klasse* $\mathcal{C}^m$ mit $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, wenn $\mathsf{V} : \mathsf{X} \to \mathsf{TX}$ eine Abbildung der Klasse $\mathcal{C}^m$ zwischen den (A)-stratifizierten Räumen X und TX darstellt; den Raum aller solcher Vektorfelder der Klasse $\mathcal{C}^m$ bezeichnen wir mit $\mathcal{X}^m(\mathsf{X})$. Falls $m = \infty$ ist, sprechen wir oft auch von einem *glatten Vektorfeld*. Ordnet man jedem offenen $\mathsf{U} \subset \mathsf{X}$ den Raum $\mathcal{X}^m(\mathsf{U})$ bzw. $\mathcal{X}^\infty(\mathsf{U})$ zu, so erhält man offensichtlich weitere Garben $\mathcal{X}^m$ und $\mathcal{X}^\infty$ auf X.

2.2 Derivationen und Vektorfelder

Für jede Mannigfaltigkeit M ist der Raum der Derivationen $\operatorname{Der}(\mathcal{C}^\infty_x, \mathbb{R})$ auf dem Halm $\mathcal{C}^\infty_x$ der glatten Funktionen über dem Fußpunkt $x \in \mathsf{M}$ kanonisch isomorph zum Tangentialraum $\mathsf{T}_x\mathsf{M}$ an der Stelle x. Im Falle, daß X stratifiziert ist, gilt ein analoges Resultat im allgemeinen nicht, wie die folgenden Beispiele 2.2.1 und 2.2.2 zeigen.

Neben den Derivationen auf $\mathcal{C}^\infty_x$ mit Werten in $\mathbb{R}$ sind auch die Derivationen von $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})$ nach $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})$ bedeutsam. Für den Fall einer Mannigfaltigkeit M ist bekanntlich $\operatorname{Der}(\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M}), \mathcal{C}^\infty(\mathsf{M}))$ kanonisch isomorph zum Raum $\mathcal{X}^\infty(\mathsf{M})$ der glatten Vektorfelder auf M. Im stratifizierten Fall dagegen liefert zwar, wie in diesem Abschnitt gezeigt wird, jedes glatte Vektorfeld auf X eine Derivation, aber die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

2.2.1 Beispiel Auf der Halbgeraden $\mathsf{X} = \mathbb{R}^{\geq 0}$ stellt die Ableitung $\mathsf{D} : \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})$, $f \mapsto f'$ zwar eine Derivation dar, diese kann jedoch nicht durch ein glattes Vektorfeld auf X repräsentiert werden.

2.2.2 Beispiel Sei $\mathsf{X}_{\text{dC}} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = z^2\right\}$ der Doppelkegel versehen mit der durch $\mathbb{R}^3$ induzierten glatten Struktur. Die Kurve $\gamma :]-1, 1[\to \mathsf{X}_{\text{dC}}$, $t \mapsto (t, 0, t)$

induziert dann auf dem Halm $\mathcal{C}^\infty_0 := \mathcal{C}^\infty_{X_{\mathrm{dC}},0}$ die Derivation

$$\delta_\gamma : \mathcal{C}^\infty_0 \to \mathbb{R}, \quad [f]_0 \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t).$$

Der Tangentialraum von X_{dC} im Ursprung ist offensichtlich gleich 0, jedoch verschwindet δ_γ nicht, das heißt die Derivationen $\mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty_0, \mathbb{R})$ werden nicht durch $T_0 X_{\mathrm{dC}}$ erzeugt.

2.2.3 Proposition *Sei* X *ein* (A)*-stratifizierter Raum,* x *ein Punkt von* X *und* S *das Stratum, in dem* x *liegt. Jeder Vektor* $v \in T_x X$ *induziert dann eine Derivation*

$$\partial_v : \mathcal{C}^\infty_x \to \mathbb{R}, \quad [f]_x \mapsto v(f_{|S \cap U}).$$

Bezeichnet umgekehrt $\delta : \mathcal{C}^\infty_x \to \mathbb{R}$ *eine Derivation, so gibt es genau dann einen Tangentialvektor* $v \in T_x X$ *mit* $\delta = \partial_v$*, wenn* δ *auf dem Ideal* $\mathcal{J}_S = \left\{[f]_x \in \mathcal{C}^\infty_x \,\middle|\, f_{|S} = 0\right\} \subset \mathcal{C}^\infty_x$ *verschwindet.*

Beweis: Daß jeder Vektor $v \in T_x X$ durch die Zuordnung $[f]_x \mapsto v(f_{|S\cap U})$ eine Derivation $\partial_v : \mathcal{C}^\infty_x \to \mathbb{R}$ erzeugt, ist offensichtlich. Zudem verschwindet δ_v nach Definition auf $\mathcal{J}_S$. Ist nun umgekehrt $\delta : \mathcal{C}^\infty_x \to \mathbb{R}$ eine Derivation, die auf $\mathcal{J}_S$ verschwindet, so induziert δ eine Derivation $\overline{\delta} : \mathcal{C}^\infty_x / \mathcal{J}_S \to \mathbb{R}$. Da $\mathcal{C}^\infty_x / \mathcal{J}_S$ kanonisch isomorph zum Halm der glatten Funktionen auf S am Fußpunkt x ist, existiert ein $v \in T_x S$ mit $\overline{\delta} = v$. Dann folgt aber $\delta = \delta_v$. Das war zu beweisen. □

2.2.4 Bemerkung Man kann die bisherigen Resultate dieses Abschnitts auch so interpretieren, daß in der Regel das Tangentialbündel TX eines (A)-stratifizierten Raums nicht mit dem Zariski-Tangentialbündel $T^Z X$ übereinstimmen muß, daß aber immer $TX \subset T^Z X$ gilt. Man beachte, daß es neben Mannigfaltigkeiten, für die immer $TM = T^Z M$ richtig ist, nichtsdestotrotz auch singuläre stratifizierte Räume gibt mit $TX = T^Z X$, wie zum Beispiel den Standardkegel X_{Cone}.

2.2.5 Im letzten Abschnitt hatten wir für jeden (A)-stratifizierten Raum X den Begriff eines glatten Vektorfelds als einen glatten Schnitt der Projektion $\pi : TX \to X$ eingeführt. Im folgenden wollen wir eine weitere und für viele Zwecke praktischere Charakterisierung glatter Vektorfelder angeben.

Zuerst stellen wir fest, daß man zu jedem (nicht notwendigerweise stetigen oder glatten) Vektorfeld $V : X \to TX$ und jeder glatten Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ eine neue Funktion $Vf : X \to \mathbb{R}$ definieren kann, indem man für jedes Stück $S \in \mathcal{S}$ von X die Gültigkeit der Relation $(Vf)_{|S} = V_{|S} f_{|S}$ fordert. Wir zeigen nun, daß Vf im Falle der Glattheit von V selbst wieder in $\mathcal{C}^\infty(X)$ liegt. Da die Glattheit ein lokale Eigenschaft ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X abgeschlossene Teilmenge einer offenen Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ ist und von $\mathbb{R}^n$ die glatte Struktur erbt. Wegen der Glattheit von $V : X \to TX \subset \mathbb{R}^{2n}$ gibt es Funktionen $v_k \in \mathcal{C}^\infty(O)$, $k = 1, \cdots, n$, so daß

$$V(x) = \left(x, \sum_k v_k(x)\, \partial_k \right) \tag{2.2.1}$$

für alle $x \in X$. Wir können also V zu einem glatten Vektorfeld V auf O fortsetzen. Ebenso existiert eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(O)$ mit $f_{|X} = f$. Da Vf beliebig oft differenzierbar ist, und die Beziehung $(Vf)_{|X} = Vf$ gilt, folgt die Behauptung. Ist nun umgekehrt $Vf \in \mathcal{C}^\infty(X)$ für jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ erfüllt, so können wir auf die Existenz von glatten Funktionen ν_k über O schließen, so daß $\nu_{k|X} = V\pi_k$ für $k = 1, \cdots, n$. Dabei bezeichnet π_k die Projektion auf die k-te Koordinate. Dann ist aber wieder Gleichung (2.2.1) erfüllt, weswegen sich die Glattheit von V ergibt. Zusammenfassend erhalten wir

2.2.6 Proposition *Für ein Vektorfeld $V : X \to TX$ auf einem (A)-stratifizierten Raum X sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) $V : X \to TX$ *ist glatt.*

(2) *Für jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ liegt die Funktion Vf in $\mathcal{C}^\infty(X)$.*

(3) *Über jeder Kartenumgebung $U \xrightarrow{x} O \subset \mathbb{R}^n$ mit $O \in \mathbb{R}^n$ offen und $\overline{x(U)} \cap O = x(U)$ ist V die Einschränkung eines glatten Vektorfeldes $V : O \to T\mathbb{R}^n$, genauer*

$$Tx \circ V_{|U} = V \circ x. \tag{2.2.2}$$

2.2.7 Zu Vektorfeldern $V, W \in \mathcal{X}^\infty(X)$ können wir ihre *Lie-Klammer* $[V, W] \in \mathcal{X}^\infty(X)$ durch

$$[V, W]_{|S} = [V_{|S}, W_{|S}], \qquad S \in \mathcal{S},$$

definieren. Nach Definition ist $[V, W]$ über jedem Stück S tangential zu S, also ein Vektorfeld auf X. Damit bleibt nur noch die Glattheit von $[V, W]$ zu zeigen. Sei also $x : U \to O \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte wie in Prop. 2.2.6 (3), und seien V, W Vektorfelder über O, so daß $Tx \circ V_{|U} = V \circ x$ und $Tx \circ W_{|U} = W \circ x$. Dann gilt für jedes Stück S

$$Tx \circ [V, W]_{|S\cap U} = Tx \circ [V_{|S\cap U}, W_{|S\cap U}] = [V, W] \circ x_{|S\cap U},$$

also $Tx \circ [V, W]_{|U} = [V, W] \circ x$. Da $[V, W]$ ein glattes Vektorfeld über O ist, folgt die Behauptung.

Nun kommen wir wieder zu unserem obigen Anliegen, der Untersuchung von Derivationen auf $\mathcal{C}^\infty(X)$ zurück.

2.2.8 Proposition *Sei M eine Mannigfaltigkeit, $X \subset M$ ein abgeschlossener (A)-stratifizierter Unterraum mit der durch M induzierten glatten Struktur, und $\mathcal{J} \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ das Verschwindungsideal von X in M. Bezeichnet man mit $\mathcal{X}^\infty_\mathcal{J}(M)$ diejenigen glatten Vektorfelder V auf M, für die $V(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$ erfüllt ist, so gilt in kanonischer Weise*

$$\mathcal{X}^\infty(X) \subset \mathcal{X}^\infty_\mathcal{J}(M)/\mathcal{J}\mathcal{X}^\infty(M) \cong \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(X), \mathcal{C}^\infty(X)).$$

Beweis: Offensichtlich gilt $\mathcal{X}^\infty(X) \subset \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(X), \mathcal{C}^\infty(X))$, das heißt es bleibt nur die Isomorphie $\mathcal{X}^\infty_\mathcal{J}(M)/\mathcal{J}\mathcal{X}^\infty(M) \cong \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(X), \mathcal{C}^\infty(X))$ nachzuweisen. Aufgrund der Beziehung $\mathcal{C}^\infty(X) = \mathcal{C}^\infty(M)/\mathcal{J}$ erhalten wir eine kanonische Abbildung

$$\Pi : \mathcal{X}^\infty_\mathcal{J}(M) \to \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(X), \mathcal{C}^\infty(X)), \quad V \mapsto (f = f + \mathcal{J} \mapsto Vf + \mathcal{J}), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Zuerst zeigen wir die Surjektivität von Π. Sei also δ eine Derivation auf $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})$. Dann wählen wir eine lokalendliche Überdeckung $(\mathsf{U}_j)_{j\in J}$ von M durch Kartenumgebungen $\mathsf{U}_j \xrightarrow{\mathsf{x}_j} \mathbb{R}^n$, sowie eine glatte, der Überdeckung $(\mathsf{U}_j)_{j\in J}$ untergeordnete Teilung der Eins $(\varphi_j)_{j\in J}$. Zudem seien $\tilde\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$ Funktionen mit $\operatorname{supp}\tilde\varphi_j \subset \mathsf{U}_j$ und $\tilde\varphi_j = 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp}\varphi_j$. Es existiert für jeden Index j und jedes $i = 1,\dots,n$ eine Abbildung $\mathsf{v}_{ji} \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$ mit $\mathsf{v}_{ji} + \mathcal{J} = \delta(\tilde\varphi_j \mathsf{x}_j^i + \mathcal{J})$, wobei x_j^i die i-te Komponentenfunktion von x_j bezeichnet. Dann ist $\mathsf{V} = \sum_j \varphi_j \sum_i \mathsf{v}_{ji}\,\partial_{\mathsf{x}_j^i}$ ein glattes Vektorfeld auf M. Wir zeigen nun, daß $\mathsf{V} \in \mathfrak{X}^\infty_{\mathcal{J}}(\mathsf{M})$ und $\Pi(\mathsf{V}) = \delta$. Für jedes $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ induziert δ eine Derivation $\delta^{\mathsf{x}} : \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{x}}(\mathsf{M}) \to \mathbb{R}$, $[\mathsf{f}]_{\mathsf{x}} \mapsto \delta(\mathsf{f} + \mathcal{J})(\mathsf{x})$. Andererseits gilt aber aufgrund der Definition der Funktionen v_{ji} die Beziehung $\sum_i \mathsf{v}_{ji}(\partial_{\mathsf{x}_j^i}\mathsf{f})(\mathsf{x}) = \delta^{\mathsf{x}}([\mathsf{f}]_{\mathsf{x}})$ für alle $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$ und alle j mit $\mathsf{x} \in \operatorname{supp}\varphi_j$. Also ist $\mathsf{Vf}(\mathsf{x}) = \delta^{\mathsf{x}}([\mathsf{f}]_{\mathsf{x}})$. Da jedoch $\delta^{\mathsf{x}}(\mathcal{J}) = \{0\}$, folgt $\mathsf{V}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$ und $\Pi(\mathsf{V}) = \delta$. Somit ist Π surjektiv. Daß $\ker\Pi = \mathcal{J}\mathfrak{X}^\infty(\mathsf{M})$ ergibt sich nun sofort, da für jedes $\mathsf{V} \in \ker\Pi$ die Funktionen $\mathsf{v}_{ji} = \mathsf{V}(\tilde\varphi_j \mathsf{x}_j^i)$ in $\mathcal{J}$ liegen und $\mathsf{V} = \sum_j \varphi_j \sum_i \mathsf{v}_{ji}\,\partial_{\mathsf{x}_j^i}$ gilt. Insgesamt erhalten wir somit die Behauptung. □

2.3 Differentialformen und Kotangentialbündel

Für jeden Whitney (A)-Raum X mit Strukturgarbe $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{X}}$ kann man gemäß Anhang B die $\mathcal{C}^\infty$-Modulgarbe Ω_{X} der Kähler-Differentiale über X und die Garbe der äußeren Algebren $\Omega^\bullet_{\mathsf{X}} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Omega^k_{\mathsf{X}}$ bilden, wobei $\Omega^k_{\mathsf{X}} = \Lambda^k \Omega_{\mathsf{X}}$. Zusammen mit der Kähler-Ableitung $\mathsf{d} : \Omega^\bullet_{\mathsf{X}} \to \Omega^\bullet_{\mathsf{X}}$ erhält man somit einen Komplex von Garben über X. Der Raum $\Omega^k_{\mathsf{X}}(\mathsf{X})$, dessen Elemente wir analog wie in der Differentialgeometrie als *k-Differentialformen* über X bezeichnen, liefert geometrische Informationen über den zugrunde liegenden stratifizierten Raum, wenn auch nicht jedes Resultate über Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten auf den stratifizierten Fall übertragen werden kann. In diesem Abschnitt wollen wir einige grundlegenden Eigenschaften von Differentialformen auf X ableiten; kohomologische Aspekte beziehungsweise mit anderen Worten Untersuchungen zur deRham-Kohomologie von X verlagern wir auf das Kapitel 5.

2.3.1 Lemma *Ist $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ eine singuläre Karte, so hat jede Differentialform $\omega \in \Omega^k_{\mathsf{X}}(\mathsf{U})$ eine Darstellung der Form*

$$\omega = \sum_{1\le i_1,\cdots,i_k\le n} \mathsf{f}_{i_1\dots i_k}\,\mathsf{d}\mathsf{x}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}\mathsf{x}^{i_k} \qquad \mathsf{f}_{i_1\dots i_k} \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{U}), \tag{2.3.1}$$

wobei die Funktionen x^i, $i = 1,\cdots,n$ die Komponenten der Karte x bezeichnen.

Vor dem Start des Beweises legen wir für den Rest dieses Abschnitts noch fest, daß anstelle von Ω^k_{X} nur Ω^k geschrieben wird, wenn keine Verwechslungen möglich sind.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung nur für $k = 1$; der Rest ergibt sich analog. Zuerst wählen wir eine offene Umgebung $\mathsf{O} \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathsf{x}(\mathsf{U})$, so daß $\mathsf{x}(\mathsf{U})$ in O abgeschlossen ist. Dann stellt man fest, daß $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{O}) \to \Omega^1(\mathsf{U})$, $\mathsf{f} \mapsto \mathsf{d}\,\mathsf{f}_{|\mathsf{U}}$ eine Derivation auf $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{U})$ erzeugt, also eine offensichtlich surjektive Abbildung $\Omega^1_{\mathbb{R}^n}(\mathsf{O}) \to \Omega^1(\mathsf{U})$ induziert. Da jede Form $\alpha \in \Omega^1_{\mathbb{R}^n}(\mathsf{O})$ eine (eindeutige) Darstellung der Form $\alpha = \sum_{i=1}^n \mathsf{f}_i\,\mathsf{d}\pi_i$ besitzt, wobei $\mathsf{f}_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{O})$ für jedes i ist, und die π_i die Koordinatenfunktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind, folgt die Behauptung unmittelbar aus der Beziehung $\pi_{i|\mathsf{U}} = \mathsf{x}^i$. □

2.3.2 Proposition *Die Garbe Ω^k der k-Formen über einem Whitney* (A)*-Raum X mit Strukturgarbe $\mathcal{C}^\infty$ ist fein.*

Beweis: Dies folgt sofort aus der Tatsache, daß $\mathcal{C}^\infty$ eine feine Garbe, und Ω^k eine $\mathcal{C}^\infty$-Modulgarbe ist. □

2.3.3 Neben dem Tangentialbündel möchte man natürlich auch ein Kotangentialbündel $\mathsf{T}^*\mathsf{X}$ zu X konstruieren können. Wie dies bewerkstelligt werden kann, soll im folgenden beschrieben werden. Als Menge legt man $\mathsf{T}^*\mathsf{X}$ analog wie im Tangentialfall durch

$$\mathsf{T}^*\mathsf{X} = \bigcup_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}} \mathsf{T}^*\mathsf{S}$$

fest, und definiert die Projektion $\pi = \pi_{\mathsf{T}^*\mathsf{X}} : \mathsf{T}^*\mathsf{X} \to \mathsf{X}$ als die Abbildung, die über jedem der Strata $\mathsf{S} \in \mathcal{S}$ mit der kanonischen Projektion $\pi_{\mathsf{T}^*\mathsf{S}} : \mathsf{T}^*\mathsf{S} \to \mathsf{S}$ übereinstimmt. Für jede singuläre Karte $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ sei nun $\iota^*_{\mathsf{x}(\mathsf{U})}(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^n) = \{(\mathsf{y}, \alpha) \in \mathsf{T}^*\mathbb{R}^n \,|\, \mathsf{y} \in \mathsf{x}(\mathsf{U})\} \subset \mathsf{T}^*\mathbb{R}^n$ der Rückzug von $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^n$ mittels der Einbettung $\iota_{\mathsf{x}(\mathsf{U})} : \mathsf{x}(\mathsf{U}) \to \mathbb{R}^n$. Dann induziert x eine Abbildung $\mathsf{T}^*\mathsf{x} : \iota^*_{\mathsf{x}(\mathsf{U})}(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^n) \to \mathsf{T}^*\mathsf{U}$ durch $(\mathsf{y}, \alpha) \mapsto (\mathsf{x}^{-1}(\mathsf{y}), \alpha \circ \mathsf{T}_{\mathsf{x}^{-1}(\mathsf{y})}\mathsf{x})$. Wir versehen $\mathsf{T}^*\mathsf{X}$ mit der feinsten Topologie, so daß alle $\mathsf{T}^*\mathsf{x}$ stetig sind. Offensichtlich sind darin alle $\mathsf{T}^*\mathsf{U}$ offen. Zudem kommutiert für jede weitere Karte $\tilde{\mathsf{x}} : \tilde{\mathsf{U}} \to \mathbb{R}^n$ mit Übergangsabbildung $\mathsf{H} : \mathsf{O} \to \tilde{\mathsf{O}}$ von x nach $\tilde{\mathsf{x}}$ über $\mathsf{U}_\mathsf{x} \subset \mathsf{U} \cap \tilde{\mathsf{U}}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \iota^*_{\mathsf{x}(\mathsf{U}_\mathsf{x})}(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathsf{T}^*\mathsf{x}"] & \mathsf{T}^*\mathsf{U}_\mathsf{x}\,, \\ \iota^*_{\tilde{\mathsf{x}}(\mathsf{U}_\mathsf{x})}(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^n) \arrow[u, "\mathsf{T}^*\mathsf{H}"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{2.3.2}$$

wobei $\mathsf{T}^*\mathsf{H} : \mathsf{T}^*\tilde{\mathsf{O}} \to \mathsf{T}^*\mathsf{O}$ durch $(\mathsf{y}, \alpha) \mapsto (\mathsf{H}^{-1}(\mathsf{y}), \alpha \circ \mathsf{T}_{\mathsf{H}^{-1}(\mathsf{y})}\mathsf{H})$ definiert ist. Damit trägt $\mathsf{T}^*\mathsf{U}$ die durch $\mathsf{T}^*\mathsf{x}$ definierte Quotiententopologie von $\iota^*_{\mathsf{x}(\mathsf{U})}(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^n)$.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß $\mathsf{T}^*\mathsf{X}$ ein zerlegter Raum mit Stücken $\mathsf{T}^*\mathsf{S}$, $\mathsf{S} \in \mathcal{S}$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dabei annehmen, daß X durch eine Karte $\mathsf{x} : \mathsf{X} \to \mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ eingebettet werden kann. Sei nun $\mathsf{T}^*\mathsf{R} \cap \overline{\mathsf{T}^*\mathsf{S}} \neq \emptyset$ für zwei Stücke $\mathsf{R}, \mathsf{S} \in \mathcal{S}$. Wegen der Stetigkeit von π gilt dann $\mathsf{R} \cap \overline{\mathsf{S}} \neq \emptyset$, also $\mathsf{R} \subset \overline{\mathsf{S}}$ und R ist inzident zu S. Als nächstes wähle man $\beta \in \mathsf{T}^*\mathsf{R}$, und $(\mathsf{y}, \alpha) \in \mathsf{T}^*\mathbb{R}^n$ mit $\mathsf{y} = \mathsf{x}(\pi(\beta))$ und $\mathsf{T}^*\mathsf{x}(\mathsf{y}, \alpha) = \beta$. Es gibt dann eine Folge $(\mathsf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{S}$ mit $\lim_{k\to\infty} \mathsf{x}_k = \mathsf{x} := \pi(\beta)$. Dann konvergiert aber die Folge $(\mathsf{x}(\mathsf{x}_k), \alpha)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^n$ gegen (y, α), und $(\mathsf{T}^*\mathsf{x}(\mathsf{x}(\mathsf{x}_k), \alpha))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{T}^*\mathsf{S}$ gegen β. Folglich ist $\mathsf{T}^*\mathsf{R} \subset \overline{\mathsf{T}^*\mathsf{S}}$.

In Analogie zu differenzierbaren Mannigfaltigkeiten wirft sich natürlich die Vermutung auf, daß das Kotangentialbündel $\mathsf{T}^*\mathsf{X}$ isomorph zu TX ist. Daß dies im allgemeinen jedoch nicht der Fall ist, zeigt folgendes

2.3.4 Beispiel Die Kante $\mathsf{X}_{\text{Edge}} = \{(\mathsf{x}, |\mathsf{x}|) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathsf{x} \in \mathbb{R}\}$ hat, wie in Beispiel 2.1.3 gezeigt, das Tangentialbündel $\mathsf{TX}_{\text{Edge}} = \{(\mathsf{x}, |\mathsf{x}|, \operatorname{sgn}(\mathsf{x})\,\mathsf{y}, \operatorname{sgn}^2(\mathsf{x})\,\mathsf{y}) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{R}\}$, jedoch das Kotangentialbündel $\mathsf{T}^*\mathsf{X}_{\text{Edge}} = \mathsf{X}_{\text{Edge}} \times \mathbb{R}/\{0\} \times \mathbb{R}$. Ist allgemeiner M eine Untermannigfaltigkeit der Sphäre S^n, so kann das Kotangentialbündel $\mathsf{T}^*\mathsf{CM}$ des Kegels über M als topologischer Raum mit dem Kegel $\mathsf{C}(\mathsf{T}^*\mathsf{M} \times \mathbb{R})$ identifiziert werden.

2.3.5 Analog wie das Kotangentialbündel kann man die alternierenden Potenzen $\Lambda^k T^* X$ konstruieren, das heißt man setzt

$$\Lambda^k T^* X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \Lambda^k T^* S$$

und versieht $\Lambda^k T^* X$ mit der feinsten Topologie, so daß alle Abbildungen

$$\begin{aligned} \Lambda^k T^* x : \iota^*_{x(U)}(\Lambda^k T^* \mathbb{R}^n) &\to \Lambda^k T^* X, \\ (y, \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) &\mapsto (x^{-1}(y), \alpha_1 \circ T_{x^{-1}(y)} x \wedge \ldots \wedge \alpha_k \circ T_{x^{-1}(y)} x) \end{aligned}$$

stetig sind. Zudem hat man eine kanonische stetige Projektion $\pi = \pi_{\Lambda^k T^* X} : \Lambda^k T^* X \to X$, und versteht unter einem *Schnitt* in $\Lambda^k T^* X$ eine Abbildung $\omega : X \to \Lambda^k T^* X$, so daß $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_X$.

2.3.6 Aufgrund der universellen Eigenschaft der Kähler-Differentiale kann man Tangentialvektoren in Differentialformen einsetzen, indem man für einen Tangentialvektor $v \in T_x X$, $x \in X$ (oder allgemeiner für eine Derivation $v \in \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty_x, \mathbb{R})$) und eine Differentialform $\alpha \in \Omega^1(X)$ die *Einsetzung* durch

$$\alpha_x(v) := \langle \alpha, v \rangle := i_v(\alpha_x)$$

definiert, wobei i_v der durch die Derivation v gegebene Morphismus aus der universellen Eigenschaft (KÄ) im Anhang B ist. In kanonischer Weise erweitert man die Einsetzung zu Abbildungen

$$i : \Omega^k(X) \times T_x X^{\otimes k} \to \mathbb{R}, \quad (\alpha, v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \mapsto i_{v_1 \otimes \cdots \otimes v_k}(\alpha) = \alpha_x(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k).$$

Jede k-Form α liefert damit in natürlicher Weise einen Schnitt $\overline{\alpha} : X \to \Lambda^k T^* X$, $x \mapsto \alpha_x$.

2.3.7 Proposition *Zu einem stetigen Schnitt* $\omega : X \to \Lambda^k T^* X$ *gibt es genau dann eine Differentialform* α *auf* X *mit* $\omega = \overline{\alpha}$, *falls es zu jeder singulären Karte* $x : U \to O \subset X$ *von* X *eine Differentialform* $\alpha^x \in \Omega^k(O)$ *gibt, so daß*

$$\omega_{|U} = \Lambda^k T^* x \circ \alpha^x \circ x. \tag{2.3.3}$$

In diesem Fall existiert ein eindeutig bestimmter stetiger Schnitt $d\omega : X \to \Lambda^{k+1} T^* X$, *so daß*

$$(d\omega)_{|U} = (\,\overline{d\alpha}\,)_{|U} = \Lambda^{k+1} T^* x \circ d\alpha^x \circ x. \tag{2.3.4}$$

Beweis: Mit Hilfe von Lemma 2.3.1 ergibt sich die Behauptung nahezu unmittelbar aufgrund einer ähnlichen Argumentation wie im Beweis von Proposition 2.2.6; die Einzelheiten seien deshalb dem Leser überlassen. □

2.3.8 Für spätere Zwecke wollen wir an dieser Stelle einige universelle Konstruktionen auf dem Tangential- und Kotangentialbündel bereitstellen. Sei $F : \mathfrak{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{Vec}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{R}}$ ein (kovarianter) Funktor auf der Kategorie der endlichdimensionalen reellen Vektorräume.

Als Beispiele für solche Funktoren seien das k-te Tensorprodukt $\bigotimes^k$, das äußere Produkt Λ^k, oder das k-fache symmetrische Tensorprodukt Sym^k genannt. Dann definieren wir für jeden (A)-stratifizierten Raum X die stratifizierten Räume FTX und $\mathsf{FT^*X}$ durch

$$\mathsf{FTX} = \bigcup_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}} \mathsf{FTS} \quad \text{und} \quad \mathsf{FT^*X} = \bigcup_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}} \mathsf{FT^*S}.$$

Man prüft nun leicht mit den Methoden aus Abschnitt 2.1 und denen aus diesem Abschnitt nach, daß FTX wieder ein (A)-stratifizierter Raum ist, und daß $\mathsf{FT^*X}$ stratifiziert ist, wobei die Strata jeweils durch FTS bzw. $\mathsf{FT^*S}$ mit $\mathsf{S} \in \mathcal{S}$ gegeben sind. Somit ist ab sofort klar, was unter den einem (A)-stratifizierten Raum X zugeordneten Räumen $\mathsf{TX}^{\otimes^k}$, $\Lambda^k\mathsf{TX}$, $\mathsf{Sym}^k\mathsf{T^*X}$, usw. zu verstehen ist.

2.3.9 Stellt $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ eine glatte Abbildung zwischen (A)-stratifizierten Räumen dar, so induziert der Rückzug mit f einen Morphismus $\Omega^\bullet\mathsf{f} = \mathsf{f}^* : \Omega^\bullet_\mathsf{Y} \to \Omega^\bullet_\mathsf{X}$. Anders sieht es jedoch beim Tangentialbündel aus: die glatte Kurve $\gamma :]1,1[\to \mathsf{X}_{\mathrm{dC}}$ aus Beispiel 2.2.2 durch die Spitze des Doppelkegels induziert keine glatte Abbildung zwischen den Tangentialbündeln $]1,1[\times\mathbb{R}$ und $\mathsf{TX}_{\mathrm{dC}}$. Insofern ist es für beliebige glatte $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ in der Regel nicht möglich, eine Tangentialabbildung sinnvoll zu definieren. Falls f jedoch zusätzlich noch ein Morphismus stratifizierter Räume ist, so kann man eine Tangentialabbildung $\mathsf{Tf} : \mathsf{TX} \to \mathsf{TY}$ durch $(\mathsf{Tf})_{|\mathsf{S}} = \mathsf{T}(\mathsf{f}_{|\mathsf{S}})$ festlegen, wobei S alle Zusammenhangskomponenten von Strata von X durchläuft.

2.4 Metriken und Längenraumstrukturen

Ziel dieses Abschnittes ist es, den Begriff einer Riemannschen Metrik über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit auf stratifizierte Räume zu übertragen, und zu untersuchen, unter welchen Kriterien sich aus einer solchen Riemannschen Metrik eine die Topologie des unterliegenden Raums widerspiegelnde geodätischer Abstand ergibt.

2.4.1 Definition Ein stetiger Schnitt

$$\mu : \mathsf{X} \to \mathsf{T^*X} \otimes \mathsf{T^*X} = \left\{ \alpha_x \otimes \beta_x \,\middle|\, \alpha_x, \beta_x \in \mathsf{T}^*_x\mathsf{X},\ x \in \mathsf{X} \right\}$$

über einem (A)-stratifizierten Raum X heißt *Riemannsche Metrik*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(ME1) Für jedes Stratum S ist die Einschränkung $\mu_{|\mathsf{S}} : \mathsf{S} \to \mathsf{T^*S} \otimes \mathsf{T^*S}$ eine Riemannsche Metrik.

(ME2) Für jedes Paar V, W glatter Vektorfelder auf X ist die Einsetzung

$$\langle V, W \rangle_\mu := \mu(V, W) : \mathsf{X} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle V_x, W_x \rangle_{\mu_x} := \mu_x(V_x, W_x)$$

eine glatte Abbildung auf X.

Existiert zu einer Riemannschen Metrik μ eine Überdeckung $(\mathsf{U}_j)_{j\in J}$ von X durch Kartenumgebungen $\mathsf{U}_j \xrightarrow{x_j} \mathsf{O}_j \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine Familie Riemannscher Metriken μ_j über den offenen Mengen $\mathsf{O}_j \subset \mathbb{R}^n$, so nennt man μ eine *glatte Riemannsche Metrik*, falls für jedes Stratum S und alle $j \in J$ die rückgezogene Riemannsche Metrik $\left(\mathsf{x}_{j|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}_j}\right)^*\mu_j$ mit der Einschränkung $\mu_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}_j}$ übereinstimmt.

Ist μ eine glatte Metrik auf X, so nennen wir das Paar (X,μ) auch einen *Riemannschen Whitney* (A)*-Raum*.

2.4.2 Bemerkung Für den Fall, daß der zugrunde liegende stratifizierte Raum eine berandete Mannigfaltigkeit ist, hat Melrose [117] den Begriff einer *b-Metrik* eingeführt. Per Definition stimmt dieser mit dem oben definierten Begriff einer Metrik für den Fall einer berandeten Mannigfaltigkeit überein.

2.4.3 Beispiel Die Fubini-Study-Metrik über dem projektiven Raum induziert (mittels ihres Realteils) auf jeder projektiv algebraischen Varietät eine glatte Riemannsche Metrik in obigem Sinne.

2.4.4 Beispiel In der Integralgeometrie singulärer Räume sind die sogenannten PL-Räume - hierbei steht PL für "piecewise linear" - von Bedeutung und liefern schöne Beispiele für (A)-stratifizierte Räume mit einer Riemannschen Metrik. Die Bedeutung der PL-Räume liegt dabei unter anderem darin, daß man auf ihnen, wie Cheeger–Müller–Schrader [39] gezeigt haben, intrinsische Krümmungsmaße definieren und gut studieren kann (siehe auch Kuppe [99]). Als zugrunde liegenden stratifizierten Raum eines PL-Raums hat man einen Polyeder X mit einer expliziten Triangulierung $h : \mathsf{X} \to |\mathsf{K}| \subset \mathbb{R}^n$ als singuläre Karte gegeben, wobei K ein simplizialer Komplex ist (siehe 1.1.14). Nehmen wir an, X sei mit einem stetigen und über jedem Stratum glatten Schnitt $\mu : \mathsf{X} \to T^*\mathsf{X} \otimes T^*\mathsf{X}$ versehen. Existiert dann für jedes abgeschlossene Simplex $\sigma \in \mathsf{K}$ eine lineare Einbettung $\iota : \sigma \to \mathbb{R}^m$, so daß die Komposition $h^{-1}(\sigma) \xrightarrow{h} \sigma \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^m$ eine Isometrie darstellt, so heißt das Paar (X,μ) ein PL-Raum. Offensichtlich ist dann μ eine Riemannsche Metrik auf X.

2.4.5 Proposition *Auf jedem* (A)*-stratifizierten Raum* X *existiert eine glatte Riemannsche Metrik.*

Beweis: Man wähle sich eine Überdeckung $(\mathsf{U}_j)_{j\in J}$ von X durch Koordinatenumgebungen $\mathsf{U}_j \xrightarrow{x_j} \mathsf{O}_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, und eine untergeordnete glatte Teilung der Eins $(\varphi_j)_{j\in J}$. Sei mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n_j}$ bezeichnet. Dann definiere man für $x \in \mathsf{X}$:

$$\mu_x(v,w) = \sum_j \varphi_j(x)\,\langle Tx_j.v, Tx_j.w\rangle, \qquad v,w \in T_x\mathsf{X}.$$

Ein einfaches Argument überzeugt den Leser unmittelbar davon, daß der Schnitt $\mu : \mathsf{X} \to T^*\mathsf{X} \otimes T^*\mathsf{X}$, $x \mapsto \mu_x$ eine glatte Riemannsche Metrik auf X darstellt. □

2.4.6 Sei X ein Whitney (A)-Raum, und μ eine glatte Riemannsche Metrik auf X. Jeder schwach-stückweisen $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : [t_j^-, t_j^+] \to \mathsf{X}$ können wir dann ihre *geodätische Länge* $|\gamma|_\mu$ durch

$$|\gamma|_\mu := \sum_{j\in J} \int_{I_j} \sqrt{\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle_{\mu(\gamma(t))}}\,dt$$

zuordnen. Dabei ist $\bigcup_{j\in J} I_j = I$ die Zerlegung einer Differenzierbarkeitsmenge I von γ in ihre Zusammenhangskomponenten, und $\dot\gamma(t) \in TS_j$ der Tangentialvektor von γ an der Stelle $t \in I_j$. Wir zeigen, daß $|\gamma|_\mu$ endlich ist. Dazu nehmen wir an, $K \subset X$ sei eine kompakte Menge derart, daß γ in K° verläuft. Nach Voraussetzung über μ existiert dann eine singuläre Karte $x : U \to O \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Riemannsche Metrik η auf O derart, daß $K \subset U$ und $x^*\eta = \mu_{|U}$. Sei $b \in \mathcal{C}^\infty(O; \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n))$ die matrixwertige Funktion, so daß $\langle b_z^{-1}.v, b_z^{-1}.w\rangle_{\eta(z)}$ für alle $z \in O$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$ gleich dem Euklidischen Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\gamma|_\mu &= \sum_{j\in J} \int_{I_j} \sqrt{\langle Tx(\dot\gamma(t)), Tx(\dot\gamma(t))\rangle_{\eta(x(\gamma(t)))}}\, dt = \sum_{j\in J} \int_{I_j} \|b_{x(\gamma(t))}.Tx(\dot\gamma(t))\|\, dt \\ &\le C_K \sum_{j\in J} \int_{I_j} \|Tx(\dot\gamma(t))\|\, dt = C_K\, |x \circ \gamma| < \infty, \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

wobei $C_K = \sup\left\{\|b_{x(x)}\| \,\middle|\, x \in K\right\}$. Diese Abschätzung gilt natürlich für jede in K verlaufende schwach-stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve γ, wobei für das folgende wesentlich ist, daß die Konstante C_K nur von K und η, aber nicht von γ abhängt. Desweiteren sei noch erwähnt, daß die geodätische Länge $|\gamma|_\mu$ unabhängig von der Wahl singulärer Karten definiert ist, im Gegensatz zur Euklidischen Länge $|x\circ\gamma|$. Mit $D_K = \sup\left\{\|b_{x(x)}^{-1}\| \,\middle|\, x \in K\right\}$ gilt natürlich auch eine zu (2.4.1) umgekehrte Abschätzung:

$$|x \circ \gamma| \le D_K\, |\gamma|_\mu. \tag{2.4.2}$$

2.4.7 Satz *Sei* $(X, \mathcal{C}^\infty)$ *ein zusammenhängender lokal endlich bogenzusammenhängender Whitney* (A)*-Raum, und* μ *eine glatte Riemannsche Metrik auf* X*. Dann definiert der* geodätische Abstand

$$\delta_\mu : X \times X \to \mathbb{R}^{\ge 0}, \quad (x, y) \mapsto \inf\left\{|\gamma|_\mu \,\middle|\, \gamma \in \mathcal{C}^{w1}\big([0,1]; X\big),\ \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y\right\}$$

eine Metrik auf X*. Für den Fall, daß* X *zudem regulär ist, induziert* δ_μ *die ursprüngliche Topologie von* X*.*

Beweis: Aufgrund der Abschätzung (2.4.1) ist der geodätische Abstand $\delta_\mu(x, y)$ zweier Punkte $x, y \in X$ wohldefiniert. Offensichtlich ist Ungleichung $\delta_\mu(x, y) \ge 0$ sowie die Symmetrie von δ_μ in x und y. Zum Nachweis, daß δ_μ eine Metrik auf X darstellt, bleibt also noch die Dreiecksungleichung zu zeigen und daß $\delta_\mu(x, y) = 0$ genau für $x = y$ erfüllt ist. Seien x, y, z drei Punkte von X und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existieren schwach-stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurven γ und λ von x nach y beziehungsweise von y nach z, so daß

$$|\gamma|_\mu \le \delta_\mu(x, y) + \varepsilon \quad \text{und} \quad |\lambda|_\mu \le \delta_\mu(y, z) + \varepsilon.$$

Der zusammengesetzte Weg $\lambda\gamma$ hat dann die geodätische Länge $|\gamma|_\mu + |\lambda|_\mu$, woraus sich

$$\delta_\mu(x, z) \le |\gamma|_\mu + |\lambda|_\mu \le \delta_\mu(x, y) + \delta_\mu(y, z) + 2\varepsilon$$

ergibt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Dreiecksungleichung.

Zum Nachweis der Positivität nehmen wir an, es sei $x \ne y$. Dann wählen wir eine singuläre Karte $x : U \to O \subset \mathbb{R}^n$ mit endlich bogenzusammenhängendem U, so daß

$x, y \in U$, und eine kompakte, ebenfalls endlich bogenzusammenhängende Umgebung $K \subset U$ von $\{x, y\}$. Anschließend wählen wir eine endlich bogenzusammenhängende offene Umgebung $V \subset K$ von x, und $\varepsilon > 0$ derart, daß $B_\varepsilon(\mathsf{x}(x)) \cap \mathsf{x}(U) \subset \mathsf{x}(V)$, wobei $B_\varepsilon(z)$ die Kugel um $z \in \mathbb{R}^n$ vom Radius $\varepsilon > 0$ bedeutet. Sei nun η eine μ induzierende Riemannsche Metrik über O, und D_K wie in Ungleichung (2.4.2). Für jeden schwach-stückweisen $\mathcal{C}^1$-Weg $\gamma : [0,1] \to K \subset X$ von x nach y gibt es dann ein eindeutig bestimmtes kleinstes $t > 0$ mit $\gamma(t) \in \partial V$. Der eingeschränkte Weg $\gamma_{|[0,t]}$ liegt dann in $\overline{V}$ und hat aufgrund von (2.4.2) die geodätische Länge

$$|\gamma_{|[0,t]}|_\mu \geq \frac{1}{D_K} |\mathsf{x} \circ \gamma_{|[0,t]}| \geq \frac{1}{D_K} |\mathsf{x}(\gamma(t)) - \mathsf{x}| \geq \frac{1}{D_K} \varepsilon.$$

Daraus folgt

$$\delta_\mu(x, y) \geq \frac{1}{D_K} \varepsilon > 0,$$

womit alle Axiome einer Metrik für δ_μ nachgewiesen wären. Zudem ergibt sich aus den gerade gemachten Überlegungen, daß die von δ_μ erzeugte Topologie feiner als die ursprüngliche Topologie auf X ist.

Aus der Annahme, X sei regulär, folgt, daß die von δ_μ erzeugte Topologie schwächer als die ursprüngliche Topologie ist. Um dies einzusehen, genügt es anzunehmen, X sei ein regulärer stratifizierter Unterraum des $\mathbb{R}^n$, und auf dem $\mathbb{R}^n$ sei eine Riemannsche Metrik η gegeben, deren Rückzug auf X gleich μ ist. Sei $x \in X$ und K eine kompakte, endlich bogenzusammenhängende l-reguläre Umgebung von x in X, und C_K wie in Ungleichung (2.4.1). Dann wähle man sich eine Kugel $B_\varepsilon(x)$ mit $B_\varepsilon(x) \cap X \subset K$ und eine endlich bogenzusammenhängende Umgebung $V \subset B_\varepsilon(x) \cap X$ von x in X. Zu $y \in V$ gibt es dann einen in V verlaufenden rektifizierbaren Weg λ von x nach y. Da $V \subset B_\varepsilon(x) \cap X$ und $B_\varepsilon(x) \cap X$ ein Whitney (A)-Raum ist, existiert nach Lemma 1.6.10 eine schwach stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve γ in $B_\varepsilon(x) \cap X$, die x mit y verbindet und die $|\gamma| \leq |\lambda|$ erfüllt. Mit (2.4.1) und der Definition 1.6.6 der l-Regularität folgt

$$\delta_\mu(x, y) \leq |\gamma|_\mu \leq C_K |\gamma| \leq C_K |\lambda| \leq C\, C_K \|x - y\|^{1/l},$$

wobei $C\, C_K$ nur von K und η abhängt. Also ist jede Umgebung von x bezüglich δ_μ auch eine Umgebung von x bezüglich der durch die Euklidische Metrik induzierten Topologie, die ja mit der auf X ursprünglich gegebenen Topologie übereinstimmt. Das war zu zeigen. $\square$

2.4.8 Bemerkung Unter der Voraussetzung, daß X eine glatte Mannigfaltigkeit und μ eine glatte Riemannsche Metrik auf X darstellt, ist $\delta_\mu(x, y)$ durch das Infimum aller Längen $|\gamma|_\mu$ gegeben, wobei γ alle stückweise stetig differenzierbaren Wege von x nach y durchläuft. Mit anderen Worten stimmt also in diesem Fall δ_μ mit dem aus der Riemannschen Geometrie bekannten geodätischen Abstand überein.

2.4.9 Korollar *Jeder reguläre Riemannsche Whitney* (A)*-Raum* (X, μ) *stellt bezüglich des geodätischen Abstands* δ_μ *als Metrik einen inneren metrischen Raum im Sinne der folgenden Definition dar.*

2.4.10 Definition Ein endlich bogenzusammenhängender metrischer Raum (X, d) heißt *innerer metrischer Raum*, falls für jedes Paar $x, y \in X$ der Abstand $d(x, y)$ mit dem geodätischen Abstand $\delta(x, y)$ übereinstimmt.

Ist (X, d) ein vollständiger und lokalkompakter innerer metrischer Raum, so nennt man (X, d) einen *Längenraum*.

Beweis des Korollars: Sei ρ der geodätische Abstand bezüglich der Abstandsfunktion δ_μ. Für je zwei Punkte $x, y \in X$ und jeden diese Punkte verbindenden schwach stückweisen $\mathcal{C}^1$-Weg γ gilt dann

$$\rho(x, y) \leq |\gamma|_\mu, \tag{2.4.3}$$

denn für jede Partition $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ von $[0, 1]$ ist $\delta_\mu(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq |\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}|_\mu$ für $0 \leq i < k$. Aus (2.4.3) folgt jedoch $\rho(x, y) \leq \delta_\mu(x, y)$.

Die umgekehrte Ungleichung beweist man folgendermaßen. Sei $\varepsilon > 0$, und $\lambda : [0, 1] \to X$ eine Kurve von x nach y, so daß bezüglich einer geeigneten Partition von $[0, 1]$

$$\sum_{0 \leq i < k} \delta_\mu\big(\lambda(t_i), \lambda(t_{i+1})\big) \leq \rho(x, y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann existiert eine schwach stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : [0, 1] \to X$, so daß $\gamma(t_i) = \lambda(t_i)$ für $i = 0, \cdots, k$ und

$$|\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}|_\mu \leq \delta_\mu\big(\lambda(t_i), \lambda(t_{i+1})\big) + \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Daraus folgt

$$\delta_\mu(x, y) \leq |\gamma|_\mu \leq \rho(x, y) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich die Behauptung. □

Bevor wir mit dem Studium Riemannscher Metriken und Kurven auf stratifizierten Räumen fortfahren, stellen wir erst einmal einige fundamentale Eigenschaften metrischer und innerer metrischer Räume bereit.

2.4.11 Lemma (vgl. Busemann [33, I.1.(4)]) *Ist (X, d) ein innerer metrischer Raum, so gilt für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$*

$$\overline{B}_\varepsilon(x) = S_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(x), \quad \textit{wobei} \quad S_\varepsilon(x) = \big\{y \in X \,\big|\, d(y, x) = \varepsilon\big\}.$$

Beweis: Es muß nur gezeigt werden, daß zu jedem Punkt $y \in S_\varepsilon(x)$ eine gegen y konvergierende Folge von Punkten $y_k \in B_\varepsilon(x)$ existiert. Nach Voraussetzung an X gibt es eine Folge von Kurven γ_k von x nach y, so daß $|\gamma_k| \to \varepsilon$. Auf γ_k wähle man einen Punkt y_k mit $d(x, y_k) = (1 - \frac{1}{k})\varepsilon$. Aus $|\gamma_k| \geq d(x, y_k) + d(y_k, y) \geq \varepsilon$ folgt dann $y_k \to y$, was zu zeigen war. □

2.4.12 Jeder rektifizierbaren Kurve $\gamma : [t^-, t^+] \to X$ in einem metrischen Raum kann man die offensichtlich stetige und monotone Funktion $s : [t^-, t^+] \to [0, |\gamma|]$, $t \mapsto |\gamma_{|[t^-,t]}|$ zuordnen. Es gibt dann genau eine stetige Kurve $\tilde{\gamma} : [0, |\gamma|] \to X$ mit $\gamma = \tilde{\gamma} \circ s$, und diese Kurve $\tilde{\gamma}$ ist rektifizierbar. Wir nennen $\tilde{\gamma}$ die *Parametrisierung von γ durch Bogenlänge*.

Zwei rektifizierbare Kurven heißen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Parametrisierung durch Bogenlänge besitzen. Eine Äquivalenzklasse rektifizierbarer Kurven heißt *geometrische Kurve* (vgl. Busemann [32, Sec. 5]), ein Repräsentant einer geometrischen Kurve wird dabei eine *Parametrisierung* genannt. Die Längen, Anfangs- und Endpunkte aller Parametrisierungen einer geometrischen Kurve stimmen überein, insofern macht es Sinn, diese Begriffe auch für geometrische Kurven zu verwenden. Oft bezeichnen wir eine rektifizierbare Kurve und die ihr zugeordnete geometrische Kurve mit dem gleichen Symbol.

Eine Folge geometrischer Kurven in einem metrischen Raum heißt *gleichmäßig konvergent* gegen eine geometrische Kurve $\gamma : [t^-, t^+] \to X$, wenn es eine Folge von Parametrisierungen $\gamma_k : [t^-, t^+] \to X$ gibt, so daß die Folge $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die rektifizierbare Kurve γ konvergiert.

Noch einige Begriffsbildungen zu kürzesten Wegen: Eine rektifizierbare Kurve $\gamma : [t^-, t^+] \to X$ heißt *Segment*, wenn $|\gamma| = d(\gamma(t^-), \gamma(t^+))$, und *Geodäte*, wenn für jedes $s \in [t^-, t^+]$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $|\gamma_{|[s^-,s^+]}| = \delta(\gamma(s^-), \gamma(s^+))$ für alle Zeiten $s^- < s^+$ aus dem Intervall $[t^-, t^+] \cap [s - \varepsilon, s + \varepsilon]$. Geodäten sind mit anderen Worten also lokal kürzeste Wege. Zudem folgt unmittelbar aus der Definition, daß jedes Segment eine Geodäte ist, was umgekehrt allerdings nicht gilt.

2.4.13 Satz (Busemann [32, 5.16 Thm.]) *Sei* (X, d) *ein Längenraum, und* $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge geometrischer Kurven in* X*, so daß sowohl die Menge der Anfangspunkte der* γ_k *als auch die Folge der Längen* $|\gamma_k|$ *beschränkt ist. Dann gibt es eine rektifizierbare Kurve* $\gamma : [0, t^+] \to X$ *und eine gegen* γ *gleichmäßig konvergente Teilfolge* $(\gamma_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$*, so daß*

$$|\gamma| \leq \liminf_{k\to\infty} |\gamma_k|.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung unter der Annahme, daß in X jede d-beschränkte abgeschlossene Menge kompakt ist. Später wird sich mit dem Satz von Hopf–Rinow erweisen, daß diese Voraussetzung für jeden Längenraum automatisch gegeben ist. Man beachte dabei jedoch, daß für den Beweis des Satzes von Hopf–Rinow die Gültigkeit des Satzes von Busemann für kompakte X benötigt wird, deswegen stellen wir ihn an dieser Stelle schon vor.

Wir nehmen an, jede der Kurven γ_k sei durch die Bogenlänge parametrisiert, und wählen zuerst eine Teilfolge $(\gamma_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ so aus, daß die Folge der Längen $|\gamma_{k_l}|$ gegen $\liminf_{k\to\infty} |\gamma_k|$ konvergiert. Aufgrund der Voraussetzung an die Kurven γ_k liegt die Menge aller Anfangspunkte $\gamma_k(0)$ in einer kompakten Teilmenge von X, folglich gibt es ein $x \in X$, so daß nach eventueller weiterer Auswahl einer Teilfolge $\lim_{l\to\infty} \gamma_{k_l}(0) = x$ gilt.

Falls $|\gamma_{k_l}| = 0$ ab einem gewissen Index l_0, konvergiert die Folge $(\gamma_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ offensichtlich gleichmäßig gegen den konstanten Weg $\gamma : \{0\} \to X$, $\gamma(0) = x$.

Falls $|\gamma_{k_l}| > 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$, definieren wir für jedes l eine neue Parametrisierung $\lambda_l : [0, 1] \to X$ von γ_{k_l} durch $\lambda_l(t) = \gamma_{k_l}(t\,|\gamma_{k_l}|)$. Sei $L > 0$ eine obere Schranke der Längen $|\gamma_k|$, und $\rho > 0$ so, daß alle $\gamma_k(0)$ in der Kugel $B_\rho(x)$ liegen. Es gilt dann für $l \in \mathbb{N}$ und $t \in [0, 1]$

$$d(x, \lambda_l(t)) \leq d(x, \lambda_l(0)) + d(\lambda_l(0), \lambda_l(t)) \leq \rho + L,$$

das heißt für jedes t ist die Menge $\{\lambda_l(t) \mid l \in \mathbb{N}\} \subset X$ relativ kompakt. Andererseits ist für $t_1, t_2 \in [0, 1]$ die folgende Beziehung gültig:

$$d\big(\lambda_l(t_1), \lambda_l(t_2)\big) = d\big(\gamma_{k_l}(t_1\,|\gamma_{k_l}|), \gamma_{k_l}(t_2\,|\gamma_{k_l}|)\big) = |\gamma_{k_l}|\,|t_1 - t_2| \leq L\,|t_1 - t_2|,$$

das heißt die Folge $(\lambda_l)_{l\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig stetig. Nach dem Satz von ASCOLI–BOURBAKI konvergiert nach eventueller weiterer Auswahl einer Teilfolge $(\lambda_l)_{l\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$. Für dieses γ gilt

$$|\gamma| \leq \lim_{l\to\infty} |\lambda_l| = \liminf_{k\to\infty} |\gamma_k|. \tag{2.4.4}$$

Sei nämlich $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ eine Folge von Stützpunkten, $\varepsilon > 0$ und l_0 so gewählt, daß $d\big(\gamma(t), \lambda_l(t)\big) < \frac{\varepsilon}{4n}$ für alle $t \in [0,1]$ und $l \geq l_0$. Nach eventueller Vergrößerung von l_0 kann überdies erreicht werden, daß $|\lambda_l| \leq \liminf_{k\to\infty} |\gamma_k| + \frac{\varepsilon}{2}$. Dann folgt

$$\sum_{i=0}^{n-1} d\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} d\big(\lambda_{l_0}(t_i), \lambda_{l_0}(t_{i+1})\big) \leq \liminf_{k\to\infty} |\gamma_k| + \varepsilon,$$

woraus sich (2.4.4) ergibt und damit die Behauptung. □

2.4.14 Korollar (*vgl.* BUSEMANN [33, I.1.(4)]) *Ist* (X, d) *ein innerer metrischer Raum und die abgeschlossene Kugel* $\overline{B}_\varepsilon(x)$ *um* $x \in X$ *kompakt, so gibt es zu jedem* $y \in \overline{B}_\varepsilon(x)$ *ein Segment, das* x *mit* y *verbindet.*

BEWEIS: Zuerst sei $0 < d(x,y) < \varepsilon$ angenommen. Dann existiert eine Folge geometrischer Kurven γ_k von x nach y mit $|\gamma_k| \to d(x,y)$ und $|\gamma_k| < \varepsilon$. Folglich liegt jede der Kurven γ_k in $B_\varepsilon(x)$. Aufgrund der Kompaktheit von $\overline{B}_\varepsilon(x)$ und des Beweises für den Satz von BUSEMANN 2.4.13 für kompakte Längenräume konvergiert nach eventueller Auswahl einer Teilfolge $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen eine x mit y verbindende Kurve $\gamma \subset \overline{B}_\varepsilon(x)$ der Länge $d(x,y) \leq |\gamma| \leq \liminf_{k\to\infty} |\gamma_k| = d(x,y)$. Folglich ist γ ein x und y verbindendes Segment.

Sei nun $d(x,y) = \varepsilon$. Dann existiert nach Lemma 2.4.11 eine gegen y strebende Folge von Punkten $y_k \in B_\varepsilon(x)$. Man wähle zu jedem y_k ein Segment von x nach y_k. Zieht man nochmals die Kompaktheit von $\overline{B}_\varepsilon(x)$ und den Beweis des Satzes von BUSEMANN heran, so konvergiert nach eventueller Auswahl einer Teilfolge $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ein Segment σ, das x mit y verbindet. □

Nun können wir das folgende fundamentale Resultat beweisen.

2.4.15 Satz von Hopf–Rinow (*vgl.* BUSEMANN [33, I.1.(8)] und GROMOV [63, Sec. 1.B]) *Für einen lokalkompakten inneren metrischen Raum* (X, d) *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) (X, d) *ist vollständig, also ein Längenraum.*

(2) *Jede abgeschlossene Kugel* $\overline{B}_\varepsilon(x) \subset X$ *ist kompakt.*

(3) *Ist* $\gamma : [t^-, t^+[\to X$ *ein halboffenes Segment, das heißt stellt für jedes* $t < t^+$ *der eingeschränkte Weg* $\gamma_{|[t^-,t]}$ *ein Segment dar, so kann* γ *zu einem Segment* $\overline{\gamma} : [t^-, t^+] \to X$ *fortgesetzt werden.*

Ist eine und damit jede dieser Bedingungen erfüllt, so gibt es zu jedem Paar von Punkten x, y *ein verbindendes Segment, das heißt ein Segment* $\gamma : [0, d(x,y)] \to X$ *mit* $\gamma(0) = x$ *und* $\gamma(d(x,y)) = y$.

2.4.16 Bemerkung Als erste konnten HOPF–RINOW in ihrer Arbeit [84] aus dem Jahre 1932 die Existenz minimaler Geodäten zwischen zwei Punkten einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit nachweisen. Einige Zeit später gelang es COHN–VOSSEN [40] zu zeigen, daß die Hauptaussage von HOPF–RINOW auch ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gültig ist. Die hier dargestellte "moderne" Version des Satzes von HOPF–RINOW, wie sie auch in BUSEMANN [33] oder GROMOV [63]) zu finden ist, geht somit im wesentlichen auf COHN–VOSSEN zurück.

BEWEIS: (2) $\Rightarrow$ (1). Sei $(\mathsf{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X, und K der Abschluß der aus all den Punkten x_j bestehenden Menge. Dann ist K abgeschlossen und d-beschränkt, liegt also in einer kompakten Kugel $\overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(\mathsf{x}_0)$. Folglich besitzt die Cauchy-Folge $(\mathsf{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt, der dann natürlich ihr Grenzwert sein muß. Somit ist X vollständig.

Daß (3) aus (1) folgt, ist offensichtlich. Zudem ergibt sich aus dem Satz von BUSEMANN unmittelbar, daß unter der Gültigkeit von (1) zu je zwei Punkten ein verbindendes Segment existiert. Es bleibt also nur noch die Implikation (3) $\Rightarrow$ (2) nachzuweisen. Wir gehen hierzu analog wie [33, I.1.(8)] vor. Für einen beliebigen Punkt x betrachte man die Menge R aller $\rho > 0$, so daß $\overline{\mathsf{B}}_\rho := \overline{\mathsf{B}}_\rho(\mathsf{x})$ kompakt ist. Falls $\rho \in \mathsf{R}$, so liegt natürlich jedes positive $\rho' < \rho$ ebenfalls in R. Da X als lokalkompakt vorausgesetzt wurde, kann R nicht leer sein. Wir zeigen, daß $\mathsf{R} = \mathbb{R}^{>0}$ gilt, indem wir nachweisen, daß R eine sowohl offene als auch abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{>0}$ ist.

Nehmen wir an, $\overline{\mathsf{B}}_\rho$ sei kompakt. Dann kann $\overline{\mathsf{B}}_\rho$ durch endlich viele Kugeln $\mathsf{B}_{\rho_i}(\mathsf{x}_i)$ überdeckt werden, so daß $\mathsf{x}_i \in \overline{\mathsf{B}}_\rho$ für alle i ist und $\overline{\mathsf{B}}_{\rho_i}(\mathsf{x}_i)$ kompakt. Für ein $\delta > 0$ gilt dann $\mathsf{B}_{\rho+\delta}(\mathsf{x}) \subset \bigcup_i \mathsf{B}_{\rho_i}(\mathsf{x}_i)$, folglich ist $\overline{\mathsf{B}}_{\rho+\delta} \subset \bigcup_i \overline{\mathsf{B}}_{\rho_i}(\mathsf{x}_i)$ kompakt. Also liegt $\rho + \delta$ in R, das heißt R ist offen.

Der Nachweis der Abgeschlossenheit von R ist schwieriger. Nehmen wir an, $\overline{\mathsf{B}}_{\rho'}$ sei kompakt für jedes positive $\rho' < \rho$. Wir zeigen, woraus sich dann auch die Behauptung ergibt, daß jede Folge $(\mathsf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten $\mathsf{x}_k \in \overline{\mathsf{B}}_\rho$ einen Häufungspunkt besitzt. Wir können $\mathsf{d}(\mathsf{x}_k, \mathsf{x}) \to \rho$ annehmen, aber auch $\rho_k := \mathsf{d}(\mathsf{x}, \mathsf{x}_k) < \rho_{k+1} = \mathsf{d}(\mathsf{x}, \mathsf{x}_{k+1})$, denn im Falle $\mathsf{d}(\mathsf{x}, \mathsf{x}_k) = \rho$ findet sich nach Lemma 2.4.11 ein $\mathsf{x}'_k \in \mathsf{B}_\rho(\mathsf{x})$ mit $\mathsf{d}(\mathsf{x}_k, \mathsf{x}'_k) < \frac{1}{k}$, und ein Häufungspunkt von $(\mathsf{x}'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist auch einer von $(\mathsf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nach Korollar 2.4.14 gibt es zu jedem k ein Segment γ_k von x nach x_k. Auf der Kurve γ_k wähle man sich für jedes $i \leq k$ einen Punkt x_k^i mit $\mathsf{d}(\mathsf{x}, \mathsf{x}_k^i) = \rho_i$. Sei γ_k^i die Einschränkung von γ_k, die x mit x_k^i verbindet. Für eine Teilfolge $(k_{1j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann nach dem Beweis des Satzes von BUSEMANN $\left(\gamma_{k_{1j}}^1\right)_{j\in\mathbb{N}}$ gegen ein Segment γ'_1 von x zu einem Punkt $\mathsf{y}_1 \in \mathsf{B}_\rho(\mathsf{x})$ mit $\mathsf{d}(\mathsf{x}, \mathsf{y}_1) = \rho_1$. Desweiteren gibt es eine Teilfolge $(k_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(k_{1j})_{j\in\mathbb{N}}$, so daß die Folge der Segmente $\left(\gamma_{k_{2j}}^2\right)_{j\in\mathbb{N}}$ gegen ein Segment γ'_2 von x zu einem Punkt $\mathsf{y}_2 \in \mathsf{B}_\rho(\mathsf{x})$ mit $\mathsf{d}(\mathsf{x}, \mathsf{y}_2) = \rho_2$ konvergiert. Man fährt so fort und erhält eine Folge von Segmenten $\gamma'_1 \subset \gamma'_2 \subset \cdots$, so daß der Anfangspunkt von γ'_k jeweils x ist und der Endpunkt y_k den Abstand ρ_k zu x hat.

Nun ist $\bigcup_k \gamma'_k$ ein halboffenes Segment, kann also durch einen Punkt y zu einem Segment γ' vervollständigt werden. Klarerweise gilt $\mathsf{y}_k \to \mathsf{y}$. Die Diagonalfolge $\left(\mathsf{x}_{k_{jj}}^{k_{jj}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ strebt ebenfalls gegen y, denn für $j \geq i$ gilt

$$\mathsf{d}\big(\mathsf{y}, \mathsf{x}_{k_{jj}}^{k_{jj}}\big) \leq \mathsf{d}\big(\mathsf{y}, \mathsf{y}_i\big) + \mathsf{d}\big(\mathsf{y}_i, \mathsf{x}_{k_{jj}}^i\big) + \mathsf{d}\big(\mathsf{x}_{k_{jj}}^i, \mathsf{x}_{k_{jj}}^{k_{jj}}\big) < \mathsf{d}\big(\mathsf{y}, \mathsf{y}_i\big) + \mathsf{d}\big(\mathsf{y}_i, \mathsf{x}_{k_{jj}}^i\big) + \rho - \rho_i$$

Nun wähle man zu $\varepsilon > 0$ den Index i so, daß $\mathsf{d}(\mathsf{y}, \mathsf{y}_i) + \rho - \rho_i < \varepsilon/2$, und anschließend N so groß, daß $\mathsf{d}\big(\mathsf{y}_i, \mathsf{x}_{k_{jj}}^i\big) < \varepsilon/2$ für alle $j \geq N$. Damit ist y ein Häufungspunkt von

$(\mathsf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, und die Behauptung ist gezeigt. □

Jetzt kommen wir wieder zur Konstruktion Riemannscher Metriken auf stratifizierten Räumen zurück.

2.4.17 Satz *Auf jedem zusammenhängenden regulären Whitney* (A)*-Raum* X *existiert eine glatte Riemannsche Metrik* μ, *die* (X, δ_μ) *zu einem Längenraum macht. In diesem Fall gibt es zu je zwei Punkten* x, y *von* X *eine* x *und* y *verbindende schwach stückweise* $\mathcal{C}^1$*-Kurve* γ *mit* $|\gamma|_\mu = \delta_\mu(x, y)$.

Zudem ist jeder zusammenhängende kompakte reguläre Riemannsche Whitney (A)*-Raum ein Längenraum.*

Beweis: Da in einem zusammenhängenden kompakten regulären Whitney (A)-Raum X mit einer glatten Riemannschen Metrik μ jede abgeschlossene Menge kompakt ist, folgt aus Korollar 2.4.9 sofort, daß (X, δ_μ) einen Längenraum darstellt.

Sei nun X ein beliebiger zusammenhängender regulärer Whitney (A)-Raum X. Wir weisen im folgenden die Existenz einer glatten Riemannschen Metrik μ nach, so daß (X, δ_μ) zu einem Längenraum wird. Sei dazu eine kompakte Ausschöpfung $(\mathsf{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von X gewählt, und dann gemäß Lemma 1.3.17 ein bezüglich $(\mathsf{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ induktiv einbettender Atlas von Karten $\mathsf{x}_j : \mathsf{K}^\circ_{j+2} \to \mathsf{O}_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$. Da X zusammenhängend und lokal endlich bogenzusammenhängend ist, können die Kompakta K_j ebenfalls endlich bogenzusammenhängend gewählt werden. Sei jetzt ein Punkt $x \in \mathsf{K}_0$ fest gewählt und $\mathsf{K}_{-1} = \emptyset$ gesetzt. Nach eventueller Translation der Karten können wir annehmen, daß $\mathsf{x}_0(x) = 0$. Induktiv konstruieren wir jetzt Riemannsche Metriken μ_j auf $\mathbb{R}^{n_j}$. Zuerst sei μ_0 sei das mit einem Faktor $C > 0$ versehene Euklidische Skalarprodukt, so daß $C\|y\| > 1$ für alle $y \in \mathsf{x}_0(\mathsf{K}^\circ_1 \setminus \mathsf{K}_0)$. Nehmen wir an, es seien $\mu_0, \cdots, \mu_j$ auf $\mathbb{R}^{n_0}, \cdots, \mathbb{R}^{n_j}$ derart gegeben, daß

$$\left((\iota^{n_{i+1}}_{n_i})^* \mu_{i+1}\right)_{|\mathsf{U}_{i+1}} = \mu_{i|\mathsf{U}_{i+1}} \tag{2.4.5}$$

für $i = 1, \cdots, j-1$ und geeignete offene Umgebungen $\mathsf{U}_{i+1} \subset \mathsf{O}_i$ von $\mathsf{x}_i(\mathsf{K}_i)$. Desweiteren werde angenommen, daß $d_i(y, 0) \geq i$ für alle $y \in \mathsf{x}_i(\mathsf{K}_i \setminus \mathsf{K}^\circ_{i-1})$ und $d_i(y, 0) \geq i + 1$ für alle $y \in \mathsf{x}_i(\mathsf{K}^\circ_{i+1} \setminus \mathsf{K}_i)$, wobei d_i die Abstandsfunktion zu μ_i bedeutet.

Wir wollen die Reihe der μ_i fortsetzen und ein μ_{j+1} konstruieren. Dazu definieren wir erst einmal eine Riemannsche Metrik η auf $\mathbb{R}^{n_{j+1}}$ durch

$$\eta_z((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = (\mu_j)_{z_1}(v, v') + \langle w, w' \rangle, \quad z_1, v_1, w_1 \in \mathbb{R}^{n_j}, \; z_2, v_2, w_2 \in \mathbb{R}^{n_{j+1}-n_j}.$$

Als nächstes sei $\mathsf{V}_{j+1} \subset \mathsf{O}_{j+1}$ eine offene Umgebung von $\mathsf{x}_{j+1}(\mathsf{K}_j)$, so daß $\mathsf{V}_{j+1} \cap \mathsf{x}_{j+1}(\mathsf{K}_{j+1})$ relativ kompakt in $\mathsf{x}_{j+1}(\mathsf{K}^\circ_{j+1})$ liegt. Schließlich wähle man sich noch eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R}^{n_{j+1}} \to [0, 1]$ mit relativ kompaktem Träger in V_{j+1}, so daß $\varphi = 1$ auf einer offenen Umgebung $\mathsf{V}'_{j+1} \subset \mathsf{V}_{j+1}$ von $\mathsf{x}_{j+1}(\mathsf{K}_j)$, und setze $\mathsf{U}_{j+1} := \mathsf{V}'_{j+1} \cap \mathbb{R}^{n_j}$. Da $\mathsf{x}_{j+1}(\mathsf{K}_j)$ kompakt ist, kann jetzt ein $N \in \mathbb{N}$ so gewählt werden, daß $N\|y - z\| \geq 2$ für alle $z \in \mathsf{x}_{j+1}(\mathsf{K}_j)$ und $y \in \mathbb{R}^{n_{j+1}} \setminus \mathsf{V}_{j+1}$. Man prüft nun leicht nach, daß die Riemannsche Metrik

$$\mu_{j+1} = \varphi\, \eta + (1 - \varphi)\, N \,\langle \cdot, \cdot \rangle$$

zusammen mit der Umgebung U_{j+1} die gewünschten Eigenschaften besitzt, und somit der Induktionsschluß vollzogen ist.

Da die Riemannschen Metriken μ_j jeweils miteinander in dem erklärten Sinne kompatibel sind, erhalten wir somit eine glatte Metrik μ auf X, die über jeder der offenen Mengen K_j° gleich dem Rückzug $(x_j)^*\mu_j$ ist. Wir zeigen, daß mit dieser Metrik (X, δ_μ) ein Längenraum ist. Dazu weisen wir nach, daß jede μ-beschränkte und abgeschlossene Menge $K \subset X$ kompakt ist. Nehmen wir an, das wäre nicht der Fall, es gäbe also eine Folge von Punkten $x_j \in K$, die keinen Häufungspunkt besitzt. Nach eventueller Auswahl von Teilfolgen aus $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ können wir dann $x_j \in K_j \setminus K_{j-1}^\circ$ annehmen, denn sonst lägen alle x_j ja in einem der Kompakta K_j, und die Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ müßte einen Häufungspunkt haben. Betrachten wir die Abstände $\delta_\mu(x_j, x)$. Falls $k \geq j$ genügend groß ist, gibt es einen rektifizierbaren Weg γ_j in K_k von x nach x_j mit $\delta_\mu(x_j, x) \geq |\gamma_j| - 2^{-j}$. Wir wählen k kleinstmöglich, es gibt also ein $y \in \operatorname{im}\gamma_j$ mit $y \in K_k \setminus K_{k-1}^\circ$. Wir wollen die geodätische Länge von γ_j nach unten abschätzen:

$$\delta_\mu(x_j, x) \geq |\gamma_j| - 2^{-j} \geq d_k\big(x_k(y), 0\big) - 2^{-j} \geq k - 2^{-j} \geq j - 2^{-j}.$$

Damit ist die in K liegende Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aber nicht beschränkt im Widerspruch zur Voraussetzung an K. Also muß die Folge doch einen Häufungspunkt besitzen, der wegen der Abgeschlossenheit von K wieder in K liegt. Das impliziert die Kompaktheit von K, was ja zu zeigen war.

Nachdem wir nun wissen, daß (X, δ_μ) ein Längenraum ist, ergibt sich der verbleibende Rest der Behauptung sofort aus dem Satz von Hopf–Rinow 2.4.15 und Lemma 1.6.10.

$\square$

2.5 Differentialoperatoren

Für jede kommutative $\Bbbk$-Algebra $\mathcal{A}$ (mit Eins) kann gemäß Grothendieck [66] der Raum $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \operatorname{Hom}_\Bbbk(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ der Differentialoperatoren auf $\mathcal{A}$ als die Menge der im folgenden Sinne fast $\mathcal{A}$-linearen Operatoren definiert werden. Dabei legt man rekursiv für jedes $k \in \mathbb{N}$ jeweils $\mathcal{D}^k(\mathcal{A})$ fest, und setzt anschließend $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^k(\mathcal{A})$. Zuerst sei $\mathcal{D}^0(\mathcal{A}) = \operatorname{Hom}_\mathcal{A}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \cong \mathcal{A}$ der Raum der $\mathcal{A}$-linearen Endomorphismen von $\mathcal{A}$. Nehmen wir nun an, die Menge $\mathcal{D}^k(\mathcal{A})$ der *Differentialoperatoren höchstens k-ter Ordnung* sei für ein natürliches k schon konstruiert. Dann definiert man $\mathcal{D}^{k+1}(\mathcal{A})$ durch

$$\mathcal{D}^{k+1}(\mathcal{A}) = \big\{ D \in \operatorname{Hom}_\Bbbk \,\big|\, [D, a] \in \mathcal{D}^k(\mathcal{A}) \text{ für alle } a \in \mathcal{A} \big\}.$$

Damit besteht $\mathcal{D}^{k+1}(\mathcal{A})$ aus all den Endomorphismen von $\mathcal{A}$, die bis auf einen Differentialoperator niedrigerer Ordnung $\mathcal{A}$-linear sind. Man sieht nun leicht durch ein kurzes Induktionsargument, daß alle $\mathcal{D}^k(\mathcal{A})$ und damit auch $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ $\Bbbk$-lineare Räume sind, und daß die Komposition $D \circ \tilde{D}$ zweier Differentialoperatoren $D \in \mathcal{D}^k(\mathcal{A})$ und $\tilde{D} \in \mathcal{D}^l(\mathcal{A})$ in $\mathcal{D}^{k+l}(\mathcal{A})$ liegt. Damit wird $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ zu einer (filtrierten) $\Bbbk$-Algebra. Eine erste, einfache Strukturaussage über diese Algebra liefert

2.5.1 Lemma *Für jede kommutative $\Bbbk$-Algebra gilt*

$$\mathcal{D}^1(\mathcal{A}) = \mathcal{A} + \operatorname{Der}_\Bbbk(\mathcal{A}, \mathcal{A}).$$

Beweis: Offensichtlich ist $\mathcal{A} + \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \subset \mathcal{D}^1(\mathcal{A})$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion sei $D \in \mathcal{D}^1(\mathcal{A})$ gewählt, und $c = D(1)$ gesetzt. Wir zeigen $\tilde{D} := D - c \in \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, woraus sich sofort die Behauptung ergibt. Erst einmal sei bemerkt, daß $\tilde{D} \in \mathcal{D}^1(\mathcal{A})$, das heißt es gibt für jedes $a \in \mathcal{A}$ ein $c_a \in \mathcal{A}$ mit $[\tilde{D}, a] = c_a$. Insbesondere ist dann $\tilde{D}(a) = \tilde{D}(a1) = c_a$, woraus für alle $a, b \in \mathcal{A}$

$$\tilde{D}(ab) = a\tilde{D}(b) + b\,c_a = a\tilde{D}(b) + b\tilde{D}(a)$$

folgt, das heißt $\tilde{D}$ ist eine Derivation auf $\mathcal{A}$. □

Sei nun M eine Mannigfaltigkeit. Der Raum $\mathcal{D}^k(M) := \mathcal{D}^k(\mathcal{C}^\infty(M))$ der Differentialoperatoren höchstens k-ter Ordnung auf M besteht dann bekanntlich [42, Thm. 2.3] aus allen Linearkombinationen von Endomorphismen $D \in \mathrm{End}(\mathcal{C}^\infty(M))$ der Form

$$\mathcal{C}^\infty(M) \ni f \mapsto Df = V_1 \cdots V_l f \in \mathcal{C}^\infty(M), \tag{2.5.1}$$

wobei $l \leq k$ und $V_1, \cdots, V_l$ glatte Vektorfelder auf M sind. Ersetzt man M durch einen Whitney (A)-Raum X, so liefert natürlich jedes glatte Vektorfeld V auf X einen Differentialoperator erster Ordnung. Es stellt sich deshalb Frage, ob in Analogie zum differenzierbaren Fall die Algebra $\mathcal{D}(X) := \mathcal{D}(\mathcal{C}^\infty(X))$ der Differentialoperatoren ebenfalls von den Vektorfeldern auf X erzeugt wird. Aufgrund von Beispiel 2.2.1 und dem obigen Lemma 2.5.1 ist dies jedoch in der Regel nicht der Fall; im allgemeinen wird $\mathcal{D}(X)$ nicht einmal von den Derivationen auf $\mathcal{C}^\infty(X)$ erzeugt, wie folgendes Beispiel zeigt.

2.5.2 Beispiel (vgl. [42, Exercise 3.8]) Man betrachte die Neilsche Parabel X_{Neil} mit ihrer kanonischen glatten Struktur als stratifizierter Unterraum des $\mathbb{R}^2$ (siehe Beispiel 1.1.15) und parametrisiere X_{Neil} mittels der Einbettung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$. Das Bild dieser Einbettung ist also X_{Neil}. Dann prüfe man nach, daß der Operator ∂_t zwar keine Derivation auf $\mathcal{C}^\infty(X_{\mathrm{Neil}})$ induziert, aber die Operatoren $t\partial_t$ und $t^2\partial_t$, und daß diese Derivationen den $\mathcal{C}^\infty(X_{\mathrm{Neil}})$-Modul $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{C}^\infty(X_{\mathrm{Neil}}), \mathcal{C}^\infty(X_{\mathrm{Neil}})\right)$ aufspannen. Andererseits stellen $\partial_t^2 - 2t^{-1}\partial_t$, $t\partial_t^2 - \partial_t$ und $\partial_t^3 - 3t^{-1}\partial_t^2 + 3t^{-2}\partial_t$ Differentialoperatoren auf X_{Neil} dar, die aber nicht von $t\partial_t$ und $t^2\partial_t$ erzeugt werden und damit auch nicht von $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{C}^\infty(X_{\mathrm{Neil}}), \mathcal{C}^\infty(X_{\mathrm{Neil}})\right)$.

2.5.3 Lemma *Jeder Differentialoperator D auf einem Whitney (A)-Raum X ist lokal, das heißt es gilt $\operatorname{supp} Df \subset \operatorname{supp} f$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$.*

Beweis: Für jeden Differentialoperator der Ordnung 0 ist die Behauptung trivial. Nehmen wir an, sie gelte für alle Operatoren aus $\mathcal{D}^k(X)$. Dann wählen wir ein $D \in \mathcal{D}^{k+1}(X)$, und zu $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ und einer offenen Umgebung U von $\operatorname{supp} f$ eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ und $\varphi_{|\operatorname{supp} f} = 1$. Wegen $Df = D(\varphi f) = \varphi\, Df + \tilde{D}f$ für einen Differentialoperator $\tilde{D} \in \mathcal{D}^k(X)$ ergibt sich $\operatorname{supp} Df \subset \operatorname{supp} \varphi \subset U$. Da U eine beliebige offene Umgebung von $\operatorname{supp} f$ war, folgt die Behauptung. □

2.5.4 Da jede offene Menge $U \subset X$ wieder (A)-stratifiziert ist, erhalten wir in kanonischer Weise Operatorenräume $\mathcal{D}^k(U)$ und $\mathcal{D}(U)$. Als nächstes wollen wir zeigen, daß die $\mathcal{D}^k(U)$ Schnitträume von Garben $\mathcal{D}^k$ auf X sind. Die Lokalitätseigenschaft ermöglicht es dabei, Differentialoperatoren auf kleinere Mengen einzuschränken. Um den Einschränkungsmorphismus explizit anzugeben, seien $\tilde{U} \subset U \subset X$ offen und $D \in \mathcal{D}(U)$ vorausgesetzt. Dann wähle man zu jedem $x \in \tilde{U}$ eine glatte Funktion $\varphi_x \in \mathcal{C}^\infty(X)$ mit $\operatorname{supp} \varphi_x \subset\subset \tilde{U}$ und $\varphi_{x|U_x} = 1$ auf einer Umgebung $U_x \subset \tilde{U}$ von x, und definiere für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U})$ und $x \in \tilde{U}$ eine Ausdehnung $f_x \in \mathcal{C}^\infty(U)$ durch

$$f_x(y) = \begin{cases} \varphi_x(y) f(y) & \text{falls} \quad y \in \tilde{U}, \\ 0 & \text{falls} \quad y \in U \setminus \tilde{U}. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Der eingeschränkte Differentialoperator $D_{|\tilde{U}} = r^U_{\tilde{U}}(D)$ wird nun eindeutig dadurch bestimmt, daß man $D_{|\tilde{U}} f(x) = Df_x(x)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U})$ und $x \in \tilde{U}$ setzt. Da D lokal ist, hängt $Df_x(x)$ nicht von der speziellen Wahl von φ_x ab, insbesondere ist also $Df_y(y) = Df_x(y)$ für alle $y \in \tilde{U}$, die genügend nahe bei x liegen. Damit ist $D_{|\tilde{U}} f$ glatt, und $D_{|\tilde{U}}$ wohldefiniert. Unmittelbar aus der Definition folgt zudem, daß $r^{\tilde{U}}_{\hat{U}} \circ r^U_{\tilde{U}} = r^U_{\hat{U}}$ für alle offenen Mengen $\hat{U} \subset \tilde{U} \subset U \subset X$, das heißt $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}^k$ sind Prägarben auf X.

Daß zu einer offenen Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ von U und einer Familie von Differentialoperatoren $D_j \in \mathcal{D}^k(U_j)$ mit $D_{j|U_j \cap U_i} = D_{i|U_j \cap U_i}$ für alle Indizes $j, i \in J$ genau ein Differentialoperator $D \in \mathcal{D}^k(U)$ existiert, so daß $D_{|U_j} = D_j$ für alle j gilt, ist nun leicht einzusehen. Man definiert dazu für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ die Funktion $Df \in \mathcal{C}^\infty(U)$ einfach durch $(Df)_{|U_j} = D_j(f_{|U_j})$ und verifiziert sofort, daß der Operator D dadurch wohldefiniert ist und die gewünschten Eigenschaften besitzt. Insgesamt erhalten wir somit als Resultat, daß die $\mathcal{D}^k$ tatsächlich Garben auf X darstellen. Die Prägarbe $\mathcal{D}$ ist dagegen im allgemeinen keine Garbe. Für nichtkompakte X kann nämlich nicht jede Familie $(D_j)_{j \in J}$ paarweise kompatibler Differentialoperatoren zu einem globalen Differentialoperator "zusammengeklebt" werden; und zwar genau dann nicht, wenn die Menge der Ordnungen der D_j unbeschränkt ist.

2.5.5 Definition Ein Differentialoperator $D \in \mathcal{D}(X)$ heißt *stratifiziert*, in Zeichen $D \in \mathcal{D}_\mathcal{S}(X)$, wenn für alle $S \in \mathcal{S}$ und alle $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ die Einschränkung $(Df)_{|S}$ nur von $f_{|S}$ abhängt, wenn also mit anderen Worten für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(X)$ mit $g_{|S} = 0$ die Beziehung $(Dg)_{|S} = 0$ gilt.

2.5.6 Beispiel Die glatten Vektorfelder auf X sind stratifizierte Differentialoperatoren erster Ordnung. Aufgrund von Lemma 2.5.1 und der nachstehenden Proposition spannen sie zusammen mit den glatten Funktionen die stratifizierten Differentialoperatoren erster Ordnung über X auf.

Das nun folgende Resultat erweitert Proposition 2.2.8 von Vektorfeldern auf den Fall von Differentialoperatoren.

2.5.7 Proposition *Sei X ein (A)-stratifizierter Raum. Ist dann $x : U \to O \subset \mathbb{R}^n$ eine singuläre Karte, $\mathcal{J} \subset \mathcal{C}^\infty(O)$ das Ideal der auf $x(U)$ verschwindenden glatten Funktionen über O und $\mathcal{D}_\mathcal{J}(O)$ der Raum der Differentialoperatoren über O, die das Ideal $\mathcal{J}$ in sich selbst abbilden, so gilt in kanonischer Weise*

$$\mathcal{D}(U) \cong \mathcal{D}_\mathcal{J}(O) / \mathcal{J}\mathcal{D}^\infty(O).$$

Zudem definiert eine Familie $(D_S)_{S \in \mathcal{S}}$ von Differentialoperatoren $D_S \in \mathcal{D}^k(S)$ genau dann einen Differentialoperator $D \in \mathcal{D}^k(X)$ mit $(Df)_{|S} = D_S f_{|S}$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ und $S \in \mathcal{S}$, *wenn für jede glatte Funktion* $f : X \to \mathbb{R}$ *auch die Funktion* $X \ni x \mapsto D_{S_x} f_{|S_x}(x)$ *glatt ist, wobei* S_x *das Stratum bezeichnet, in dem* x *liegt. In diesem Fall ist* D *eindeutig bestimmt und notwendigerweise stratifiziert. Umgekehrt entsteht jeder stratifizierte Differentialoperator* $D \in \mathcal{D}^k_{\mathcal{S}}(X)$ *in der beschriebenen Weise durch eine Familie* $(D_S)_{S \in \mathcal{S}}$ *von Differentialoperatoren* $D_S \in \mathcal{D}^k(S)$.

Beweis: Wegen der Feinheit aller in der Behauptung involvierten Garben können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß $U = X$ gilt, daß X abgeschlossen in O liegt, O eine Kugel um den Ursprung von $\mathbb{R}^n$ darstellt und $x = (x^1, \cdots, x^n)$ durch die identische Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben ist. Wir betrachten dann für $k \in \mathbb{N}$ den kanonischen Morphismus

$$\Pi^k : \mathcal{D}^k_{\mathcal{J}}(O) \to \mathcal{D}^k(X), \quad D \mapsto (f = f + \mathcal{J} \mapsto Df + \mathcal{J}), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(O),$$

und zeigen zuerst die Surjektivität von Π^k. Dazu bezeichnen wir erst einmal für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$ mit $(x - y)^\alpha$ die glatte Funktion $(x^1 - y_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x^n - y_n)^{\alpha_n} \in \mathcal{C}^\infty(X)$, und mit $(\pi - y)^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(O)$ die Funktion $(\pi_1 - y_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\pi_n - y_n)^{\alpha_n}$, wobei $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Koordinate ist und $y_i = \pi_i(y)$. Dann zeige man durch Induktion nach der Ordnung k, daß für jedes $D \in \mathcal{D}^k(X)$, $g \in \mathcal{C}^\infty(X)$, jeden Multiindex α mit $|\alpha| > k$ und jeden Punkt $y \in X$ die folgende Beziehung gilt:

$$D(g \cdot (x - y)^\alpha)\,(y) = 0. \tag{2.5.3}$$

Nun fixiere man ein $D \in \mathcal{D}^k(X)$ und bestimme dazu für $|\alpha| \le k$ Funktionen $d^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(O)$, so daß

$$d^\alpha(y) = \frac{1}{\alpha!} D(x - y)^\alpha\,(y), \qquad y \in X.$$

Setzt man jetzt $D = \sum_{|\alpha| \le k} d^\alpha \partial^\alpha$, so liegt D in $\mathcal{D}^k(O)$. Als nächstes entwickle man jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(O)$ folgendermaßen:

$$f = \sum_{|\alpha| \le k} f_\alpha (\pi - y)^\alpha + \sum_{|\beta| = k+1} f_\beta \cdot (\pi - y)^\beta,$$

wobei $f_\alpha \in \mathbb{R}$ und $f_\beta \in \mathcal{C}^\infty(O)$, wende darauf D an und rechne unter Verwendung von Gl. 2.5.3 nach:

$$Df(y) = \sum_{|\alpha| \le k} f_\alpha D(\pi - y)^\alpha + \sum_{|\beta| = k+1} D(f_\beta \cdot (\pi - y)^\beta)\,(y) = \sum_{|\alpha| \le k} \alpha!\, f_\alpha d^\alpha(y) = D(f + \mathcal{J})(y).$$

Das bedeutet aber nichts anderes als $D \in \mathcal{D}^k_{\mathcal{J}}(O)$ und $\Pi^k(D) = D$, also die Surjektivität von Π^k.

Liegt $D = \sum d^\alpha \partial^\alpha \in \mathcal{D}^k_{\mathcal{J}}(O)$ im Kern von Π^k, so muß $d^\alpha(y) = \frac{1}{\alpha!} D(\pi - y)^\alpha(y) = 0$ für alle $y \in X$ gelten, also folgt $d^\alpha \in \mathcal{J}$ und damit $\ker \Pi^k = \mathcal{J}\mathcal{D}^k(O)$. Folglich ist $\mathcal{D}(U)$ wie behauptet isomorph zu $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}(O)/\mathcal{J}\mathcal{D}^\infty(O)$.

Offensichtlich stimmt die Behauptung, daß eine Familie $(D_S)_{S \in \mathcal{S}}$ von Differentialoperatoren $D_S \in \mathcal{D}^k(S)$ einen eindeutig bestimmten Differentialoperator $D \in \mathcal{D}^k(X)$ mit $(Df)_{|S} = D_S f_{|S}$ für $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ definiert, wenn die Funktion $X \ni x \mapsto D_{S_x} f_{|S_x}(x)$ glatt ist.

Es bleibt aber noch nachzuweisen, daß jeder stratifizierte Differentialoperator durch eine solche Familie gegeben ist. Sei also $\mathsf{D} \in \mathcal{D}^k(\mathsf{X})$ stratifiziert. Für einen Punkt $\mathsf{x} \in \mathsf{S}$ wähle man sich dann eine singuläre Karte $\tilde{\mathsf{x}} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ um x, so daß $\mathsf{S} \cap \mathsf{U} = \tilde{\mathsf{x}}^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$, wobei $m = \dim \mathsf{S} \leq n$. Mit anderen Worten ist $\mathsf{x} := \tilde{\mathsf{x}}_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}} : \mathsf{S} \cap \mathsf{U} \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Karte von S. Nach den obigen Überlegungen und da D stratifiziert ist, gilt dann für alle $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})$

$$(\mathsf{D}\mathsf{f})_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \mathsf{d}^\alpha \, \partial_\mathsf{x}^\alpha \mathsf{f}_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}}, \quad \text{wobei } \mathsf{d}^\alpha(\mathsf{y}) = \frac{1}{\alpha!} \mathsf{D}(\mathsf{x}-\mathsf{y})^\alpha(\mathsf{y}) \text{ für } \mathsf{y} \in \mathsf{S} \cap \mathsf{U}.$$

Nun ist $\sum_{|\alpha| \leq k} \mathsf{d}^\alpha \, \partial_\mathsf{x}^\alpha$ ein Differentialoperator auf $\mathsf{S} \cap \mathsf{U}$, also erhält man nach geeignetem Zusammenkleben derartiger Operatoren mit Hilfe einer glatten Teilung der Eins von S einen Differentialoperator D_S und damit die gesuchte Familie $(\mathsf{D}_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$, so daß $(\mathsf{D}\mathsf{f})_{|\mathsf{S}} = \mathsf{D}_\mathsf{S}\mathsf{f}_{|\mathsf{S}}$ für alle $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})$. □

2.6 Poisson-Strukturen

Neben dem differentialgeometrischen Begriff einer Riemannschen Metrik lassen sich auch die wesentlichen Objekte der symplektischen Geometrie auf stratifizierte Räume übertragen. Mit den Marsden–Weinstein-reduzierten Räumen, die in der mathematischen Physik eine wesentliche Rolle spielen, hat man auch eine reichhaltige und bedeutsame Klasse von Beispielen symplektisch-stratifizierter Räume an der Hand.

2.6.1 Definition Ein glatter Schnitt $\Lambda : \mathsf{X} \to \mathsf{T}\mathsf{X} \otimes \mathsf{T}\mathsf{X}$ über einem Whitney (A)-Raum X heißt *Poisson-Bivektor*, falls er folgender Bedingung genügt:

(PS) Für jedes Stratum S liefert die Einschränkung

$$\Lambda_{|\mathsf{S}} : \mathsf{S} \to \mathsf{T}\mathsf{S} \otimes \mathsf{T}\mathsf{S}$$

eine Poisson-Struktur auf S.

Ein Whitney (A)-Raum X zusammen mit einem Poisson-Bivektor nennen wir einen *Poisson-stratifizierten Raum*; sind alle Strata S zusammen mit der induzierten Poisson-Struktur Λ_S sogar symplektisch, so heißt X ein *symplektisch-stratifizierter Raum.*

Ein Poisson-Bivektor Λ induziert einen Bidifferentialoperator $\{\cdot,\cdot\}$ auf X, die sogenannte *Poisson-Klammer*, indem man für jedes Stratum S und Funktionen $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})$ setzt:

$$\{\mathsf{f},\mathsf{g}\}_{|\mathsf{S}} = \Lambda_{|\mathsf{S}} \lrcorner \, (\mathsf{d}\mathsf{f}_{|\mathsf{S}} \otimes \mathsf{d}\mathsf{g}_{|\mathsf{S}}). \tag{2.6.1}$$

Die Funktion $\{\mathsf{f},\mathsf{g}\}$ ist dann auch wirklich glatt auf X, da Λ lokal in jeder singulären Karte zu einem glatten (antisymmetrischen) Bivektorfeld ausgedehnt werden kann, also lokal in jeder Karte $\{\mathsf{f},\mathsf{g}\}$ die Einschränkung einer glatten Funktion des Euklidischen Raums ist.

2.6.2 Bemerkung Der Begriff eines symplektisch-stratifizierten Raums wurde von Sjamaar–Lerman [144] eingeführt (siehe auch Sjamaar [143], Bates–Lerman [4], sowie ORTEGA–RATIU [127]), wobei in einer etwas anderen Form als in 2.6.1. Der Unterschied zwischen unserer Definition und der von SJAMAAR–LERMAN liegt darin, daß in [144] nur ein sehr schwacher Begriff von glatter Struktur verwendet wird, der die Konstruktion eines stratifizierten Tangentialbündels und damit von stetigen oder glatten Vektorfeldern im allgemeinen nicht zuläßt. Genauer verstehen SJAMAAR–LERMAN unter einer glatten Struktur auf einem stratifizierten Raum eine Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(X)$, so daß für jede Funktion $f \in \mathcal{A}$ die Einschränkungen $f_{|S}$ auf die Strata S jeweils glatt sind. Ist nun $\mathcal{A}$ mit einer Klammer $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ versehen, so nennen SJAMAAR–LERMAN das Tripel $(X, \mathcal{A}, \{\cdot,\cdot\})$ einen symplektisch-stratifizierten Raum, wenn

1. jedes Stratum eine symplektische Mannigfaltigkeit ist,
2. $(\mathcal{A}, \{\cdot,\cdot\})$ eine Poisson-Algebra, und
3. die Einbettungen $S \hookrightarrow X$ Poisson-Abbildungen sind.

Man sieht nun sofort, daß jeder in unserem Sinne symplektisch-stratifizierter Raum auch im Sinne von SJAMAAR–LERMAN symplektisch-stratifiziert ist, aber nicht umgekehrt.

2.6.3 Die sicher bedeutendste Klasse von Beispielen singulärer stratifizierter Räume erhält man durch Reduktion symplektischer Mannigfaltigkeiten mit Symmetrie. Im regulären Fall hatten MARSDEN–WEINSTEIN [112] und unabhängig davon MEYER [120] dieses Reduktionsverfahren in die mathematische Physik eingeführt; von SJAMAAR–LERMAN [144] wurde es dann auf den singulären Fall ausgedehnt. Im folgenden wollen wir die Konstruktion der symplektischen Reduktion vorstellen und skizzieren, wie man dadurch symplektisch stratifizierte Räume erhält. Dabei werden wir Begriffe und Resultate aus der Theorie der G-Wirkungen und ihrer Orbiträume benötigen, wie sie in Kapitel 4 bereitgestellt werden. Die Verwendung erst später bewiesener Theoreme schon an dieser Stelle wird jedoch keine Zirkelschlüsse nach sich ziehen, da die in diesem Paragraphen erhaltenen Ergebnisse im Rest dieser Arbeit nicht mehr verwendet werden. Für die in den folgenden Betrachtungen eventuell nötigen Ergänzungen aus der symplektischen Geometrie siehe ABRAHAM–MARSDEN [1].

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω), auf der eine Lie-Gruppe G eigentlich und *symplektisch* wirkt, das heißt für alle $g \in G$ ist Φ_g eine *kanonische Transformation* oder auch ein *Symplektomorphismus* von M, erfüllt also

$$\Phi_g^* \omega = \omega.$$

Man nehme weiter an, es existiere eine G-äquivariante *Impulsabbildung* $J : M \to \mathfrak{g}^*$, das heißt für alle $\xi \in \mathfrak{g}$ gilt $dJ^\xi = i_{\xi_M}\omega$, wobei ξ_M das Fundamentalvektorfeld von ξ ist und J^ξ die glatte Funktion $M \ni x \mapsto \langle J(x), \xi \rangle \in \mathbb{R}$. Ein derartiges Quadrupel (M, ω, G, J) nennt man in der symplektischen Geometrie einen *Hamiltonschen* G-*Raum*.

Die Komponenten der Impulsabbildung stellen Integrale der Bewegung für jeden G-invarianten Hamiltonschen Fluß dar, da für jede G-invariante Funktion $h \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$ und jedes $\xi \in \mathfrak{g}$ gilt:

$$\{h, J^\xi\} = X_{J^\xi} h = \mathcal{L}_{\xi_M} h = 0,$$

wobei X_{J^ξ} das Hamiltonsche Vektorfeld von J^ξ bezeichnet. Folglich sind die Komponenten der Impulsabbildung eines Hamiltonschen Systems mit G-invarianter Hamilton-Funktion

Integrale der Bewegung. Man kann dann die Zahl der Freiheitsgrade des Hamiltonschen Systems reduzieren und gelangt so zu einer einfacheren Beschreibung der Dynamik und gegebenfalls sogar zu einer vollständigen Integration des Systems. Im mathematischen Detail funktioniert diese sogenannte *Marsden–Weinstein-Reduktion* wie folgt.

Man betrachte die Nullniveau-Menge $Z = J^{-1}(0)$ der Impulsabbildung. Unter der Voraussetzung, daß 0 ein regulärer Wert von J ist, stellt Z eine Untermannigfaltigkeit dar, vielfach ist dies aber nicht der Fall, und Z dann "nur" stratifiziert. Wesentlich ist die Beobachtung, daß Z einen G-invarianten Unterraum darstellt, folglich kann man den Orbitraum $M_0 = G\backslash Z$ bilden, und erhalten somit den gesuchten *reduzierten Raum*. Dieser hat die folgenden Eigenschaften.

2.6.4 Satz (Sjamaar–Lerman [144], Sjamaar [143, 3.1.1. Thm], Bates–Lerman [4]) *Sei (M, ω) ein Hamiltonscher G-Raum mit eigentlicher G-Wirkung und $J : M \to \mathfrak{g}^*$ eine G-äquivariante Impulsabbildung. Dann ist die Schnittmenge eines Stratums $M_{(H)}$ vom Orbittyp (H), wobei H eine abgeschlossene Untergruppe von G ist, mit der Nullniveau-Menge Z der Impulsabbildung eine Mannigfaltigkeit. Der Orbitraum $(M_0)_{(H)} = G\backslash(M_{(H)} \cap Z)$ trägt zudem eine kanonische symplektische Struktur $(\omega_0)_{(H)}$, deren Rückzug auf $Z_{(H)} := M_{(H)} \cap Z$ mit der Einschränkung der symplektischen Form ω auf die Menge $Z_{(H)}$ übereinstimmt. Die Zerlegung von $M_0 = G\backslash Z$ in die Mannigfaltigkeiten $(M_0)_{(H)}$ induziert eine Stratifizierung von M_0.*

Beweis: In [144] wurde der Satz für den Fall einer kompakten Lie-Gruppe G bewiesen, und in [4] auf den Fall einer eigentlichen G-Wirkung ausgedehnt. Wir verzichten an dieser Stelle auf einen ausführlichen Nachweis der Behauptung und verweisen stattdessen den Leser auf die beiden genannten Arbeiten. □

Neben der natürlichen Stratifizierung durch Orbittypen trägt der reduzierte Raum $M_0 = G\backslash Z$ auch eine kanonische Funktionalstruktur, die durch $\mathcal{C}^\infty(M_0) = \mathcal{C}^\infty(M)^G/\mathcal{J}^G$ gegeben ist, wobei $\mathcal{J}$ das Ideal der auf Z verschwindenden glatten Funktionen bezeichnet. $\mathcal{C}^\infty(M_0)$ rührt tatsächlich auch von einer glatten Struktur auf M_0 her. Ersichtlich wird dies daraus, daß nach [144] M_0 lokal die Struktur eines Orbitraums einer eigentlichen Lie-Gruppen-Wirkung trägt, und die zugehörige lokale glatte Struktur mit der durch $\mathcal{C}^\infty(M_0)$ gegebenen Funktionalstruktur übereinstimmt. Als weitere Konsequenz ergibt sich unter Verwendung von Satz 4.4.6, daß M_0 sogar Whitney-stratifiziert und somit auch lokal trivial ist.

2.6.5 Satz *Jeder reduzierte Raum M_0 wie in Satz 2.6.4 stellt einen symplektisch-stratifizierten Raum im Sinne von Definition 2.6.1 dar. Die Poisson-Klammer auf $\mathcal{C}^\infty(M_0)$ genügt dabei der Beziehung*

$$\{f, g\} \circ \pi = \{\overline{f}, \overline{g}\}_{|Z}, \qquad f, g \in \mathcal{C}^\infty(M_0). \tag{2.6.2}$$

Dabei bezeichnet $\pi : Z \to M_0$ die kanonische Projektion, und $\overline{f}, \overline{g} \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$ seien zu f, g jeweils so gewählt, daß $f \circ \pi = \overline{f}_{|Z}$ und $g \circ \pi = \overline{g}_{|Z}$.

Beweis: Daß durch Gl. 2.6.2 eine wohldefinierte Poisson-Klammer auf $\mathcal{C}^\infty(M_0)$ gegeben ist, haben Sjamaar–Lerman in [144] gezeigt. Ebenso haben sie nachgewiesen, daß für jeden Orbittyp (H) und $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M_0)$ die Beziehung

$$\{f, g\}_{|(M_0)_{(H)}} = \{f_{|(M_0)_{(H)}}, g_{|(M_0)_{(H)}}\}_{(H)}$$

gilt, wobei $\{\cdot,\cdot\}_{(H)}$ die Poisson-Klammer über der symplektischen Mannigfaltigkeit $(M_0)_{(H)}$ bezeichnet. Folglich ist die Poisson-Klammer auf $\mathcal{C}^\infty(M_0)$ strataweise durch einen regulären, also von einer symplektischen Form stammenden Poisson-Bivektor $\Lambda_{(H)}$ gegeben. Daß der sich aus den $\Lambda_{(H)}$ zusammensetzende stratifizierte Bivektor Λ tatsächlich glatt ist, ergibt sich nun aus Proposition 2.2.6 und Gl. 2.6.2. Somit ist (M_0, Λ) ein Poisson-stratifizierter Raum, und, da alle Strata symplektisch sind, sogar symplektisch-stratifiziert. □

2.6.6 Bemerkung In der Arbeit [127] von Ortega–Ratiu konnte die singuläre Reduktion nach Sjamaar–Lerman auch auf Poisson-Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden.

2.6.7 Beispiel (vgl. [102, Sec. 1]) Man betrachte die kanonische SO(2)-Wirkung auf $\mathbb{R}^2$ und lifte sie auf den Kotangentialraum $M = T^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

Durch einfache Rechnung prüft man, daß die SO(2)-Wirkung symplektisch bezüglich der kanonischen symplektischen Form $\omega = dx_1 \wedge d\xi_1 + dx_2 \wedge d\xi_2$ ist. Eine passende Impulsabbildung erhält man durch den Drehimpuls $J(q,p) = x_1\xi_2 - x_2\xi_1$. Da 0 ein singulärer Wert von J ist, kann der reduzierte Raum $M_0 = Z/\,\mathrm{SO}(2)$ nicht glatt sein. Man rechnet aber leicht nach, daß $Z = J^{-1}(0)$ durch die Vereinigung von $Z_{(\mathrm{SO}(2))} = \{0\}$ und

$$Z_{(1)} = \left\{(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \neq 0 \,\middle|\, x_1\xi_2 - x_2\xi_1 = 0\right\}$$

gegeben ist. Folglich ist M_0 die disjunkte Vereinigung der Strata $(M_0)_{(\mathrm{SO}(2))} = \{0\}$ und $(M_0)_{(1)} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, wobei ein entsprechender (symplektischer) Isomorphismus durch

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ni \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{SO}(2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix} \in (M_0)_{(1)} \tag{2.6.3}$$

gegeben ist. Wie sieht nun die glatte Struktur auf M_0 aus, die ja letztlich entscheidend für die geometrische Eigenschaften von M_0 ist? Eine homogene Hilbert-Basis der SO(2)-invarianten Polynome auf $T^*\mathbb{R}^2$ ist durch die vier Funktionen

$$p_1 = x_1^2 + x_2^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad p_2 = x_1\xi_1 + x_2\xi_2,$$
$$r = x_1^2 + x_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad \text{und} \quad J = x_1\xi_2 - x_2\xi_2.$$

gegeben. Da J natürlich auf Z verschwindet, erhalten wir eine eigentliche Einbettung $\iota : M_0 \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{SO}(2)\nu \mapsto (p_1(\nu), p_2(\nu), r(\nu))$, $\nu \in \mathbb{R}^4$. Man rechnet nun leicht nach, daß modulo dem Verschwindungsideal $\mathcal{J}$ von Z die Beziehung $r^2 = p_1^2 + p_2^2$ gilt, daß also mit anderen Worten das Bild von ι im Kegel $X_{\text{Cone}} = \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y_3^2 = y_1^2 + y_2^2\right\}$ liegt. Nach Gl. 2.6.3 muß sogar $\operatorname{im} \iota = X_{\text{Cone}}$ gelten. Aufgrund des Satzes von Schwarz 4.4.3 und der Definition der glatten Struktur auf M_0 stimmt die Algebra $\mathcal{C}^\infty(M_0)$ in kanonischer Weise mit der Algebra der auf $X_{\text{Cone}} = \iota(M_0)$ eingeschränkten glatten Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ überein. Folglich sind M_0 und X_{Cone} als stratifizierte Räume mit glatter Struktur isomorph.

2.6.8 Bemerkung Im Zusammenhang mit stratifiziert-symplektischen Räumen sind natürlich auch die Modulräume flacher Zusammenhänge auf Riemannschen Flächen nach Atiyah–Bott [3] von großem Interesse. Diese Modulräume sind letztlich ja nichts anderes als Marsden–Weinstein-Quotienten unendlichdimensionaler symplektischer Räume. Nach Goldman [55] und Karshon [90] sind sie symplektisch, tragen eine kanonische Funktionalstruktur (vgl. Karshon [90] und Huebschmann [87]), die sich als glatte Struktur in unserem Sinne erweist, und sind zudem stratifiziert (Guruprasad–Huebschmann–Jeffrey–Weinstein [68] und Huebschmann [85, 86]). Modulräume flacher Zusammenhänge liefern somit weitere nichttriviale und vor allem für die mathematische Physik sehr bedeutsame Beispiele symplektisch-stratifizierter Räume.

2.6.9 Auch für symplektisch-stratifizierte Räume kann der Begriff einer Deformationsquantisierung à la Bayen et al. [5] geprägt werden, und sogar für jeden Poisson-stratifizierten Raum. Sei also X Poisson-stratifiziert und Λ das zugehörige Bivektorfeld. Man betrachte den linearen Raum $\mathcal{A} := \mathcal{C}^\infty(X)[[\lambda]]$ der formalen Potenzreihen in einem Parameter λ und mit Koeffizienten in $\mathcal{C}^\infty(X)$. Unter einer *formalen differentiellen Deformationsquantisierung* von X oder auch einem *Sternprodukt* auf X verstehen wir dann nichts anderes als eine assoziative Verknüpfung $\star : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:

(DQ1) Die Verknüpfung $\star$ ist $\mathbb{R}[[\lambda]]$-bilinear.

(DQ2) Es gibt Bidifferentialoperatoren $b_k : \mathcal{C}^\infty(X) \times \mathcal{C}^\infty(X) \to \mathcal{C}^\infty(X)$, so daß für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(X)$
$$f \star g = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^k \, b_k(f, g).$$

(DQ3) Für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(X)$ gilt
$$f \star g = fg + O(\lambda) \quad \text{und} \quad 1_X \star f = f \star 1_X = f,$$
wobei 1_X die konstante Funktion auf X mit Wert 1 bezeichnet.

(DQ4) Der Bidifferentialoperator b_1 ist gleich dem Poisson-Bivektor Λ.

Aufgrund der Arbeiten von deWilde–Lecoomte [44, 45] sowie der von Fedosov [48, 49] weiß man, daß zu jeder symplektischen Mannigfaltigkeit ein Sternprodukt existiert. Nach einem jüngeren Resultat von Kontsevich [95] ist sogar jede Poisson-Mannigfaltigkeit deformationsquantisierbar. Was jedoch symplektisch-stratifizierte Räume angeht, so gibt es bisher noch keine allgemeingültigen Aussagen über die

Existenz von Sternprodukten auf solchen Räumen. Allerdings erscheint es sehr aussichtsreich, das geometrische Verfahren zur Deformationsquantisierung nach FEDOSOV auch auf symplektisch-stratifizierte Räume, die nur Orbifold-Singularitäten besitzen (siehe 4.4.10), ausdehnen zu können.

2.6.10 Ein vielversprechender Ansatz um auch für symplektisch-stratifizierte Räume zeigen zu können, daß sie deformationsquantisierbar sind, liegt in der Methode von KONTSEVICH, genauer in der von ihm in [96] aufgestellten und dann in [95] bewiesenen Formalitätsvermutung, die unter anderem impliziert, daß jede Poisson-Mannigfaltigkeit ein Strenprodukt besitzt (siehe auch VORONOV [161]). Wir wollen im folgenden die Formalitätsvermutung erläutern und inwiefern sie zum Nachweis der Deformationsquantisierbarkeit stratifiziert-symplektischer Räume angewandt werden kann. Die Erläuterungen werden sich dabei auf eine Skizze der wesentlichen Ideen beschränken müssen, da eine detaillierte Darstellung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

Wesentliche Zutat der Formalitätsvermutung sind zwei sogenannte differentielle graduierte Lie-Algebren, nämlich die Lie-Superalgebra $\mathsf{T}^\bullet(\mathsf{M})$ der antisymmetrischen Polyvektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M und die Lie-Superalgebra $\mathsf{D}^\bullet(\mathsf{M})$ der polydifferentiellen Hochschild-Koketten über der Algebra $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$. Lassen Sie mich diese Zutaten etwas genauer beschreiben. Unter einer *differentiellen graduierten Lie-Algebra* versteht man eine Lie-Algebra in der Tensorkategorie der Komplexe von Vektorräumen, mit anderen Worten also ein Objekt der Form

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k, \quad [\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}^k \otimes \mathfrak{g}^l \to \mathfrak{g}^{k+l}, \quad \mathrm{d} : \mathfrak{g}^k \to \mathfrak{g}^{k+1}, \quad \mathrm{d}^2 = 0.$$

Die Lie-Superalgebra $\mathsf{T}^\bullet(\mathsf{M})$ hat die Komponenten

$$\mathsf{T}^k(\mathsf{M}) := \mathcal{C}^\infty(\mathsf{M}, \Lambda^{k+1}\mathsf{TM}), \quad k \geq -1,$$

das Differential $\mathsf{d} := 0$ und ist mit der Schouten–Nijenhuis-Klammer als Lie-Klammer versehen. Der Raum $\mathsf{D}^k(\mathsf{M})$ der polydifferentiellen Hochschild-k-Koketten (siehe hierzu auch Abschnitt 6.3) wiederum besteht aus allen Abbildungen der Form

$$\mathsf{f}_0 \otimes \cdots \otimes \mathsf{f}_k \mapsto \sum_{j\in J} \mathsf{D}_{j0}\mathsf{f}_0 \cdots \mathsf{D}_{jk}\mathsf{f}_k, \qquad \mathsf{f}_0, \cdots, \mathsf{f}_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{M}), \;\; \mathsf{D}_{j0}, \cdots, \mathsf{D}_{jk} \in \mathcal{D}(\mathsf{M}),$$

wobei J eine endliche Indexmenge bezeichnet. Als Ableitungsoperator wird das gewöhnliche Differential im Hochschild-Komplex genommen, die Lie-Klammer ist durch die Gerstenhaber-Klammer gegeben.

Zwischen den eben eingeführten beiden differentiellen graduierten Lie-Algebren hat man eine kanonische Abbildung $\mathsf{F}_1 : \mathsf{T}^\bullet(\mathsf{M}) \to \mathsf{D}^\bullet(\mathsf{M})$

$$\mathsf{F}_1 : (\mathsf{V}_0 \wedge \cdots \wedge \mathsf{V}_k) \mapsto \left(\mathsf{f}_0 \otimes \cdots \otimes \mathsf{f}_k \mapsto \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma\in \mathsf{S}_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=0}^{k} \mathsf{V}_{\sigma(i)}\mathsf{f}_i \right),$$

wobei die V_i Vektorfelder und die f_i glatte Funktionen auf M sind. Aufgrund einer topologischen Version des Satzes von HOCHSCHILD–KOSTANT–ROSENBERG [82] ist F_1 ein Quasi-Isomorphismus (siehe auch Satz 6.4.5 und PFLAUM [133]), deswegen nennen wir ihn auch den HKR-Quasi-Isomorphismus. Nun können wir formulieren:

2.6.11 Formalitätsvermutung (Kontsevich [96, 95]) *Es existiert ein L_∞-Morphismus F von $\mathsf{T}^\bullet(\mathsf{M})$ nach $\mathsf{D}^\bullet(\mathsf{M})$, dessen erster Term durch den HKR-Quasi-Isomorphismus F_1 gegeben ist.*

Die Frage ist jetzt natürlich, was man unter einem L_∞-Morphismus versteht, und welchen Zusammenhang er mit der Deformationstheorie bzw. -quantisierug hat. Zuerst zum L_∞-Morphismus. Dazu betrachte man einen graduierten Vektorraum $\mathfrak{g}$ und assoziiere zu $\mathfrak{g}$ die folgende graduierte Koalgebra:

$$\mathsf{C}(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{Sym}^k(\mathfrak{g}[1]) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Lambda^k(\mathfrak{g})[k],$$

wobei Sym^k der Funktor des k-fachen symmetrischen Tensorprodukts ist. Falls die Koalgebra $\mathsf{C}(\mathfrak{g})$ zusätzlich noch ein Differential Q vom Grad $+1$ besitzt, so nennt man das Paar $(\mathsf{C}(\mathfrak{g}), \mathsf{Q})$ eine *L_∞-Algebra*, und ein *L_∞-Morphismus* ist nichts anderes als ein Morphismus in der Kategorie der L_∞-Algebren. Für den Fall, daß $\mathfrak{g}$ sogar eine differentielle graduierte Lie-Algebra darstellt, so induzieren das Differential d und die Lie-Klammer $[\cdot,\cdot]$ von $\mathfrak{g}$ automatisch ein Differential Q auf $\mathsf{C}(\mathfrak{g})$ mit $\mathsf{Q}_1 = \mathsf{d}$, $\mathsf{Q}_2 = [\cdot,\cdot]$ und $\mathsf{Q}_3 = \mathsf{Q}_4 = \cdots = 0$.

Als nächstes kommen wir zur Deformationstheorie. Jeder differentiellen graduierten Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ordnet man den Modulraum $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$ der Lösungen der Maurer–Cartan-Gleichung zu:

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}) := \left\{\xi \in \mathfrak{g} \,\middle|\, \mathsf{d}\xi + \tfrac{1}{2}[\xi,\xi] = 0\right\}/\mathsf{G}^0,$$

wobei G^0 die zur Lie-Algebra $\mathfrak{g}^0$ korrespondierende Lie-Gruppe bezeichnet. Ist nun $\mathfrak{m}$ eine kommutative Algebra ohne Eins, wobei in der von uns intendierten Anwendung der Deformationsquatisierung immer $\mathfrak{m} = \lambda\mathbb{R}[[\lambda]]$ sein wird, so ist der Funktor $\mathrm{Def}_\mathfrak{g}$ der Deformationen von $\mathfrak{g}$ durch

$$\mathrm{Def}_\mathfrak{g}(\mathfrak{m}) = \mathcal{M}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m})$$

gegeben. $\mathfrak{m}$ kann dabei als Parameterrraum der Deformation interpretiert werden. Die fundamentale Aussage besteht nun darin, daß ein L_∞-Morphismus F zwischen $\mathsf{C}(\mathfrak{g}_1)$ und $\mathsf{C}(\mathfrak{g}_2)$, dessen erster Term F_1 einen Quasi-Isomorphismus darstellt, einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Def}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{m})$ und $\mathrm{Def}_{\mathfrak{g}_2}(\mathfrak{m})$ induziert. Das ist die Quintessenz, die letztlich auf den Zugang zur Deformationstheorie nach Schlessinger–Stasheff [136] zurückgeht.

Jetzt können wir uns wieder unserem ursprünglichen Anliegen der Deformationsquantisierung zuwenden, und bemerken, daß (mit $\mathfrak{m} = \lambda\,\mathbb{R}[[\lambda]]$) die Deformationen $\mathrm{Def}_{\mathsf{T}^\bullet(\mathsf{M})}(\mathfrak{m})$ aus genau den formalen Poisson-Strukturen bestehen und die Deformationen $\mathrm{Def}_{\mathsf{D}^\bullet(\mathsf{M})}(\mathfrak{m})$ aus den Sternprodukten auf M. Folglich liefert ein L_∞-Morphismus wie in der Formalitätsvermutung eine natürliche Isomorphie zwischen den Äquivalenzklassen formaler Poisson-Strukturen und Sternprodukten auf M.

Übertragen wir das ganze nun auf den stratifizierten Fall, und lassen X einen symplektisch-stratifizierten Raum mit Poisson-Bivektor Λ sein. Nehmen wir der Einfachheit halber an, X sei abgeschlossene Teilmenge eines offenen $\mathsf{O} \subset \mathbb{R}^n$ und erbe von $\mathbb{R}^n$ die glatte Struktur. Sei dann $\overline{\Lambda}$ ein antisymmetrisches Bivektorfeld auf O, so daß $\overline{\Lambda}$ auf X mit Λ übereinstimmt. Das Bivektorfeld $\overline{\Lambda}$ induziert dann über O ein im allgemeinen nichtassoziatives "Sternprodukt" $\overline{\star}$, da für $\overline{\Lambda}$ die Jacobi-Identität nicht gelten muß. An dieser Stelle betrachten wir die Strata S und heben hervor, daß die kanonischen Einbettungen $\iota_\mathsf{S} : \mathsf{S} \to \mathsf{X}$ Poisson-Abbildungen darstellen. Ist jetzt die Konstruktion des L_∞-Morphismus F von $\mathsf{C}(\mathsf{T}^\bullet(\mathsf{M}))$ und $\mathsf{C}(\mathsf{D}^\bullet(\mathsf{M}))$ in gewisser Weise natürlich oder bezüglich

Poisson-Abbildungen, so impliziert dies erst einmal, daß für f aus dem Verschwindungsideal $\mathcal{J}$ von X und für $g \in \mathcal{C}^\infty(O)$ die Beziehung $f \bar{\star} g_{|X} = g \bar{\star} f_{|X} = 0$ gilt. Folglich kann $\bar{\star}$ zu einer $\mathbb{R}[[\lambda]]$-bilinearen Abbildung $\star : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(X)[[\lambda]] = (\mathcal{C}^\infty(O)/\mathcal{J})[[\lambda]]$ heruntergedrückt werden. Wendet man nun nochmals die Natürlichkeit der Konstruktion von F an, so wird strataweise klar, daß die Einschränkung von $\star$ auf jedes der S ein Sternprodukt liefert, also muß das auch global auf X der Fall sein. Insgesamt halten wir fest:

2.6.12 Resultat *Unter der Voraussetzung, daß die Konstruktion des L_∞-Morphismus in der Formalitätsvermutung in natürlicher Weise erfolgen kann, existiert auf jedem symplektisch-stratifizierten Raum ein Sternprodukt.*

Aus dem Beweis von Kontsevich für seine Formalitätsvermutung ist nicht unmittelbar ersichtlich, ob die Konstruktion von F tatsächlich in einem kategoriellen Sinne natürlich ist, dies erscheint jedoch sehr plausibel. Wir formulieren deshalb die folgende Aussage, wobei nicht unerwähnt bleiben soll, daß der Begriff “natürlich” im Zusammenhang mit der Formalitätsvermutung weiterer Klärung bedarf.

2.6.13 Funktorielle Formalitätsvermutung *Die graphentheoretische Konstruktion des L_∞-Morphismus nach* Kontsevich *ist in einem geeigneten kategoriellen Sinne natürlich.*

Kapitel 3

Kontrolltheorie

3.1 Tubulare Umgebungen

In diesem Abschnitt wird der Begriff einer tubularen Umgebungen eingeführt und der klassische Tubensatz bewiesen. Bevor wir jedoch dazu kommen, muß noch einiges an nützlicher Notation bereitgestellt werden.

3.1.1 Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie, $S \subset X$ eine lokal abgeschlossene Untermenge, und T_S eine offene Umgebung von S in X. Zudem sei $\pi_S : T_S \to S$ eine stetige Retraktion, also $(\pi_S)_{|S} = \mathrm{id}_S$, und $\rho_S : T_S \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ eine stetige Funktion mit $\rho_S^{-1}(0) = S$. Eine solche Situation findet man zum Beispiel vor, wenn X durch ein metrisches Vektorbündel E über einer Mannigfaltigkeit S gegeben ist; dann kann $T_S = E$ gewählt werden, π_S als die Projektion von E, und $\rho_S : E \to \mathbb{R}$ als die Abstandsfunktion $v \mapsto \|v\|^2 = \eta(v, v)$, wobei η das Skalarprodukt auf E bezeichnet.

Stellen nun $\varepsilon, \delta : S \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zwei (meistens stetige) Funktionen mit $\varepsilon < \delta$ dar, gilt also $\varepsilon(x) < \delta(x)$ für alle $x \in S$, so setzen wir

$$\begin{aligned}
[\varepsilon] &= \big\{(x,t) \in S \times \mathbb{R} \big|\ t = \varepsilon(x)\big\}, \\
[\varepsilon, \delta[&= \big\{(x,t) \in S \times \mathbb{R} \big|\ \varepsilon(x) \leq t < \delta(x)\big\}, \\
T_S^\varepsilon &= \big\{x \in T_S \big|\ \rho_S(x) < \varepsilon(\pi_S(x))\big\}, \\
\dot{T}_S^\varepsilon &= T_S^\varepsilon \setminus S, \\
\overline{T}_S^\varepsilon &= \big\{x \in T_S \big|\ \rho_S(x) \leq \varepsilon(\pi_S(x))\big\},
\end{aligned}$$

und definieren in analoger Weise $[\varepsilon, \delta]$, $]\varepsilon, \delta[$ sowie $]\varepsilon, \delta[$. Falls wir in einigen wenigen Fällen verdeutlichen wollen, daß die Mengen T_S^ε, $\dot{T}_S^\varepsilon$ und $\overline{T}_S^\varepsilon$ Teilmengen von X sind, so schreiben wir $T_{S\subset X}^\varepsilon$, $\dot{T}_{S\subset X}^\varepsilon$ und $\overline{T}_{S\subset X}^\varepsilon$.

3.1.2 Lemma *Nach eventueller Einschränkung von T_S, π_S und ρ_S gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Für jede offene Umgebung W von S in X gibt es eine stetige Funktion $\delta : S \to \mathbb{R}^{>0}$ mit $S \subset T_S^\delta \subset W$.*

(2) *Es existiert eine stetige Funktion $\varepsilon : S \to \mathbb{R}^{>0}$, so daß die eingeschränkte Abbildung $(\pi_S, \rho_S) : T_S^\varepsilon \to [0, \varepsilon[$ eigentlich und surjektiv ist.*

BEWEIS: Sei für jedes $x \in S$ eine in X offene Umgebung V_x mit kompakten Abschluß $\overline{V_x} \subset T_S$ gewählt. Wir behaupten nun, daß die Mengen $W_{x,n} := V_x \cap \pi_S^{-1}(U_{x,n}) \cap \rho_S^{-1}[0, \delta_{x,n}[$ eine Umgebungsbasis von x in X darstellen, wenn $U_{x,n} \subset S$ eine Umgebungsbasis von x in S durchläuft, und $(\delta_{x,n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist mit $\lim_{n\to\infty} \delta_{x,n} = 0$. Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es eine offene Umgebung V von x in X und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in W_{x,n} \setminus V$. Da die y_n in der kompakten Menge $\overline{V_x} \subset T_S$ liegen, könnten wir nach Auswahl einer Teilfolge davon ausgehen, daß $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y \in T_S$ konvergiert. Nach Definition der $W_{x,n}$ müßte dann $\pi_S(y) = \lim_{n\to\infty} \pi_S(y_n) = x$ und $\rho_S(y) = \lim_{n\to\infty} \rho_S(y_n) = 0$ gelten, also $y = x$, was im Widerspruch dazu stünde, daß in der Umgebung V von $y = x$ kein Element der konvergenten Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt. Also bilden die $W_{x,n}$ eine Umgebungsbasis von x.

Nun wählen wir eine lokalendliche Überdeckung $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von S durch in X offene Mengen $V_n \subset T_S$, so daß $V_n \subset V_{x_n}$ für geeignete $x_n \in S$. Dann definieren wir $\tilde{T}_S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ und bemerken, daß $\tilde{T}_S$ eine offene Umgebung von S in X darstellt. Die Einschränkungen von π_S und ρ_S auf $\tilde{T}_S$ bezeichnen wir mit $\tilde{\pi}_S$ und $\tilde{\rho}_S$. Nach dem oben Bewiesenen stellen die Mengen $\tilde{W}_{x,n} := \tilde{\pi}_S^{-1}(U_{x,n}) \cap \tilde{\rho}_S^{-1}[0, \delta_{x,n}[$ dann eine Umgebungsbasis von x in X dar. Wir zeigen nun, daß das Tripel $(\tilde{T}_S, \tilde{\pi}_S, \tilde{\rho}_S)$ der Relation (1) genügt. Sei dazu für jedes $x \in S$ ein $U_{x,0} \subset S$ offen und ein $\delta_{x,0} = \delta_{x,1} > 0$ so gewählt, daß $\tilde{W}_{x,0} \subset W$. Da S parakompakt ist, können wir eine Familie $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus S finden sowie offene Umgebungen $U_m = U_{x_m,1}$ von x_m in S, so daß $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine lokalendliche offene Überdeckung von S ist, und $U_m \subset U_{x_m,0}$. Setzt man nun $\tilde{W} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \tilde{W}_{x_m,1}$, so ist $\tilde{W}$ eine offene Umgebung von S und $\tilde{W} \subset W$. Da S parakompakt ist, gibt es jetzt eine stetige Funktion $\delta : R \to \mathbb{R}^{>0}$ mit $\delta(x) < \delta_{x_m,1}$ für alle $x \in S$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_m$. Das bedeutet aber, daß $\tilde{T}_S^{\delta} \subset \tilde{W} \subset W$ gilt, also (1) gezeigt ist.

Da X lokalkompakt ist, gibt es eine lokalendliche Überdeckung $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von S durch in X offene Mengen V_n mit kompaktem Abschluß $\overline{V_n} \subset \tilde{T}_S$. Sei V die Umgebung $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}$ von S, und $\varepsilon : S \to \mathbb{R}^{>0}$ eine stetige Funktion mit $\tilde{T}_S^{\varepsilon} \subset V$. Desweiteren sei

$$\rho(x) = \inf\left\{t \in \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \nexists y \in \tilde{\pi}_S^{-1}(x) \text{ mit } \tilde{\rho}_S(y) = t\right\}.$$

Dann ist die Abbildung $\rho : R \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ offensichtlich nach unten halbstetig und verschwindet wegen (1) nirgends. Also können wir ε so wählen, daß $\varepsilon < \rho$. Zum Nachweis von (2) für dieses ε genügt es nun zu zeigen, daß für jedes $K \subset S$ kompakt und $\delta > 0$ mit $\delta < \varepsilon(x)$ für alle $x \in K$ die Menge $C_{K,\delta} = \tilde{\pi}_S^{-1}(K) \cap \tilde{\rho}_S^{-1}([0, \delta])$ kompakt ist. Dies geht aber daraus hervor, daß $C_{K,\delta}$ in $\tilde{T}_S$ abgeschlossen ist, und in der kompakten Menge $\bigcup_{V_n \cap K \neq \emptyset} \overline{V_n} \subset \tilde{T}_S$ liegt. Damit ist die Einschränkung $(\tilde{\pi}_S, \tilde{\rho}_S) : \tilde{T}_S^{\varepsilon} \to [0, \varepsilon[$ eigentlich, und wegen der Wahl $\varepsilon < \rho$ auch surjektiv. Das war zu zeigen. □

Nun haben wir alle Voraussetzungen, um den Begriff der tubularen Umgebung einführen zu können.

3.1.3 Definition Sei $m \in \mathbb{N}^{>0} \cup \{\infty\}$ und S eine $\mathcal{C}^m$-Untermannigfaltigkeit von M. Eine *tubulare Umgebung* von S in M der *Klasse* $\mathcal{C}^m$ ist dann ein Tripel $T = (E, \varepsilon, \varphi)$, wobei $\pi_E : E \to S$ ein $\mathcal{C}^m$-Vektorbündel über S mit Skalarprodukt η ist, $\varepsilon : S \to \mathbb{R}^{>0}$ eine $\mathcal{C}^m$-Abbildung (oder auch nur unterhalbstetige Funktion), und φ ein $\mathcal{C}^m$-Diffeomorphismus von $T^{\varepsilon}_{S\subset E} = \left\{v \in E \,\middle|\, \rho_E(v) := \|v\|^2 = \eta(v, v) < \varepsilon(\pi(v))\right\}$ auf eine offene Umgebung T von

S, den sogenannten *Totalraum* von T, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T^{\varepsilon}_{S\subset E} \arrow[dr, "\varphi"] & \\ S \arrow[u] \arrow[r] & M \end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

kommutiert. Dabei ist S in natürlicher Weise in $T^{\varepsilon}_{S\subset E} \subset E$ als Nullschnitt eingebettet. Manchmal bezeichnen wir, wenn auch formal nicht ganz korrekt, auch den Totalraum T als tubulare Umgebung von S in M.

Ist $f : M \to N$ eine $\mathcal{C}^m$-Abbildung, so nennt man eine tubulare Umgebung T von $S \subset M$ der Klasse $\mathcal{C}^m$ *kompatibel* mit f, falls $f \circ \pi = f_{|T}$.

Jede tubulare Umgebung $T = (E, \varepsilon, \varphi)$ induziert mittels der Projektion $\pi_E : E \to S$ eine stetige Retraktion $\pi_S : T_S \to S$, genannt *Projektion*, durch $\pi_S = \pi_E \circ \varphi^{-1}$. Zudem erhält man die sogenannte *tubulare Funktion* $\rho_S : T_S \to \mathbb{R}$ von T mittels $\rho_S = \rho_E \circ \varphi^{-1}$, wobei ρ_E die oben definierte Abstandsfunktion auf E darstellt. Offensichtlich ist dann $S = \rho_S^{-1}(0)$. Zudem ist die tubulare Funktion genau auf der Menge $T \setminus S$ submersiv.

3.1.4 Beispiel Man betrachte die natürliche Einbettung von $\mathbb{R}^m$ in den Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, $n = m + k$ mittels der ersten m Koordinaten. Sei E das triviale Vektorbündel über $\mathbb{R}^m$ mit typischer Faser $\mathbb{R}^k$ und dem Euklidischen Skalarprodukt als Fasermetrik. Zudem sei $\varepsilon = 1$ und $\varphi : T^{\varepsilon}_{\mathbb{R}^m} \to \mathbb{R}^n$ die Einschränkung der identischen Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ auf

$$T^n_m := T^{\varepsilon}_{\mathbb{R}^m} = \left\{ x = (y, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \,\middle|\, \|v\| < 1 \right\}.$$

Dann stellt das Tripel $(\mathbb{R}^n, \varepsilon, \varphi)$ eine tubulare Umgebung von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ dar, die wir die *Standard-Tubenumgebung* T^n_m nennen. In diesem Fall ist die Projektion $\pi^n_m := \pi_{\mathbb{R}^m}$ durch die orthogonale Projektion $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_m, 0 \cdots, 0)$ von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^m$ gegeben, und die tubulare Funktion $\rho^n_m := \rho_{\mathbb{R}^m}$ durch das Quadrat der Funktion, die den Euklidischen Abstand von jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ zu dem Unterraum $\mathbb{R}^m$ mißt, also durch $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x^2_{m+1} + \cdots + x^2_n$.

3.1.5 Beispiel Falls $h : (M', S') \to (M, S)$ ein Diffeomorphismus ist, der S auf S' abbildet, und $T = (E, \varepsilon, \varphi)$ eine tubulare Umgebung von S in M, so ist $h^*T = (h^*E, \varepsilon \circ h_{|S'}, h^{-1} \circ \varphi)$ eine tubulare Umgebung von S' in M'. In analoger Weise definiert man h_*T' für jede tubulare Umgebung T' von S' in M'.

3.1.6 Klassischer Tubensatz *Sei* $m \in \mathbb{N}^{>0} \cup \{\infty\}$, M *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Klasse* $\mathcal{C}^{m+2}$ *mit Riemannscher Metrik* μ *der Klasse* $m + 1$, *und* $S \subset M$ *eine* $\mathcal{C}^{m+2}$*-Untermannigfaltigkeit. Außerdem bezeichne* N *das bezüglich* μ *definierte Orthogonalbündel von* TS *in* $T_{|R}M$. *Dann existiert eine* $\mathcal{C}^m$*-Funktion* $\varepsilon : S \to \mathbb{R}^{>0}$, *so daß über* $T^{\varepsilon}_{S\subset N}$ *die Einschränkung* $\varphi := \exp_{|T^{\varepsilon}_{S\subset N}} : T^{\varepsilon}_{S\subset N} \to M$ *der Exponentialfunktion definiert ist, und das Tripel* $(N, \varepsilon, \varphi)$ *eine tubulare Umgebung von* S *in* M *der Klasse* $\mathcal{C}^m$ *darstellt.*

Eine tubulare Umgebung $(N, \varepsilon, \varphi)$ wie im klassischen Tubensatz nennen wir durch μ *induziert*, und notieren sie oft in der Form $(N, \varepsilon, \exp_{|N})$.

Beweis: Sei W eine offene Umgebung des Nullschnitts von TM, so daß die Abbildung

$(\pi, \exp) : W \to M \times M$ einen $\mathcal{C}^m$-Diffeomorphismus auf ihr Bild darstellt. Setzt man dann $V := W \cap N$, so ist V eine offene Umgebung von S in N, wobei S mit dem Nullschnitt in N identifiziert wird. Wir betrachten die Einschränkung $\exp_{|V} : V \to M$. Da für jedes $x \in M$ und Tangentialvektoren $v = (v^h, v^v) \in T_{0_x}TM \cong T_xM \oplus T_xM$ die Beziehung

$$T_{0_x} \exp v = v^h + v^v$$

richtig ist, muß $\exp_{|V}$ nach eventueller Einschränkung von V zu einer etwas kleineren Umgebung des Nullschnitts submersiv sein. Dabei kann V so gewählt werden, daß $\exp^{-1}(S) \cap V = S$. Aufgrund von $\dim M = \dim V$ ist $\exp_{|V}$ nicht nur submersiv, sondern sogar ein lokaler Diffeomorphismus, der auf S mit der identischen Abbildung übereinstimmt. Aus dem nachstehenden Lemma ergibt sich dann die Existenz einer offenen Umgebung $\tilde{T} \subset V$ von S, so daß $\exp_{|\tilde{T}}$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Nach Lemma 3.1.2 existiert eine stetige und nach leichter Abänderung auch eine $\mathcal{C}^m$-Funktion $\varepsilon : S \to \mathbb{R}^{>0}$, so daß $T^{\varepsilon}_{S \subset N} \subset \tilde{T}$. Folglich stellt $\varphi = \exp_{|T^{\varepsilon}_{S\subset N}}$ einen Diffeomorphismus auf sein Bild dar und liefert somit den letzten Bestandteil für eine tubulare Umgebung von S. □

3.1.7 Lemma *Seien M, N Mannigfaltigkeiten, und $S \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, eventuell mit Rand. Stellt unter diesen Voraussetzungen $f : N \to M$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion dar, so daß die Einschränkung $f_{|S}$ eine Einbettung und für jeden Punkt $x \in S$ die Tangentialabbildung T_xf bijektiv ist, so gibt es eine offene Umgebung T von S in N, so daß f die Menge T diffeomorph auf eine offene Menge von M abbildet.*

Beweis: Wir gehen beim Beweis analog wie Lang [101, IV.5] vor und verwenden dabei das von Godement [54] auf Seite 150 angegebene Argument.

Das Bild von S unter f identifizieren wir der Einfachheit halber mit S. Sei nun $(N_j)_{j\in J}$ eine lokalendliche Überdeckung von S durch in N offene Mengen N_j, so daß die Einschränkungen $f_j := f_{|N_j} : N_j \to M_j$ Diffeomorphismen auf offene Mengen $M_j \subset M$ sind, und jedes N_j mit S nichtleeren Durchschnitt hat. Anschließend wähle man sich eine $(M_j)_{j\in J}$ untergeordnete Überdeckung $(Y_j)_{j\in J}$ von S durch in M offene Mengen Y_j, so daß $Y_j \cap S \neq \emptyset$ und $\overline{Y_j} \subset M_j$ gilt. Sei $\overline{f}_j : M_j \to N_j$ die Umkehrfunktion von f_j, und $Y \subset M$ die Menge aller Punkte $y \in \bigcup_j Y_j$, so daß $\overline{f}_j(y) = \overline{f}_i(y)$, falls y im Durchschnitt $\overline{Y_j} \cap \overline{Y_i}$ liegt. Offensichtlich ist $S \subset Y$. Wir zeigen, daß Y sogar eine Umgebung von S ist. Dazu wähle man $y \in S$ beliebig. Dann gibt es $Y_{j_1}, \cdots, Y_{j_k}$ derart, daß y genau in den $\overline{Y_{j_l}}$, $l = 1, \cdots, k$ liegt. Wir können dann eine offene Umgebung $Y_y \subset \bigcup_j Y_j$ von y finden, so daß $Y_y \subset M_{j_l}$ für $l = 1, \cdots, N$ und $Y_y \cap \overline{Y_j} = \emptyset$ für $j \neq j_1, \cdots, j_N$. Klarerweise gilt $\overline{f}_{j_k}(y) = \overline{f}_{j_l}(y)$. Es existiert also eine offene Umgebung V_y von y in N, so daß

$$V_y \subset f^{-1}(Y_y) \cap \bigcap_{1\leq l\leq k} N_{j_l}.$$

Setzt man nun $\tilde{Y}_y = f(V_y) \cap Y_y$, so ist $\tilde{Y}_y$ eine offene Umgebung von y in $\bigcup_j Y_j$, und für alle $\tilde{y} \in \tilde{Y}_y \cap Y_{j_k} \cap Y_{j_l}$ gilt $f_{j_k}(\tilde{y}) = f_{j_l}(\tilde{y})$. Folglich ist Y wie behauptet eine Umgebung von S. Zudem ist die Funktion $\overline{f} : Y \to N$ wohldefiniert, die jedem Punkt $y \in Y \cap Y_j$ den Wert $\overline{f}_j(y)$ zuordnet. Nach Definition ist $\overline{f}$ ein Linksinverses zu der Einschränkung von f auf $T := f^{-1}(Y)$, folglich muß $f_{|T}$ injektiv sein. Andererseits ist aber T eine Umgebung von S in N, womit sich schließlich die Behauptung ergibt. □

3.1.8 Sei $T = (E, \varepsilon, \varphi)$ eine tubulare Umgebung von S in M. Dann gelten folgende Aussagen, deren Beweise sich unmittelbar aus der Definition einer tubularen Umgebung und den entsprechenden Eigenschaften des metrischen Vektorbündels E ergeben.

(1) Identifiziert man E mit dem Vertikalbündel von TE über $S \subset TE$, so liefert die eingeschränkte Abbildung

$$T_{|E}\varphi : E \to N, \quad \nu_x \mapsto T_{0_x}\varphi.\nu_x, \quad x \in S$$

einen Vektorbündel-Isomorphismus von E auf ein zu $TS \to S$ in $T_{|S}M$ normales Vektorbündel $N := T\varphi(E)$, das heißt es gilt $T_{|S}M = TS \oplus N$.

(2) Die tubulare Umgebung T erzeugt für jeden Punkt $x \in T$ eine kanonische Zerlegung des Tangentialraums T_xM in den *Vertikalraum* $V_xM \cong T_\nu\varphi(E_{\pi(x)})$, $\nu = \varphi^{-1}(x)$ und den *Horizontalraum* H_xM, der in kanonischer Weise isomorph zu $T_{\pi(x)}S$ ist. Dabei ist H_xM das Bild des Horizontalraums von $T_\nu E$ unter $T_\nu\varphi$; die kanonische Isomorphie von H_xM mit $T_{\pi(x)}S$ ist durch Parallelverschiebung von $T_{\pi(x)}S$ entlang der Kurve $\varphi(t\nu)$, $t \in [0, 1]$ gegeben.

(3) Sei θ eine beliebige Riemannsche Metrik auf T, η das Skalarprodukt auf E, und für jedes $x \in T$ sei $P_x : T_xM \to T_xM$ die Projektion auf H_xM entlang von V_xM sowie $Q_x = \mathrm{id}_{T_xM} - P_x$. Dann definiert nach eventueller Verkleinerung von T

$$\mu_x(\nu, w) = \eta_{\pi_S(x)}(T_x\varphi^{-1}.Q_x.\nu, T_x\varphi^{-1}.Q_x.w) + \theta(P_x.\nu, P_x.w), \quad x \in T, \ \nu, w \in T_xM$$

eine Riemannsche Metrik μ auf T derart, daß $\varphi = \exp \circ T_{|E}\varphi$. Dabei ist exp die Exponentialfunktion des Levi-Civita-Zusammenhangs von μ. Zudem ist das Vektorbündel N μ-orthogonal zu TS, das heißt mit anderen Worten

$$N_x = \{\nu \in T_xM \mid \mu(\nu, w) = 0 \text{ für alle } w \in T_xS\}, \quad x \in S.$$

(4) Die Hessesche Matrix von ρ_S hat über S den Rang $\mathrm{codim}_M S = \dim M - \dim S$.

Die Aussage (3) kann man so interpretieren, daß die gemäß dem klassischen Tubensatz konstruierten tubularen Umgebungen universell sind, daß also jede tubulare Umgebung T die Form $(N, \varepsilon, \exp_{|N})$ haben muß, wobei das Normalenbündel N und die Exponentialfunktion exp bezüglich einer geeigneten Riemannschen Metrik auf einer Umgebung von S definiert sind.

3.2 Schnittpunktentfernung und maximale tubulare Umgebungen

Zwar haben wir mit dem klassischen Tubensatz ein wichtiges Existenzresultat über tubulare Umgebungen, wissen aber noch nicht, wie „groß“ eine solche tubulare Umgebung sein kann, ob es maximale Elemente gibt und so weiter. Ziel dieses Abschnitts ist es, derartige Fragen zu klären. Um dies zu erreichen muß zuerst eine Halbordnung auf der Menge der tubularen Umgebungen angegeben werden, bezüglich der man von einer „größeren“ oder „maximalen“ tubularen Umgebung sprechen kann. Betrachtet man zwei durch eine Riemannsche Metrik μ auf M induzierten tubularen Umgebungen $T_1 = (N, \varepsilon_1, \exp_{|N})$ und $T_2 = (N, \varepsilon_2, \exp_{|N})$ von S, so können ihre Totalräume T_1 und T_2 bezüglich der mengentheoretischen Inklusion miteinander verglichen werden. Falls $\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}_2$ oder äquivalent dazu falls $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ gilt, so schreiben wir $T_1 \leq T_2$. Die Relation $\leq$ stellt offensichtlich eine Halbordnung auf der Menge aller durch μ induzierten tubularen Umgebungen von S dar. Mit Hilfe nicht ganz einfacher geometrischer Werkzeuge, die uns eine Weile in diesem Abschnitt beschäftigen werden, kann für den Fall einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, μ) ein maximales Element bezüglich der Halbordnung $\leq$ konstruiert werden.

3.2.1 Für $v \in T_xM$ mit $x \in M$ bezeichnen wir mit t_v^+ die *Fluchtzeit* von exp in Richtung v, das heißt das Supremum aller $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, für die $\exp tv$ definiert ist. Bezeichnet zudem SN das Sphärenbündel von N, so ist für $v \in S_xN$ mit $x \in S$ die *Fokalpunktentfernung* in Richtung v durch

$$e_f(v) := e_{f,S}(v) := \sup\left\{t \in [0, t_v^+[\;\middle|\; \ker(T_{sv} \exp_{|N}) = 0 \text{ für alle } s \in [0, t]\right\}$$

gegeben und die *Schnittpunktentfernung* in Richtung v durch

$$e_c(v) := e_{c,S}(v) := \sup\left\{t \in [0, t_v^+[\;\middle|\; \delta_\mu(\exp_{|N}(tv), S) = t\right\}.$$

Dabei ist δ_μ der geodätische Abstand bezüglich μ. Falls S nur aus einem Punkt x besteht, so definiert man desweiteren

$$r_i(x) := \inf\left\{e_{c,\{x\}}(v) \;\middle|\; v \in S_xM\right\}$$

und nennt $r_i(x)$ den *Injektivitätsradius* von exp an der Stelle x. Insgesamt erhalten wir somit drei Funktionen $e_f : SN \to \overline{\mathbb{R}}^{\geq 0} := \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$, $e_c : SN \to \overline{\mathbb{R}}^{\geq 0}$ und $r_i : M \to \overline{\mathbb{R}}^{\geq 0}$.

3.2.2 Proposition *Für jedes $v \in S_xN$ mit $x \in S$ ist*

$$0 < e_{c,S}(v) \leq e_{f,S}(v) \quad \textit{und} \quad 0 < e_{c,S}(v) \leq e_{f,\{x\}}(v).$$

Zudem gilt für jedes $y \in M$ die Beziehung $r_i(y) > 0$.

Beweis: Wir geben hier nur eine grobe Beweisskizze; für weitere Einzelheiten sei der Leser auf Klingenberg [94, Thm. 1.12.13 & Thm. 2.5.15] oder Bishop–Crittenden [13, Chap. 11, Thm. 5, Cor. 2] verwiesen.

Da die Exponentialfunktion $\exp_x$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, und eine genügend kleine Kugel um den Ursprung von T_xM diffeomorph auf eine stark konvexe Umgebung von x abbildet, gilt $e_c(v) > 0$, $e_f(v) > 0$ sowie $r_i(y) > 0$. Es bleibt also noch $e_{c,S}(v) \leq e_{f,S}(v)$ und $e_{c,S}(v) \leq e_{f,\{x\}}(v)$ nachzuweisen. Wir zeigen davon nur die zweite Ungleichung; der Beweis der ersten erfolgt analog unter Verwendung von S-Jacobi-Feldern [13, Chap. 11]. Es genügt den nichttrivialen Fall $t_f := e_{f,\{x\}}(v) < t_v^+$ zu betrachten. Sei t_1 eine reelle Zahl mit $t_f < t_1 < t_v^+$ und $\gamma : I = [0, t_1] \to M$ die Geodäte $t \mapsto \exp t\nu$. Ziel der folgenden Überlegungen ist es, eine stückweise stetig differenzierbare Variation $F :]\varepsilon, \varepsilon[\times I \to M$ der Geodäte γ derart zu konstruieren, daß für genügend kleine $|s|$ die Variationskurven $\gamma_s = F(s, \cdot)$ die Punkte x und $\gamma(t_1)$ miteinander verbinden und eine kleinere Länge als γ haben. Da $T\exp_x$ im Punkt $t_f\nu$ nicht verschwindenden Kern besitzt, gibt es ein nichttriviales Jacobi-Vektorfeld Y entlang von γ mit $\mu(Y(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ und $Y(0) = Y(t_f) = 0$. Da Y nichttrivial ist, existiert ein t_0 zwischen 0 und t_f mit $Y(t_0) \neq 0$. Sei Z ein differenzierbares Vektorfeld entlang von γ mit $Z(t) = 0$ für $0 \leq t \leq t_0$, $Z(t_f) = -\nabla Y(t_f) \neq 0$ sowie $Z(t_1) = 0$. Man setze nun für ein später zu bestimmendes $\eta \geq 0$

$$X_\eta := Y^*(t) + \eta Z(t) \quad \text{wobei } Y^*(t) = \begin{cases} Y(t) & \text{falls } 0 \leq t \leq t_f, \\ 0 & \text{falls } t_f \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Das Vektorfeld X_η erzeugt eine stückweise stetige Variation $F :]\varepsilon, \varepsilon[\times I \to M$ von γ, mit anderen Worten gibt es also ein F mit $X_\eta(t) = \left.\frac{\partial F(s,t)}{\partial s}\right|_0$. Wir betrachten jetzt für jeden Weg $\gamma_s = F(s, \cdot)$ das Energie-Integral

$$E(s) = E(\gamma_s) = \frac{1}{2} \int_I \langle \dot{\gamma}_s(t), \dot{\gamma}_s(t) \rangle_{\mu(\gamma(t))} \, dt$$

und berechnen die zweite Variation von E:

$$\begin{aligned} D^2E(\gamma)(X_\eta, X_\eta) &= \int_I \langle \nabla X_\eta, \nabla X_\eta \rangle_\mu(t) \, dt - \int_I \langle R_{\dot{\gamma}} X_\eta, X_\eta \rangle_\mu(t) \, dt \\ &= D^2E(\gamma)(Y^*, Y^*) + 2\eta D^2E(\gamma)(Y^*, Z) + \eta^2 D^2E(\gamma)(Z, Z). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Mittels partieller Integration erkennt man, daß der erste Term auf der rechten Seite verschwindet, und der zweite durch

$$2\eta \, \langle \lim_{t \nearrow t_f} \nabla Y^*(t) - \lim_{t \searrow t_f} \nabla Y^*(t), Z(t_f) \rangle_{\mu(\gamma(t_f))} = -2\eta \, |\nabla Y(t_f)|^2$$

gegeben ist. Für η genügend klein ist damit $D^2E(\gamma)(X_\eta, X_\eta) < 0$. Verwendet man nun die Tatsache, daß die Länge von γ durch $|\gamma|_\mu^2 = 2E(\gamma)\,|I|$ gegeben ist, so folgt für genügend kleines s

$$|\gamma_s|_\mu^2 \leq 2E(\gamma_s)\,|I| < 2E(\gamma)\,|I| = |\gamma|_\mu^2,$$

das heißt der Weg γ_s hat eine kleinere Länge als γ. Da überdies $X_\eta(0) = X_\eta(t_1) = 0$ gilt, gibt es folglich einen kürzeren Weg als γ, der $x = \gamma(0)$ mit $\gamma(t_1)$ verbindet. Also hat $\gamma(t_1)$ einen kleineren Abstand zu S als t_1. Das bedeutet aber $e_{c,S}(\nu) \leq e_{f,\{x\}}(\nu)$, was zu zeigen war. □

3.2.3 Proposition *Die Funktionen e_f, e_c und r_i sind unterhalbstetig. Ist (M, μ) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, so sind e_f, e_c und r_i sogar stetig.*

Beweis: Zuerst erinnern wir daran, daß aufgrund wohlbekannter Sätze zur Existenz- und Eindeutigkeit gewöhnlicher Differentialgleichungen die Fluchtzeit t^+ eine unterhalbstetige Funktion auf SN ist (siehe z.B. [2, Lem. 10.5]). Folglich ist $W^{\max} := \{t\nu \in TM \mid \nu \in SM \text{ und } 0 \leq t < t_\nu^+\} \subset TM$ eine offene Umgebung des Nullschnitts von TM, und $(\pi, \exp) : W^{\max} \to M \times M$ wohldefiniert. Für x und y genügend nahe bedeutet $[x, y]$ im folgenden das x und y verbindende Segment $\{\exp(tw) \mid w = \exp_x^{-1}(y) \text{ und } t \in [0,1]\}$. Nach diesen notationsmäßigen Vorbereitungen können wir jetzt mit dem eigentlichen Beweis beginnen.

Nehmen wir an, e_f sei im Punkte ν nicht unterhalbstetig. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von gegen ν strebenden Einheitsvektoren $\nu_k \in N$, so daß $t = \lim_{k\to\infty} t_k$ mit $t_k := e_f(\nu_k)$ existiert und $< e_f(\nu)$ ist. Sei $w_k \in T_{t_k\nu_k}N$ ein Einheitsvektor aus dem Kern von $T_{t_k\nu_k} \exp_{|N}$. Nach Auswahl einer geeigneten Teilfolge konvergiert $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen einen nicht verschwindenden Vektor $w \in T_{t\nu}N$. Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion muß w im Kern von $T_{t\nu} \exp_{|N}$ liegen, was den Widerspruch $e_f(\nu) \leq t < e_f(\nu)$ nach sich zieht.

Als nächstes zeigen wir, daß e_c im Punkt ν unterhalbstetig ist, indem wir die Annahme, es gäbe eine gegen ν konvergierende Folge von ν_k mit $t_\infty = \lim_{k\to\infty} e_c(\nu_k) < e_c(\nu)$ zu einem Widerspruch führen. Wir bezeichnen erst einmal mit x den Fußpunkt von ν und kürzen ab: $t_k := e_c(\nu_k)$. Dann betten wir M in seine Vervollständigung $\overline{M}$ bezüglich des geodätischen Abstands ein; offensichtlich ist dann $\overline{M}$ ein Längenraum (wenn auch in der Regel keine Riemannsche Mannigfaltigkeit). Unter diesen Voraussetzungen gibt es nach dem Satz von Busemann 2.4.13 bzw. dem von Hopf–Rinow 2.4.15 für jedes k ein positives $\delta_k < \frac{1}{2^k}$ sowie einen rektifizierbaren und durch seine Bogenlänge parametrisierten Weg $\gamma_k : [0, s_k] \to \overline{M}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\gamma_k(0) \in \overline{S}$ und $\gamma_k(1) = \exp((t_k + \delta_k)\nu_k)$, wobei $\overline{S}$ den Abschluß von S in $\overline{M}$ bezeichnet.

(2) Der Weg γ_k minimiert den Abstand von $\gamma_k(1)$ zu S, das heißt es gilt

$$\delta_\mu(\gamma_k(1), S) = |\gamma_k|_\mu.$$

(3) Die Länge $s_k = |\gamma_k|_\mu$ ist kleiner als $t_k + \delta_k$.

Die Wege γ_k erfüllen dann $\lim_{k\to\infty} \gamma_k(s_k) = \exp(t_\infty \nu)$. Aufgrund des Satzes von Busemann 2.4.13 konvergiert nach eventueller Auswahl von Teilfolgen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ein $s_\infty \leq t_\infty$ und $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen einen rektifizierbaren Weg $\gamma : [0, s_\infty] \to \overline{M}$ mit $\gamma(0) \in \overline{S}$ und $\gamma(s_\infty) = \exp(t_\infty \nu)$.

Wir betrachten jetzt die Abbildung $(\pi, \exp) : W^{\max} \to M \times M$. Da $e_c(\nu) \leq e_{f,\{x\}}(\nu)$, ist $(\pi, \exp)$ über dem Segment $[0, t_\infty]\,\nu \subset TM$ von maximalem Rang und injektiv, folglich bildet nach Lemma 3.1.7 $(\pi, \exp)$ eine relativ kompakte offene Umgebung $W \subset W^{\max}$ von $[0, t_\infty]\,\nu$ diffeomorph auf eine offene Menge in $M \times M$ ab. Nach eventueller Verkleinerung von W kann angenommen werden, daß $(\pi, \exp)(W)$ die Form $B \times U$ hat, wobei B eine Kugel um x ist und U eine offene Umgebung des Segments $[x, \exp(t_\infty \nu)]$. Zudem angenommen werden, daß U zusammenhängend ist und $\exp(t\nu)$ für $\frac{1}{2}(e_c + t_\infty) \leq t < t_\nu^+$ nicht in $\overline{U}$ liegen. Da die eingeschränkte Exponentialabbildung $n := \exp_{|N} : N \cap W^{\max} \to M$ über $[0, t_\infty]\,\nu$ auch von maximalem Rang und injektiv ist, bildet nach Lemma 3.1.7 n eine offene Umgebung W' von $[0, t_\infty]\,\nu$ in $N \cap W^{\max}$ diffeomorph auf eine offene Umgebung U' des Segments $[x, \exp(t_\infty \nu)]$ ab. Nach geeigneter Verkleinerung von W' und W kann $U = U'$ erreicht werden.

Nehmen wir nun erst einmal an, das Bild $\operatorname{im}\gamma$ läge nicht ganz in U. Sei unter dieser Annahme s_c das Minimum aller $s' \leq s_\infty$, so daß $\gamma([s', s_\infty]) \subset \exp([0, e_c(\nu)[\,\nu) \cap U$. Da

γ nicht ganz in U liegt, muß $s_c > 0$ sein. Sei weiter t_c die reelle Zahl zwischen 0 und $e_c(\nu)$, so daß $\gamma(s_c) = \exp(t_c\nu)$. Falls $t_c > t_\infty$ wäre, müßte $s_c < s_\infty$ sein, also hätte wegen $s_\infty \leq t_\infty$ der eingeschränkte Weg $\gamma_{|[0,s_c]}$ ein kürzere Länge als das x und $\exp(t_c\nu)$ verbindende Segment. Daraus ergäbe sich $t_c > e_c(\nu)$, was jedoch nicht sein kann. Folglich ist $t_c \leq t_\infty$, insbesondere liegt also $\gamma(s_c)$ in U, und es gibt eine stark konvexe Kugel $B \subset U$ um $\gamma(s_c)$ derart, daß γ den Rand von B in einem nicht auf $\exp([0, e_c(\nu)[\,\nu) \cap U$ liegenden Punkt schneidet. Sei $0 < s_{\partial B} < s_c$ derart, daß $\gamma(s_{\partial B}) \in \partial B \setminus \exp([0, e_c(\nu)[\,\nu)$. Sei weiter $\tilde{\gamma} : [0, \tilde{s}] \to M$ mit $\tilde{s} = s_{\partial B} + \delta_\mu(\gamma(s_{\partial B}), \gamma(s_c))$ der Weg, der durch Komposition von $\gamma_{|[0,s_{\partial B}]}$ und dem Segment $[\gamma(s_{\partial B}), \gamma(s_c)]$ entsteht. Aufgrund von $t_\infty < e_c(\nu)$ und der Definition von $e_c(\nu)$ hat der eingeschränkte Weg $\gamma_{|[s_c,s_\infty]}$ eine Länge $\geq t_\infty - t_c$, folglich ist die Länge $\tilde{s}$ von $\tilde{\gamma}$ kleiner oder gleich t_c. Nach Konstruktion sind zudem die Vektoren $\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{s})$ und $T_{s_c\nu}\exp_x(\nu)$ nicht kollinear. Folglich gibt es Punkte $\tilde{\gamma}(s')$ und $\exp(t'\nu)$ in B (wobei $s_{\partial B} < s' < s_c$ und $t_c < t' < e_c(\nu)$), so daß das Segment $[\tilde{\gamma}(s'), \exp(t'\nu)]$ kürzer ist als der aus $\tilde{\gamma}_{|[s',\tilde{s}]}$ und $[\tilde{\gamma}(\tilde{s}), \exp(t'\nu)]$ zusammengesetzte Weg. Setzt man nun den Weg ν aus den beiden Stücken $\tilde{\gamma}_{|[0,s']}$ und $[\tilde{\gamma}(s'), \exp(t'\nu)]$ zusammen, so folgt

$$|\nu|_\mu < |\tilde{\gamma}|_\mu + |[\tilde{\gamma}(\tilde{s}), \exp(t'\nu)]|_\mu \leq |[x, \exp(t'\nu)]|_\mu = t'.$$

Da $\nu(0) = \gamma(0) \in \overline{S}$, hat somit $\exp(t'\nu)$ einen kleineren Abstand von S als t', folglich ergibt sich der Widerspruch $e_c(\nu) \leq t' < e_c(\nu)$. Die Annahme, daß $\operatorname{im}\gamma$ nicht in U liegt, kann deshalb nicht erfüllt sein, folglich gilt $\operatorname{im}\gamma \subset U$.

Als nächstes setzen wir $W_0 = W$ und lassen $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis des Segments $[0, t_\infty]\nu \subset TM$ durchlaufen, so daß $W_{n+1} \subset W_n$ für alle n. Offensichtlich kann man die W_n derart wählen, daß $(\pi, \exp)(W_n) = B_n \times U_n$, wobei die B_n eine Umgebungsbasis offener Kugeln um x durchlaufen, und die U_n eine Umgebungsbasis des Segments $[x, \exp(t_\infty\nu)]$. Aufgrund der oben geführten Argumentation muß $\operatorname{im}\gamma$ in jeder der Umgebungen U_n liegen. Da die Folge $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$, aufgefaßt als Folge geometrischer Kurven, nach dem Satz von BUSEMANN 2.4.13 gleichmäßig gegen γ konvergiert, existiert zu jedem n ein $k_n \in \mathbb{N}$, so daß $\operatorname{im}\gamma_k \subset U_n$ für alle $k \geq k_n$. Für jedes $k \geq k_0$ gibt es dann ein $w_k \in S_{y_k}M$ mit $\gamma_k(t) = \exp(tw_k)$ für $0 \leq t \leq s_k$. Zieht man die Tatsache heran, daß γ_k den Abstand von $\gamma_k(1)$ zu S minimiert, so folgt $w_k \in S_{y_k}N$. Da $y_k := \gamma_k(0)$ Element von S für genügend große k ist und $\operatorname{im}\gamma_k \subset U_n$, konvergiert die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Fußpunkte der w_k gegen x. Nach Auswahl einer Teilfolge können wir deshalb davon ausgehen, daß die Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen einen Vektor $w \in S_xN$ konvergiert. An dieser Stelle erinnere man sich daran, daß

$$\exp((t_k + \delta_k)\nu_k) = \gamma_k(s_k) = \exp(s_k w_k).$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ folgt $\exp(t_\infty\nu) = \exp(s_\infty w)$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. FALL Es gilt $w \neq \nu$. Dann können die Punkte x und $\exp(t_\infty\nu)$ auf zwei verschiedene Weisen durch Geodäten miteinander verbunden werden, also minimiert die Geodäte $(\exp[0, t_\nu^+[\,\nu)$ über t_∞ hinaus nicht mehr den Abstand zu x. Folglich müßte $e_c(\nu) \leq t_\infty$ gelten, was nicht sein kann.

2. FALL Es gilt $w = \nu$. Dann folgt $t_\infty = s_\infty$ wegen $t_\infty < e_c(\nu)$. Also liegen für genügend große k die Vektoren $s_k w_k$ und $(t_k + \delta_k)\nu_k$ beide in W'. Da wegen $s_k < t_k + \delta_k$

die Vektoren $s_k w_k$ und $(t_k+\delta_k)\nu_k$ verschieden sein müssen aber $n(s_k w_k) = n((t_k+\delta_k)\nu_k)$ gilt, ergibt sich ein Widerspruch zur Injektivität von $n_{|W'}$.

Insgesamt folgt, daß $t_\infty < e_c(\nu)$ nicht gelten kann, folglich ist e_c doch unterhalbstetig. Die Unterhalbstetigkeit von r_i ergibt sich unmittelbar aus der von e_c.

Den Nachweis der Stetigkeit von e_f, e_c und r_i für den Fall, daß M geodätisch vollständig ist, werden wir hier nicht führen, da entsprechende Beweise in der angegebenen Literatur [13, 94] zu finden sind und das Stetigkeitsresultat in dieser Arbeit nicht weiter benötigt wird. □

Nun können wir einen geeignete offene Umgebung des Nullschnitts von N angeben, aus der sich anschließend die gesuchte maximale tubulare Umgebung ergibt.

3.2.4 Lemma *Setzt man*

$$T^{\max}_{S\subset N} := \left\{ t\nu \in N \,\middle|\, x \in S,\ \ \nu \in S_x N \text{ und } 0 \le t < e_c(\nu) \right\},$$

so ist $\exp_{|T^{\max}_{S\subset N}}$ *eine offene Einbettung.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß $\exp_{|T^{\max}_{S\subset N}}$ injektiv ist. Nehmen wir an, das wäre nicht der Fall. Dann gäbe es zwei verschiedene Punkte $x, y \in S$, zwei Vektoren $\nu \in S_x N$ und $w \in S_y N$ sowie eine reelle Zahl $t < \min\{e_c(\nu), e_c(w)\}$ mit

$$\exp t\nu = \exp tw.$$

Da $t < e_c(\nu)$, gibt es $\delta > 0$ mit $t+\delta < e_c(\nu)$. Sei $z = \exp(t+\delta)\nu$. Falls ν und w kollinear wären, mußte $\mu(\nu, w) = -1$ gelten, da sonst $x = y$ wäre. Im Falle der Kollinearität ergäbe sich also $\delta_\mu(z, S) \le \delta_\mu(z, y) = t - \delta$, was aber im Widerspruch zu $t + \delta < e_c(\nu)$ stünde. Also können ν und w nicht kollinear sein. Folglich ist der y und z verbindende Weg

$$\gamma : [0, t+\delta] \to M, \quad s \mapsto \begin{cases} \exp sw & \text{falls } s \le t, \\ \exp s\nu & \text{falls } s \ge t, \end{cases}$$

im Punkt t nicht differenzierbar. Daraus folgt $\delta_\mu(y, z) < |\gamma|_\mu = t + \delta$, was wiederum im Widerspruch zu $t + \delta < e_c(\nu)$ steht. Also ist $\exp_{|T^{\max}_{S\subset N}}$ injektiv.

Aufgrund der Definition von e_f und Proposition 3.2.2 muß $\exp_{|T^{\max}_{S\subset N}}$ sogar immersiv sein. Aus Dimensionsgründen folgt, daß das Bild $\exp(T^{\max}_{S\subset N})$ offen in M liegt. Insgesamt erhalten wir somit die Behauptung. □

3.2.5 Proposition *Sei* (M, μ) *eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und* S *eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Dann ist* $T^{\max}_{S\subset N}$ *bezüglich* $\subset$ *maximal unter allen offenen Umgebungen* T *des Nullschnitts von* N *derart, daß* $\exp_{|T} : T \to M$ *eine offene Einbettung ist und mit jedem* $\nu \in T$ *auch* $[0,1]\nu$ *in* T *liegt.*

Aus der Proposition ergibt sich unmittelbar das Hauptergebnis dieses Abschnitts:

3.2.6 Korollar *Definiert man* $\varepsilon^{\max} : S \to \overline{\mathbb{R}}^{\ge 0}$ *durch*

$$\varepsilon^{\max}(x) = \inf \left\{ e_c(\nu) \,\middle|\, \nu \in S_x N \right\},$$

so ist $T^{\max} = (N, \varepsilon^{\max}, \exp_{|N})$ *maximal in den durch* μ *induzierten tubularen Umgebungen von* S *in* M.

Beweis: Nehmen wir an, $T^{\max}_{S\subset N}$ wäre nicht in dem behaupteten Sinne maximal, es gäbe also eine offene Umgebung T des Nullschnitts von N mit $T^{\max}_{S\subset N} \subsetneq T$ und derart, daß die Bedingungen an T aus der Behauptung erfüllt seien. Unter dieser Voraussetzung gibt es ein $v \in SN$ und ein $\delta > 0$ mit $(e_c(v) + \delta)v \in T$. Sei $\gamma : [0, s] \to M$ eine den Abstand von $y = \exp((e_c(v) + \delta)v)$ zu S minimierende Geodäte, das heißt es gelte $\delta_\mu(y, S) = |\gamma|_\mu = s$. Aufgrund des Satzes von Hopf–Rinow 2.4.15 existiert ein solches γ und $\gamma(0)$ muß wegen der Abgeschlossenheit von S in S liegen. Da γ dann normal auf S steht, gibt es ein $w \in S_{\gamma(0)}N$ mit $\gamma(t) = \exp(tw)$ für $0 \le t \le s$. Da γ die Distanz zu S minimiert, gilt $e_c(w) \ge s$, also liegt die Menge $[0, s[w$ in $T^{\max}_{S\subset M}$ und damit in T. Wäre nun $w \ne v$, so hätten die Mengen $(e_c(v)+\delta)v$ und $[0, s[w$ disjunkte Umgebungen U_v und U_w in T. Da aber $y \in \exp(U_v) \cap \overline{\exp(U_w)}$, wäre somit $\exp_{|T}$ keine offene Einbettung mehr. Also muß $w = v$ sein. Dann folgt $s \le e_c(v)$, also $y \in \overline{\exp(T^{\max}_{S\subset N})}$. Andererseits ist aber $(e_c(v)+\delta)v \in T \setminus \overline{T^{\max}_{S\subset N}}$, woraus sich wegen der Offenheit von $\exp_{|T}$ der Widerspruch $y \notin \overline{\exp(T^{\max}_{S\subset N})}$ ergibt. Somit ist $T^{\max}_{S\subset N}$ in dem behaupteten Sinne maximal. □

3.2.7 Bemerkung Falls (M, μ) nicht vollständig ist oder S nicht abgeschlossen in M liegt, muß $T^{\max}_{S\subset M}$ nicht mehr maximal im Sinne der letzten Proposition sein. Nichtsdestotrotz können für diesen Fall $\varepsilon^{\max}$ und $T^{\max}$ genauso wie im Korollar festgelegt werden. Für unsere Zwecke benötigen wir keine tubularen Umgebungen, die größer als $T^{\max}$ sind, deswegen nennen wir leicht mißbräuchlich $T^{\max}$ generell die *maximale* durch μ induzierte tubulare Umgebung von S in M.

3.2.8 Bemerkung Es sei noch erwähnt, daß es selbst im Falle M vollständig und S abgeschlossen neben $T^{\max}$ noch weitere maximale durch μ induzierte tubulare Umgebungen von S in M geben kann. Insofern ist die gelegentlich in der mathematischen Literatur zu findende Behauptung, $T^{\max}$ sei die größte unter den durch μ induzierten tubularen Umgebungen von S, falsch.

3.3 Krümmungsmoderate Untermannigfaltigkeiten

Im folgenden soll ein Begriff dafür eingeführt werden, wie stark sich ein Stratum oder eine Untermannigfaltigkeit in dem umgebenden stratifizierten Raum bzw. der umgebenden Mannigfaltigkeit krümmt, wenn man dem Rand des Stratums oder der Untermannigfaltigkeit näher kommt. Denkt man beispielsweise an den Standardkegel, so ist anschaulich klar, daß sich das Krümmungsverhalten des Topstratums bei Annäherung an die Spitze nicht ändert. Betrachtet man allgemeiner eine (reelle oder komplexe) algebraische Varietät mit ihrer natürlichen Stratifizierung nach Whitney, so ist - wieder anschaulich gesprochen - die Krümmung eines Stratums durch eine rationale Funktion beschränkt, kann also bei Annährung an ein tieferliegendes Stratum auch nicht "übermäßig" schnell anwachsen. Anders ist die Situation jedoch, wenn man die schnelle oder langsame Spirale betrachtet. Hier wächst die Krümmung des Topstratums exponentiell mit dem Abstand zum Ursprung an. Mittels der in diesem Abschnitt eingeführten Begriffe wollen wir die ersten beiden Fälle, die wir dann als krümmungsmoderat erachten, vom letzteren separieren.

3.3.1 Um die Notation im folgenden etwas zu vereinfachen, sei, wenn nicht anderes gesagt wird, für diesen Abschnitt vereinbart, daß $m \in \mathbb{N}^{>0} \cup \{\infty\}$ gelte, S eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ oder einer Mannigfaltigkeit M ist. Zudem bezeichne T immer eine offene Umgebung von S in $\mathbb{R}^n$ oder M derart, daß S abgeschlossen in T liegt. In den meisten Fällen wird T durch den Totalraum einer tubularen Umgebung von S gegeben sein.

Wir betrachten zuerst eine Untermannigfaltigkeit $S \subset \mathbb{R}^n$. Gemäß dem klassischen Tubensatz und Abschnitt 3.2 induziert das Euklidische Skalaprodukt eine maximale tubulare Umgebung $T_S^{\max}$ von S in $\mathbb{R}^n$; die zu $T_S^{\max}$ gehörende Projektion werde mit π_S oder kurz π bezeichnet. Für jeden Punkt $x \in T_S^{\max}$ besitzt der Tangentialraum $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Orthogonalzerlegung $T_x\mathbb{R}^n = T_xS \oplus \ker T_x\pi$. Dabei geht T_xS aus $T_{\pi(x)}S$ durch Parallelverschiebung entlang der $\pi(x)$ und x verbindenden Geraden hervor. Wir bezeichnen nun mit $P_{S,x} : T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \to T_xS$ die entsprechende Orthogonalprojektion und schreiben, falls Verwechslungen ausgeschlossen sind, oft nur P_x anstelle von $P_{S,x}$. Damit wird $P_S : T_S^{\max} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ zu einem projektionswertigen Schnitt in dem in 1.4.14 definierten Sinne.

3.3.2 Definition Sei $m < \infty$, $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Klasse $\mathcal{C}^m$ und $P : T \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ ein projektionswertiger Schnitt der Klasse $\mathcal{C}^m$, das heißt für alle $x \in T$ sei P_x ein Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$ mit $P_x^2 = P_x$. Dann heißt das Paar (P, S) oder, falls keine Mißverständnisse möglich sind, auch nur P *krümmungsmoderat* von der *Ordnung* m, falls folgendes gilt:

(KM1) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt der Keim von S an x *endlich viele Zusammenhangskomponenten*, das heißt es gibt eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ derart, daß für jede Kugel $B \subset V$ um x der Durchschnitt $S \cap B$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt.

(KM2) T ist eine regulär situierte Umgebung von S.

(KM3) Zu jedem Punkt von ∂S gibt es eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ sowie Konstanten $c \in \mathbb{N}$ und $C > 0$, so daß für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq m$ die folgende Abschätzung für die partiellen Ableitungen von P in Abhängigkeit vom Euklidischen Abstand $d(x, \partial S)$ erfüllt ist:

$$\|\partial^\alpha P_x\| \leq C \left(1 + \frac{1}{d(x, \partial S)^c}\right), \quad x \in V \cap T. \tag{3.3.1}$$

Falls P von jeder Ordnung krümmungsmoderat ist, so sagen wir kurz, P sei *krümmungsmoderat* von der *Ordnung* ∞, oder auch nur kurz, P sei *krümmungsmoderat*. Mit anderen Worten ist P also genau dann krümmungsmoderat, wenn die durch die Komponenten von P induzierten Whitney-Funktionen auf T temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ sind.

Eine $\mathcal{C}^m$-Untermannigfaltigkeit $S \subset \mathbb{R}^n$, wobei jetzt $m \in \mathbb{N}^{>0} \cup \{\infty\}$ erlaubt ist, heißt *krümmungsmoderat* (von der *Ordnung* m), falls eine regulär situierte offene Umgebung $T_S \subset T_S^{\max}$ existiert, so daß die zugehörige projektionswertige Abbildung $P_S : T_S \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ krümmungsmoderat (von der Ordnung m) ist.

Durch direkte Rechnung sieht man unmittelbar, daß für jeden $\mathcal{C}^m$-Diffeomorphismus $H : O \to \tilde{O} \subset \mathbb{R}^n$ mit $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\partial S \cap O \neq \emptyset$ die Mannigfaltigkeit $S \cap O$ genau dann krümmungsmoderat bis zur Ordnung m ist, wenn das auch für $H(S \cap O) \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Folglich macht es Sinn, ein Stratum S eines stratifizierten Raums X mit glatter Struktur als *krümmungsmoderat* (von der *Ordnung* m) zu definieren, falls eine Überdeckung von X durch singuläre Karten $x : U \to \mathbb{R}^n$ der Klasse $\mathcal{C}^m$ existiert, so daß $x(S \cap U)$ krümmungsmoderat (von der Ordnung m) ist. Insbesondere ist damit auch geklärt, was man unter einer krümmungsmoderaten Untermannigfaltigkeit S einer Mannigfaltigkeit M versteht. Das Stratum S bzw. der stratifizierte Raum X heißen *krümmungsmoderat*, falls S bzw. falls jedes Stratum von X krümmungsmoderat ist.

3.3.3 Beispiel Subanalytische Mengen mit ihrer gröbsten Whitney-Stratifizierung sind krümmungsmoderat. Insbesondere sind damit alle algebraischen Varietäten krümmungsmoderat. Dieses nur mit größerem technischen Aufwand zu beweisende Resultat kann aus unveröffentlichten Arbeiten von PARUSIŃSKI [130] abgeleitet werden oder auch mit Hilfe von Newton–Puiseux-Entwicklungen analog wie sie in MOSTOWSKI [121] verwendet wurden.

3.3.4 Beispiel Die schnelle und die langsame Spirale sind nicht krümmungsmoderat.

Im folgenden betrachten wir einige Situationen, in denen man projektionswertige Abbildungen vorfindet.

3.3.5 Beispiel Sei $f : \mathbb{R}^n \to N$ eine $\mathcal{C}^{m+1}$-Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $f_{|S} : S \to N$ submersiv. Unter dieser Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung T von S in $\mathbb{R}^n$, so daß auch die Einschränkung $f_{|T} : T \to N$ eine Submersion darstellt. Folglich ist die Abbildung $P^f : T \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, die jedem $x \in T$ die Euklidische Projektion auf den Kern $\ker T_x f$ zuordnet, von der Klasse $\mathcal{C}^m$. Wir nennen das Paar (f, S) oder, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind, auch nur f *krümmungsmoderat*, falls der projektionswertige Schnitt P^f krümmungsmoderat ist; schließlich sagen wir noch, f sei *stark krümmungsmoderat* über S, falls zusätzlich S und nach eventueller Verkleinerung von T auch die Abbildung $P^f_S : T \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, die jedem $x \in T$ die Projektion auf den Kern von $P^f_x - P_{S,x}$ zuordnet, krümmungsmoderat ist.

Für den allgemeineren Fall, daß $f : M \to N$ auf einer Mannigfaltigkeit M definiert ist, und $f_{|S} : S \to N$ submersiv, heißt f (*stark*) *krümmungsmoderat*, falls eine Überdeckung von ∂S durch differenzierbare Karten $x : U \to \mathbb{R}^n$ von M existiert, so daß jede der Abbildungen $f \circ x^{-1} : x(U) \to N$ (stark) krümmungsmoderat ist.

Bei den letzten Definitionen müßte eigentlich die Ordung m überall noch explizit eingefügt werden; aus Gründen der sprachlichen Ästhetik haben wir darauf verzichtet. Aus dem gleichen Grund werden wir im folgenden die Ordnung m oft nicht gesondert aufführen, wenn durch den Kontext sowieso klar ist, um welche es sich handelt.

Das nachstehende Lemma gibt eine weitere Möglichkeit an, wie man krümmungsmoderate projektionswertige Schnitte erzeugen kann.

3.3.6 Lemma *Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine von der Ordnung m krümmungsmoderate Untermannigfaltigkeit und $a : T \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ auf einer regulär situierten Umgebung definierte $\mathcal{C}^m$-Abbildung, deren Komponenten temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$ sind. Zusätzlich werde folgendes angenommen:*

(1) *Der Rang* $\operatorname{rg} a_x$, $x \in T$ *ist konstant auf* T.

(2) *Jeder der Operatoren* $a_x \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ *ist normal.*

(3) *Bezeichnet* λ_x *den betragsmäßig kleinsten nichtverschwindenden Eigenwert von* a_x, *so gibt es für jeden Punkt aus* ∂S *eine Umgebung* V *in* $\mathbb{R}^n$ *sowie Konstanten* $c \in \mathbb{N}$ *und* $C > 0$ *derart, daß folgende Abschätzung gilt:*

$$|\lambda_x| \geq C\, d(x, \partial S)^c, \quad x \in V \cap T.$$

Definiert man dann für jedes $x \in T$ *den Endomorphismus* $P_x^a = P_{\ker a_x}$ *als die Projektion auf* $\ker a_x$ *entlang von* $\operatorname{im} a_x$, *so ist* $P^a : T \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ *eine von der Ordnung* m *krümmungsmoderate projektionswertige Abbildung.*

Beweis: Um die Formulierung dieses und folgender Beweise zu erleichtern, sagen wir, eine stetige Funktion $g : A \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$ verhalte sich *fern von* Z *beschränkt*, wobei $Z \cap A = \emptyset$, falls ein $d \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\sup_{x \in A} |g(x)|\; d(x, Z)^d < \infty.$$

Da man ohne Einschränkung von der Abbildung a zu $aa^* : T \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$, $x \mapsto a_x a_x^*$ übergehen kann (wobei a_x^* den adjungierte Operator bezeichnet) und da $a_x a_x^*$ das gleiche Bild und den gleichen Kern wie a_x hat, darf angenommen werden, daß a_x für jedes $x \in T$ selbstadjungiert und positiv semidefinit ist. Insbesondere folgt daraus $\lambda_x > 0$. Sei nun γ_x die glatte geschlossene Kurve um den Nullpunkt von $\mathbb{C}$ mit $\gamma_x(t) = \frac{1}{2}\lambda_x\, e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Dann gilt bekanntlich

$$P_{\ker a_x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_x} \frac{1}{z - a_x}\, dz,$$

folglich ist

$$\partial_i P_{\ker a_x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_x} \frac{1}{z - a_x} D a_x \frac{1}{z - a_x}\, e_i\, dz.$$

Wählt man nun zu einem Punkt aus ∂S eine Umgebung V in $\mathbb{R}^n$ gemäß der Voraussetzung, so ergibt sich für $x \in B \cap T$ die Abschätzung

$$\|\partial_i P_{\ker a_x}\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{2\pi} \frac{\|\dot{\gamma}_x(t)\|}{\|\gamma_x(t) - a_x\|^2} \|DA_x\| \leq \frac{4}{\lambda_x} \|DA_x\| \leq \frac{4}{C} \left(1 + \frac{1}{d(x, \partial S)^c}\right) \|DA_x\|.$$

Da man nach eventueller Verkleinerung von V annehmen kann, daß $\overline{V}$ kompakt ist und $V \cap \partial S$ relativ kompakt in ∂S liegt, folgt wegen der Temperiertheit der Komponenten von a, daß die auf $V \cap T$ eingeschränkte Abbildung $(\partial_i P_{\ker a})_{|V \cap T}$ fern von ∂S beschränkt sein muß. In analoger Weise zeigt man, daß auch die höheren Ableitungen $\partial^\alpha P_{\ker a}$ auf $V \cap T$ fern von ∂S beschränkt sind. Insgesamt folgt somit, daß die Komponenten von $P_{\ker a}$ temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$ sind. Das war zu zeigen. □

3.3.7 Proposition *Eine Untermannigfaltigkeit* $S \subset \mathbb{R}^n$ *der Klasse* $\mathcal{C}^{m+1}$ *ist genau dann krümmungsmoderat von der Ordnung* m, *falls eine regulär situierte offene Umgebung* $T_S \subset T_S^{\max}$ *existiert, so daß die Komponenten der Euklidischen Projektion* $\pi_S : T_S \to S$ *temperiert relativ* ∂S *von der Klasse* $\mathcal{C}^{m+1}$ *sind.*

Zum Beweis benötigen wir nachstehendes Lemma, das eine Verallgemeinerung des Resultats [53, Lem. II.1] darstellt.

3.3.8 Lemma *Sei μ eine auf einer offenen Umgebung von S definierte Riemannsche Metrik und T^μ eine durch μ induzierte tubulare Umgebung von S. Dann kann die Tangentialabbildung der Projektion π^μ von T^μ in der Form*

$$T_x\pi^\mu = F_x \circ P_x, \qquad x \in T^\mu \tag{3.3.2}$$

dargestellt werden, wobei $P : T^\mu \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ der projektionswertige Schnitt $x \mapsto T_{\pi^\mu(x)}\pi^\mu$ ist, und F_x ein Automorphismus von $T_{\pi(x)}S$, der durch

$$F_x = \left(\mathrm{id} + \sum_{i=1}^{n} n_i\, P_{\pi^\mu(x)} \circ T_{\pi^\mu(x)}N_i\right)^{-1}$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet $N_i : S \to \mathbb{R}^n$ das zu S μ-orthogonale Vektorfeld $N_i(\pi^\mu(x)) = (\mathrm{id} - P_{\pi^\mu(x)})e_i$, n_i die glatte Funktion $x \mapsto \left\langle \exp^{-1}_{\pi^\mu(x)}(x), e_i\right\rangle$, und $\exp$ die Exponentialfunktion bezüglich μ.

Beweis: Nach der Abkürzung π für π^μ werde x mit Hilfe der Exponentialfunktion $\exp$ folgendermaßen zerlegt:

$$x = \exp_{\pi(x)}\left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle \exp^{-1}_{\pi(x)}(x), e_i\right\rangle N_i(\pi(x))\right),$$

was möglich ist, da $\exp^{-1}_{\pi(x)}(x)$ am Fußpunkt $\pi(x)$ μ-orthogonal auf S steht. Ersetzt man in dieser Gleichung x durch $\gamma(t) = tv + x$, $v \in \mathbb{R}^n$, und leitet bezüglich t an der Stelle 0 ab, so erhält man

$$v = T_x\pi.v + \sum_{i=1}^{n} n_i(x) TN_i.T_x\pi.v + \left\langle T(\exp^{-1}_{\pi(\cdot)} x)v + T(\exp^{-1}_{\pi(x)}(\cdot))v, N_i(\pi(x))\right\rangle N_i(\pi(x)).$$

Wendet man anschließend auf diese Gleichung den Operator $P_{\pi(x)}$ an, so ergibt sich wegen $P_{\pi(x)}.N_i(\pi(x)) = 0$ und $P_{\pi(x)}.T_x\pi.v = T_x\pi.v$ die Beziehung

$$P_{\pi(x)}.v = G_x.T_x\pi.v \quad \text{mit} \quad G_x = \mathrm{id} + \sum_{i=1}^{n} n_i(x)\, P_{\pi(x)} \circ T_{\pi(x)}N_i\,.$$

Dann muß aber G_x ein Automorphismus von $T_{\pi(x)}S$ sein, also ist $F_x = G_x^{-1}$ wohldefiniert, und die Behauptung gezeigt. □

Beweis der Proposition: Die Projektion π_S werde im folgenden kurz mit π bezeichnet, ebenso sei $T := T_S$. Zudem beachte man, daß im betrachteten Euklidischen Fall die Exponentialfunktion durch $\exp_x v = x + v$ und die Umkehrung durch $\exp_x^{-1} y = y - x$ gegeben ist, wobei $x, y \in T_S$, $v \in \mathbb{R}^n$. Folglich hat F_x die Form

$$F_x = G_x^{-1} \quad \text{mit} \quad G_x = \mathrm{id} + \sum_{i=0}^{n} \langle \pi(x) - x, e_i\rangle\, P_{\pi(x)} \circ T_{\pi(x)}N_i. \tag{3.3.3}$$

Nehmen wir zuerst an, S sei krümmungsmoderat, das heißt die Komponenten von P liegen in $\mathcal{M}^m(\partial S; T)$. Wählt man dann zu jedem Punkt von ∂S eine kompakte Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ gemäß Definition 3.3.2, so genügt es also zu zeigen, daß sich alle eingeschränkten partiellen Ableitungen $(\partial^\alpha T\pi)_{|V\cap T}$ mit $|\alpha| \leq m$ fern von ∂S beschränkt über $V \cap T$ verhalten. Offensichtlich ist das Produkt fern von ∂S beschränkter Funktionen wieder fern von ∂S beschränkt. Nun sind die Komponenten der Funktion $P_{|S}$ beschränkt, insbesondere also fern von ∂S beschränkt, folglich gilt das auch für $T\pi_{|S} = P_{|S}$. Aus der Gleichung (3.3.3) leitet man leicht ab, daß T so auf eine immer noch regulär situierte Umgebung von S eingeschränkt werden kann, daß $\|G_x\| \geq \frac{1}{2}$ und $\|F_x\| \leq 2$ für alle $x \in T_S$ gilt. Zusammen mit (3.3.2) ergibt sich daraus die Beschränktheit fern von ∂S der ersten Ableitung $(T\pi)_{|V\cap T}$. Daraus wiederum folgt die Beschränktheit fern von ∂S der Abbildung $(Dn_i)_{|V\cap T}$. Da Gleiches wegen des krümmungsmoderaten Verhaltens von S auch für $DP_{|V\cap T}$ und $DT_{\pi(\cdot)}N_i$ gilt, muß $DG_{|V\cap T}$ fern von ∂S beschränkt sein. Wegen $F_x = G_x^{-1}$ und $\|G_x\| \geq \frac{1}{2}$ folgt dann aus Gleichung (3.3.2), daß alle partiellen Ableitungen $(\partial^\alpha T\pi)_{|V\cap T}$ mit $|\alpha| = 1$ ebenfalls diese Eigenschaft haben. Durch ein Induktionsargument hangelt man sich zu höheren Ableitungen $(\partial^\alpha T\pi)_{|V\cap T}$ mit $|\alpha| > 1$ hoch und zeigt in analoger Weise, daß diese fern von ∂S beschränkt auf $V \cap T$ sind. Folglich liegen auch die Komponenten von π in $\mathcal{M}^{m+1}(\partial S; T)$.

Seien jetzt umgekehrt die Komponenten von $\pi \in \mathcal{C}^{m+1}(T)$ temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^{m+1}$. Aus der Darstellung $P_x = T_{\pi(x)}\pi$, $x \in T_S$ und wiederholter Anwendung der Ketten- und Produktregel folgt dann, daß die projektionswertige Abbildung P krümmungsmoderat von der Ordnung m sein muß. Das war zu zeigen. $\square$

Der Begriff einer krümmungsmoderaten Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist in Bezug auf die durch die Euklidische Metrik definierte tubulare Umgebung eingeführt worden. Es macht jedoch auch Sinn, und wird sich in der später folgenden Analyse über die Fortsetzung glatter Funktionen von einem Stratum auf den ganzen stratifizierten Raum sogar als notwendig erweisen, einen Begriff von krümmungsmoderaten Riemannschen Metriken sowie krümmungsmoderaten tubularen Umgebungen zur Verfügung zu haben.

3.3.9 Definition Sei $S \subset \mathbb{R}^n$, und μ eine auf einer offenen, regulär situierten Umgebung T von S definierte Riemannsche Metrik der Klasse $\mathcal{C}^m$. Wir nennen das Paar (μ, S), oder wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind, auch nur μ *krümmungsmoderat* von der *Ordnung* m, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(KM4) Die Komponenten $\mu_{ij} = \mu(e_i, e_j) : T \to \mathbb{R}$ von μ bezüglich der kanonischen Basis auf dem $\mathbb{R}^n$ sind temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$.

(KM5) Für jeden Punkt aus ∂S gibt es eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ sowie Konstanten $c \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ derart, daß folgende Abschätzung erfüllt ist:

$$\frac{d(x, \partial S)^c}{C} \|v\| \leq \|v\|_{\mu_x} \leq C \left(1 + \frac{1}{d(x, \partial S)^c}\right) \|v\|, \qquad x \in V \cap T, \;\; v \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ die Euklidische und $\|\cdot\|_{\mu_x}$ die durch μ_x induzierte Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

Für den allgemeineren Fall, daß S eine Untermannigfaltigkeit von M ist, und μ eine Riemannsche Metrik auf einer Umgebung T von S in M, so heißt μ *krümmungsmoderat* von der *Ordnung* $\mathfrak{m}$, falls eine Überdeckung von ∂S durch differenzierbare Karten $x : U \to \mathbb{R}^n$ von M derart existiert, daß $x_*(\mu_{|T\cap U})$ krümmungsmoderat von der Ordnung $\mathfrak{m}$ ist.

3.3.10 Proposition *Sei* $\mathfrak{m} \in \mathbb{N}^{>0}$, $S \subset \mathbb{R}^n$ *krümmungsmoderat von der Ordnung* $\mathfrak{m}+2$ *und* T *eine regulär situierte offene Umgebung von* S. *Für einen Zusammenhang* ∇ *auf dem Tangentialbündel von* T *gelten dann die folgenden Aussagen.*

(1) *Ist* μ *eine von der Ordnung* $\mathfrak{m}+1$ *krümmungsmoderate Riemannsche Metrik auf* T, *und* ∇ *der Levi-Civita-Zusammenhang von* μ, *so stellen die (bezüglich der kanonischen Basis des* $\mathbb{R}^n$ *gebildeten) Christoffelsymbole* Γ_{ij}^k *von* ∇ *relativ* ∂S *temperierte Funktionen der Klasse* $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}}$ *dar.*

(2) *Sofern die Christoffelsymbole* Γ_{ij}^k *von* ∇ *temperiert relativ* ∂S *von der Klasse* $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}}$ *sind, liefern die Abbildungen*

$$V \ni (x, y) \mapsto \langle \exp_y^{-1}(x), e_i \rangle \in \mathbb{R}$$

und

$$W \ni v \mapsto \langle \exp v, e_i \rangle \in \mathbb{R}$$

relativ ∂S *temperierte Funktionen der Klasse* $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}}$. *Dabei ist* exp *die Exponentialfunktion bezüglich* ∇, $V \subset T \times T \subset \mathbb{R}^{2n}$ *eine geeignete regulär situierte Umgebung von* S, W *eine regulär situierte Umgebung von* S *in* $TT \subset \mathbb{R}^{2n}$, *und* S *wird in kanonischer Weise mit der Diagonalen von* $(S \times S) \cap V$ *bzw. dem Nullschnitt von* $TS \cap W$ *identifiziert.*

Beweis: Zum Nachweis von (1) fassen wir zuerst $\mu : T \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ als matrixwertige Funktion der Klasse $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}+1}$ auf, so daß μ_x für jedes $x \in T$ selbstadjungiert und positiv ist. Dann ist auch die Funktion $\overline{\mu} : T \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu_x.\overline{\mu}_x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ wohldefiniert und glatt. Für sie gilt

$$\partial_i \overline{\mu}_x = -\overline{\mu}_x \,(\partial_i \mu_x)\, \overline{\mu}_x, \qquad x \in T.$$

Die zu μ gehörigen Komponenten-Funktionen auf T sind temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}+1}$, und nach Voraussetzung gilt für jede genügend kleine Kugel B um einen Punkt von ∂S

$$\|\overline{\mu}_x\| = \sup_{\|v\|=1} \|\overline{\mu}_x.v\| \leq C \left(1 + \frac{1}{d(x, \partial S)^c}\right), \qquad x \in B \cap T,$$

wobei $c \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ geeignet. Folglich muß die Einschränkung $(\partial_i \overline{\mu})_{|B\cap T}$ fern von ∂S beschränkt sein. In analoger Weise zeigt man, daß auch die höheren partiellen Ableitungen $(\partial^\alpha \overline{\mu})_{|B\cap T}$ mit $|\alpha| \leq \mathfrak{m}+2$ fern von ∂S beschränkt sind. Also ist $\overline{\mu}$ temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}+1}$. Die Christoffelsymbole des Levi–Civita-Zusammenhangs haben bekanntlich die Gestalt

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \overline{\mu}^{kl} (\partial_i \mu_{lj} + \partial_j \mu_{li} - \partial_l \mu_{ij}),$$

woraus unmittelbar aus dem bisher Bewiesenen folgt, daß sie relativ ∂S temperiert von der Klasse $\mathcal{C}^{\mathfrak{m}}$ sind. Folglich ist (1) erfüllt.

Nun zum Nachweis, daß die Exponentialfunktion temperiert ist. Sei mit t_v^+ für $v \in TT$ wie in 3.2.1 die Fluchtzeit der Exponentialfunktion in Richtung v bezeichnet, und $W^{\max} = \{v \in TT |\, t_v^+ > 1\}$ der maximale Definitionsbereich von exp. Wir wollen mit Hilfe von Satz 1.7.11 zuerst zeigen, daß $W^{\max}$ eine regulär situierte Umgebung von S in $\mathbb{R}^{2n}$ ist. Nun erfüllt für jeden Vektor $v \in W \subset TT \cong T \times \mathbb{R}^n$ die Kurve $\gamma_v(t) = \exp_x(tv)$, $t \in [0,1]$ das Anfangswertproblem

$$\ddot{\gamma}_v^k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t))\, \dot{\gamma}_v^i(t)\, \dot{\gamma}_v^j(t) = 0, \quad \gamma_v(0) = x, \quad \dot{\gamma}_v(0) = v.$$

Nach den Voraussetzungen an die Christoffelsymbole und Satz 1.7.11 gibt es eine regulär situierte tubulare Umgebung $\tilde{T} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ von $\{0\} \times S \times \{0\}$, so daß die Abbildung $\gamma_{|\tilde{T}} : \tilde{T} \to \mathbb{R}^n$, $(t, v) \mapsto \gamma_v(t)$ temperiert relativ $\{0\} \times \partial S \times \{0\}$ von der Klasse $\mathcal{C}^m$ ist. Es existieren dann positive stetige Abbildungen $\delta, \varepsilon, \varepsilon'$ auf S derart, daß

$$\delta(x) \geq D\, d(x, \partial S)^d, \quad \varepsilon(x) \geq C\, d(x, \partial S)^c, \quad \text{und} \quad \varepsilon'(x) \geq C'\, d(x, \partial S)^{c'}$$

für alle $x \in S$ sowie geeignete Konstanten $c, c', d \in \mathbb{N}$ und $C, C', D > 0$ gilt, und derart, daß

$$B^1_{\delta(x)}(0) \times B^n_{\varepsilon(x)}(x) \times B^n_{\varepsilon'(x)}(0) \subset \tilde{T}, \qquad x \in S.$$

Definiert man dann

$$W := \bigcup_{x \in S} \left(B^n_{\varepsilon(x)}(x) \cap \pi_S^{-1}(x)\right) \times B^n_{\frac{1}{2}\delta \cdot \varepsilon'(x)}(0),$$

so liegt für jedes Paar $(t, v_x) \in [-1,1] \times W$ der Punkt $\left(\delta(x)t, \frac{1}{\delta(x)} v_x\right)$ in $\tilde{T}$, folglich sind $\gamma_{|[-1,1] \times W}$ und $\exp_{|W}$ temperiert relativ $\{0\} \times \partial S \times \{0\}$ bzw. $\partial S \times \{0\}$ von der Klasse $\mathcal{C}^m$.

Ein ähnliches Argument zeigt die Temperiertheit einer geeigneten Einschränkung von $\exp^{-1}$, womit sich dann auch (2) ergibt. □

3.3.11 Korollar *Sind* S *und* T *wie in der Proposition und ist* μ *eine krümmungsmoderate Riemannsche Metrik der Klasse* $\mathcal{C}^{m+1}$ *auf* T, *so ist die maximale durch* μ *induzierte tubulare Umgebung* $T^{\mu,\max}$ *regulär situiert zu* S, *das heißt* $T^{\mu,\max} := \exp(T^{\max}_{S \subset N^\mu})$ *mit*

$$T^{\max}_{S \subset N^\mu} = \left\{v \in N^\mu_x \,\middle|\, x \in S,\ \exp v \in T,\ \delta_\mu(x, S) = \|v\|_{\mu_x}\right\}$$

ist eine regulär situierte Umgebung von S.

Als nächstes wollen wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen der einer Riemannschen Metrik zugeordneten projektionswertige Schnitt temperiert ist bzw. mit anderen Worten wann er krümmumgsmoderat gewählt werden kann. Dazu studieren wir in der nächsten Proposition lokale Orthogonalsysteme in Bezug auf μ.

3.3.12 Proposition *Sei* $m \in \mathbb{N}^{>0}$, $S \subset \mathbb{R}^n$ *eine von der Ordnung* $m + 2$ *krümmungsmoderate Untermannigfaltigkeit,* T *eine regulär situierte offene Umgebung von* S *derart, daß über* T *die Euklidische Projektion* $P_S : T \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ *definiert und krümmungsmoderat* *ist, sowie* μ *eine auf* T *definierte von der Ordnung* $m+1$ *krümmungsmoderate Riemannsche Metrik. Sei weiter* $B = B_\varepsilon(z) \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Kugel vom Radius* $\varepsilon < 1$ *um einen Punkt von* ∂S*, so daß* $K = \overline{B_{2\varepsilon}}(z) \cap \partial S$ *kompakt ist. Dann existieren zwei abzählbare lokalendliche Familien* $(\phi_j)_{j\in J}$ *und* $(f_{jl})_{j\in J, 1\le l\le n}$ *von glatten Funktionen* ϕ_j *bzw. glatten Vektorfeldern* f_{jl} *auf* $\mathbb{R}^n \setminus K$*, so daß folgendes gilt:*

(1) *Die* ϕ_j *haben alle kompakten Träger und bilden eine glatte Teilung der Eins über* $B \cap \mathrm{T}$*. Zudem ist die Anzahl* $N(x)$ *der Indizes* $j \in J$ *mit* $x \in \operatorname{supp}\phi_j$ *durch* 4^n *beschränkt.*

(2) *Es gibt Konstanten* $c_m \in \mathbb{N}$ *und* $C_m > 0$ *derart, daß für alle* $j \in J$ *folgende Abschätzung erfüllt ist:*

$$\|\partial^\alpha \phi_j(x)\| \le C_m \left(1 + \frac{1}{d(x,\partial S)^{c_m|\alpha|}}\right), \qquad x \in B\cap \mathrm{T},\ \ |\alpha| \le m,\ \ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

(3) *Für jedes* j *bildet das* n*-Tupel* $(f_{j1}, \cdots, f_{jn})$ *einen Orthogonalrahmen bezüglich* μ *über der Menge* $\operatorname{supp}\phi_k \cap B \cap \mathrm{T}$.

(4) *Es gibt Konstanten* $c'_m \in \mathbb{N}$ *und* $C'_m > 0$ *derart, daß für alle* $j \in J$ *und* l*,* $1 \le l \le n$*, folgende Abschätzung erfüllt ist:*

$$\|\partial^\alpha f_{jl}(x)\| \le C'_m \left(1 + \frac{1}{d(x,\partial S)^{c'_m}}\right), \qquad x \in \operatorname{supp}\phi_j \cap B\cap \mathrm{T},\ \ |\alpha| \le m.$$

(5) *Da* $T^\mu = (E, \varepsilon, \varphi)$ *die durch* μ *induzierte tubulare Umgebung von* S *in* M*,* $\pi^\mu : \mathrm{T}^\mu \to S$ *die zugehörige Projektion und* $P^\mu : \mathrm{T}^\mu \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ *die projektionswertige Abbildung, die jedem* $x \in \mathrm{T}$ *die Orthogonalprojektion bezüglich* μ *auf den Horizontalraum der tubularen Umgebung an der Stelle* x *zuordnet. Dann hat* P^μ *über* $B \cap \mathrm{T}$ *die folgende Darstellung:*

$$P^\mu_x v = \sum_{j\in J}\sum_{l=1}^{\dim S} \phi_j(x)\, \frac{\mu_x(v, f_{jl}(x))}{\mu_x(f_{jl}(x), f_{jl}(x))}\, f_{jl}(x) \qquad x \in B\cap \mathrm{T},\ \ v \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3.4}$$

Zudem ist P^μ *eine von der Ordnung* m *krümmungsmoderate projektionswertige Abbildung.*

Beweis: Da $P := P_S$ krümmungsmoderat ist, gibt es $d_m \in \mathbb{N}$ und $D_m > 0$ derart, daß alle partiellen Ableitung $\partial^\alpha P e_l$ höchstens der Ordnung m der Abschätzung

$$\sup_{x\in B\cap \mathrm{T}} \|\partial^\alpha P e_l(x)\|\, d(x,\partial S)^{d_m} < \frac{1}{\sqrt{n}} D_m, \qquad x \in \mathrm{T}. \tag{3.3.5}$$

genügen. Zudem existieren nach Voraussetzung an μ Konstanten $c \in \mathbb{N}$ und $C > 0$, so daß für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \overline{B_{2\varepsilon}} \cap \mathrm{T}$

$$\frac{d(x,\partial S)^c}{C}\, \|v\| \le \|v\|_{\mu_x} \le \frac{C}{d(x,\partial S)^c}\, \|v\|.$$

Nun wähle man zu $\delta_m = C'_m \cdot \max\{1, C^2\}$ und $c_m = c'_m + c$ gemäß Lemma 1.7.9 eine lokalendliche differenzierbare Teilung der Eins $(\phi_j)_{j\in J}$ von $\mathbb{R}^n \setminus K$, so daß

$$d(\operatorname{supp}\phi_j, K)^{c_m} \geq 2n\delta_m \operatorname{diam}(\operatorname{supp}\phi_j), \tag{3.3.6}$$

$$\left|\partial^\alpha \phi_j(x)\right| \leq C_m \left(1 + \frac{1}{d(x,K)^{c_m|\alpha|}}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus K, \quad |\alpha| \leq m, \tag{3.3.7}$$

wobei $C_m > 0$ nur von c_m, δ_m, n und m abhängt. Aufgrund der Konstruktion der ϕ_j in 1.7.9 kann angenommen werden, daß die Träger $\operatorname{supp}\phi_j$ alle konvex sind. Wir schränken die Indexmenge J nun auf genau die Indizes j ein, so daß $\operatorname{supp}\phi_j$ nichtleeren Durschnitt mit $T \cap B$ hat, und wählen $x_j \in \operatorname{supp}\phi_j \cap T \cap B$. Als nächstes suche man sich lineare Abbildungen $O_j \in GL(\mathbb{R}^n)$, so daß $(O_j e_1, \cdots, O_j e_n)$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Skalarprodukts μ_{x_j} darstellt, $(O_j e_{\dim S+1}, \cdots, O_j e_n)$ den Vertikalraum $T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi(E_{\pi^\mu(x)})$ aufspannt, und $\|O_j e_1\| = \cdots = \|O_j e_n\| = 1$ gilt. Für x genügend nahe bei x_j sind dann die folgenden rekursiv festgelegten Vektoren $f_{jl}(x)$, $l = 1, \cdots, n$ wohldefiniert:

$$f_{j1}(x) = P_x O_j e_1,$$

$$f_{j(l+1)}(x) = P_x O_j e_{l+1} - \sum_{k=1}^{l} \frac{\mu_x(P_x O_j e_{l+1}, f_{jk}(x))}{\mu_x(f_{jk}(x), f_{jk}(x))} f_{jk}(x).$$

Es soll nun gezeigt werden, daß die $f_{jk}(x)$ für $x \in \operatorname{supp}\phi_j \cap B \cap T$ wohldefiniert sind, und den Abschätzungen

$$1 - \frac{l}{2n} \leq \|f_{jl}(x)\| \leq 1 + \frac{l-1}{2n}, \qquad x \in \operatorname{supp}\phi_j \cap B \cap T \tag{3.3.8}$$

genügen. Dazu schätzen wir mittels (3.3.6) und (3.3.5) $\|P_x v\|$ für $x \in \operatorname{supp}\phi_j \cap B \cap T$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ab:

$$\begin{aligned} \|P_x v\| &\geq \Big|\, \|P_{x_j} v\| - \|P_x v - P_{x_j} v\| \,\Big| \geq \|P_{x_j} v\| - \sup_{y\in[x_j,x]} \|T_y P v\| \, \|x - x_j\| \\ &\geq \|P_{x_j} v\| - \frac{1}{2nC_m} \sup_{y\in[x_j,x]} \|T_y P v\| \, d(x,\partial S)^{c'_m} \geq \|P_{x_j} v\| - \frac{1}{2n}\|v\|, \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

wobei ausgenützt wurde, daß das Segment $[x_j, x]$ in $\operatorname{supp}\phi_j \cap B \cap T$ liegt. Daraus erhält man erst einmal $1 - \frac{1}{2n} \leq \|f_{j1}(x)\| \leq 1$. Nehmen wir an, (3.3.8) sei für alle $l \leq l_0$ erfüllt. Wir zeigen dann mit Hilfe von (3.3.6), (3.3.5) und (3.3.9), daß (3.3.8) auch für $l = l_0 + 1$ gelten muß:

$$\begin{aligned} \|f_{j(l_0+1)}(x)\| &\geq \|P_x O_j e_{l_0+1}\| - \sum_{k=1}^{l_0} \left\| \frac{\mu_x(P_x O_j e_{l_0+1}, f_{jk}(x))}{\mu_x(f_{jk}(x), f_{jk}(x))} f_{jk}(x) \right\| \\ &\geq 1 - \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{l_0} \frac{\|P_x O_j e_{l_0+1}\|_{\mu_x}}{\|f_{jk}(x)\|_{\mu_x}} \|f_{jk}(x)\| \\ &\geq 1 - \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{l_0} C^2 \sup_{y\in[x_j,x]} \|T_y P O_j e_{l_0+1}\| \, \|x - x_j\| \, \frac{1}{d(x,\partial S)^c} \\ &\geq 1 - \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{l_0} \frac{1}{2nC_m} \sup_{y\in[x_j,x]} \|T_y P O_j e_{l_0+1}\| \, d(x,\partial S)^{c_m} \\ &\geq 1 - \frac{l_0+1}{2n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathsf{f}_{j(l_0+1)}(x)\| &\leq \|P_x O_j e_{l_0+1}\| + \sum_{k=1}^{l_0} \left\| \frac{\mu_x(P_x O_j e_{l_0+1}, \mathsf{f}_{jk}(x))}{\mu_x(\mathsf{f}_{jk}(x), \mathsf{f}_{jk}(x))} \mathsf{f}_{jk}(x) \right\| \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{l_0} C^2 \sup_{y \in [x_j, x]} \|T_y P O_j e_{l_0+1}\| \, \|x - x_j\| \, \frac{1}{d(x, \partial S)^c} \\ &\leq 1 + \frac{l_0}{2n}.\end{aligned}$$

Induktiv ergibt sich damit (3.3.9) für alle l, folglich stellt $\mathsf{f}_{j1}(x), \cdots, \mathsf{f}_{jn}(x)$ für jedes $x \in \operatorname{supp} \phi_j \cap B \cap T$ eine μ_x-Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^n$ dar. Es ist nun unschwer einzusehen, daß man die so definierten f_{jl} zu glatten Vektorfeldern über $\mathbb{R}^n \setminus K$ fortsetzen kann, so daß jedes f_{jl} kompakten Träger hat, und $\|\mathsf{f}_{jl}(x)\| \leq 2$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ gilt.

Von den Komponenten der Funktionen $PO_j e_l$ weiß man aufgrund der Tatsache, daß S krümmungsmoderat ist, schon, daß sie in $\mathcal{M}^m(\partial S; T)$ liegen, also gibt es Konstanten $c_{m1} \in \mathbb{N}$ und $C_{m1} > 0$, so daß für alle α mit $|\alpha| \leq m$

$$\sup_{x \in \operatorname{supp} \phi_j \cap B \cap T} \|\partial^\alpha \mathsf{f}_{j1}(x)\| \, d(x, \partial S)^{c_{m1}} < C_{m1}. \tag{3.3.10}$$

Wir wollen zeigen, daß eine solche Abschätzung auch für die anderen f_{jl} gültig ist. Dazu vergegenwärtige man sich, daß es für jedes feste l eine polynomiale Funktion $r_l : \mathbb{R}^{n(l+n)+l-1} \to \mathbb{R}^n$ gibt, so daß

$$\mathsf{f}_{jl}(x) = r_l \left(P_x O_j e_l, \mathsf{f}_{j1}(x), \cdots, \mathsf{f}_{j(l-1)}(x), \frac{1}{\mu(\mathsf{f}_{j1}, \mathsf{f}_{j1})}, \cdots, \frac{1}{\mu(\mathsf{f}_{j(l-1)}, \mathsf{f}_{j(l-1)})}, \mu_{11}, \cdots, \mu_{nn} \right).$$

Da die f_{jl} der Abschätzung (3.3.8) mit von j unabhängigen Konstanten genügen, sowie μ über S krümmungsmoderat ist, ergibt sich durch Induktion nach l die Existenz von Konstanten $c_{ml} \in \mathbb{N}$ und $C_{ml} > 0$ derart, daß

$$\sup_{x \in \operatorname{supp} \phi_j \cap B \cap T} \|\partial^\alpha \mathsf{f}_{jl}(x)\| \; d(x, \partial S)^{c_{ml}} < C_{ml}. \tag{3.3.11}$$

Aufgrund des Gram–Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens und der Definition der f_{jl} stellt die rechte Seite von (3.3.4) auch tatsächlich die μ-Orthogonalprojektion P^μ_x auf den Horizontalraum der tubularen Umgebung T^μ dar. Zudem folgt wegen (3.3.7) und dem bisher Gezeigten, daß die Komponentenfunktionen von P^μ Whitney-Funktionen auf S induzieren, die temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$ sind. Insgesamt ergibt sich somit die Behauptung. □

3.3.13 Definition Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^m$-Untermannigfaltigkeit, $T = (E, \varepsilon, \varphi)$ eine tubulare Umgebung von S, $\pi : T \to S$ die zugehörige Projektion und $P : T \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ die stetige Abbildung, die jedem $x \in T$ die Projektion auf den Horizontalraum der tubularen Umgebung entlang des Vertikalraums zuordnet. Zudem sei $Q : T \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ der projektionswertige Schnitt mit $Q_x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - P_x$ für jedes $x \in T$. Die tubulare Umgebung T heißt dann *krümmungsmoderat* von der *Ordnung* m, falls folgenden Axiome erfüllt sind:

(KM6) Der projektionswertige Schnitt $P : T \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ ist krümmungsmoderat von der Ordnung m.

(KM7) Bezeichnet η das Skalarprodukt auf E, und μ die durch

$$\mu_x(v,w) = \eta_{\pi(x)}(T_x\varphi^{-1}.Q_x.v, T_x\varphi^{-1}.Q_x.w) + \langle P_x.v, P_x.w\rangle, \quad x \in \mathrm{T},\ v,w \in \mathbb{R}^n,$$

definierte Riemannsche Metrik auf T, so ist μ krümmungsmoderat von der Ordnung m.

Für den Fall, daß S Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit M ist, sagen wir, die tubulare Umgebung T sei *krümmungsmoderat*, falls eine Überdeckung von ∂S durch differenzierbare Karten $x : U \to \mathbb{R}^n$ von M der Form existiert, daß die tubularen Umgebungen $x_*(T_{|S\cap U})$ von $x(S \cap U)$ krümmungsmoderat sind.

Eine krümmungsmoderate tubulare Umgebung T von S hat zusätzlich die nachstehende Eigenschaft.

(KM8) Die Funktion $\rho : \mathrm{T} \to \mathbb{R}$ ist temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$.

3.3.14 Proposition *Sei $m \in \mathbb{N}^{>0}$, $S \subset M$ eine von der Ordnung $m+3$ krümmungsmoderate Untermannigfaltigkeit,* T *eine regulär situierte offene Umgebung von S und μ eine von der Ordnung $m+3$ krümmungsmoderate Riemannsche Metrik auf* T. *Dann ist die gemäß dem klassischen Tubensatz von μ induzierte maximale tubulare Umgebung $T^\mu = (E, \varepsilon, \varphi)$ von S von der Ordnung m krümmungsmoderat. Für den Fall $M = \mathbb{R}^n$ gilt zudem:*

(KM9) *Die Komponenten der Projektion π^μ von T^μ sind temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$.*

BEWEIS: Da es sich um eine lokale Aussage handelt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß $M = \mathbb{R}^n$. Sei unter dieser Annahme T die tubulare Umgebung von S bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts, sowie $\pi : \mathrm{T} \to S$ die zugehörige Projektion auf S, und $P : \mathrm{T} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ die projektionswertige Abbildung gemäß 3.3.1. Nach eventueller Einschränkung von T sind auch die Projektion $\pi^\mu :\to S$ von T^μ und die Abbildung $P^\mu : \mathrm{T} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, die jedem $x \in \mathrm{T}$ die Projektion auf den Horizontalraum von T^μ entlang des Vertikalraums zuordnet, auf T definiert. Wegen Korollar 3.3.11 kann dabei erreicht werden, daß $\complement\mathrm{T}$ regulär situiert zu S bleibt.

Aufgrund von (5) aus Proposition 3.3.12 wissen wir schon, daß die Komponenten der vektorwertigen Funktionen $P^\mu e_i$ relativ ∂S temperiert von der Klasse $\mathcal{C}^{m+1}$ sind, also ist schon einmal (KM6) erfüllt.

Wegen Lemma 3.3.8 und der Argumentation im Beweis von Proposition 3.3.7 ist dann unmittelbar klar, daß auch die Projektion π^μ relativ ∂S temperierte Whitney-Funktionen auf S induziert. Das ergibt (KM9).

Als nächstes zieht man Proposition 3.3.10 heran, und schließt, daß die Komponenten von $\exp^{-1}$ relativ ∂S temperierte Funktionen der Klasse $\mathcal{C}^{m+1}$ darstellen. Benutzt man noch das schon bewiesene Axiom (KM6) und die Voraussetzung, daß μ krümmungsmoderat ist, so muß folglich auch die durch

$$\mu'_x(v,w) = \mu_{\pi^\mu(x)}(T_x \exp^{-1}_{\pi^\mu(x)}.Q^\mu_x.v, T_x \exp^{-1}_{\pi^\mu(x)}.Q_x\mu.w) + \langle P^\mu_x.v, P^\mu_x.w\rangle, \quad x \in \mathrm{T},$$

gegebene Riemannsche Metrik μ' auf T krümmungsmoderat von der Ordnung m sein. Das war zu zeigen. □

3.4 Geometrische Folgerungen aus den Whitney-Bedingungen

In diesem Abschnitt werden einige geometrische Resultate über tubulare Umgebungen von Untermannigfaltigkeiten, die den Whitney-Bedingungen genügen, vorgestellt. Dabei vereinbaren wir zur Vereinfachung der Notation, daß (R, S) immer ein Paar disjunkter Untermannigfaltigkeiten der Mannigfaltigkeit M bezeichne.

3.4.1 Proposition (vgl. Mather [113, Lem 7.3]) *Sei T_R eine tubulare Umgebung von R in M. Erfüllt das Paar (R, S) die Whitney-Bedingung* (A)*, so gibt es eine glatte Funktion $\delta : \mathsf{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ derart, daß*

$$(\pi_\mathsf{R})_{|\mathsf{S}\cap \mathrm{T}_\mathsf{R}^\delta} : \mathsf{S} \cap \mathrm{T}_\mathsf{R}^\delta \longrightarrow \mathsf{R}$$

eine Submersion ist. Gilt sogar die Whitney-Bedingung (B)*, dann kann δ so gewählt werden, daß*

$$(\pi_\mathsf{R}, \rho_\mathsf{R})_{|\mathsf{S}\cap \mathrm{T}_\mathsf{R}^\delta} : \mathsf{S} \cap \mathrm{T}_\mathsf{R}^\delta \longrightarrow \mathsf{R} \times \mathbb{R}$$

submersiv ist.

Beweis: Zuerst kürzen wir ab: $\pi := \pi_\mathsf{R}$ und $\rho := \rho_\mathsf{R}$. Aufgrund von Lemma 3.1.2 genügt es zu zeigen, daß für jedes $x \in \mathsf{R} \cap \overline{\mathsf{S}}$ eine Umgebung U von X in M existiert, so daß $\pi_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}}$ bzw. $(\pi, \rho)_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}}$ submersiv ist. Dies ist jedoch eine lokale Aussage, das heißt es genügt, die Behauptung für den Fall zu zeigen, daß $\mathsf{M} = \mathbb{R}^n$ ist, $\mathsf{R} = \mathbb{R}^m$ mit $n = m + k$, und T_R die Standard-Tubenumgebung T_m^n.

Wir behandeln zuerst den (A)-Fall. Angenommen, die Behauptung wäre nicht richtig. Dann gäbe es eine gegen x strebende Folge von Elementen y_j aus $\mathsf{S}\cap\mathrm{T}_m^n$ und eine Folge von Einheitsvektoren v_j aus TR mit $v_j \in \left(\mathsf{T}_{y_j}\pi(\mathsf{T}_{y_j}\mathsf{S})\right)^\perp$. Nach Auswahl geeigneter Teilfolgen konvergiert $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gegen einen Einheitsvektor $v \in \mathsf{T}_x\mathsf{R}$ und $\mathsf{T}_{y_j}\mathsf{S} \to \tau$. Aufgrund der Whitneyschen Bedingung (A) gilt $\mathsf{T}_x\mathsf{R} \subset \tau$, also folgt $v \in \mathsf{T}\pi(\tau)^\perp \subset (\mathsf{T}_x\mathsf{R})^\perp$ was im Widerspruch dazu steht, daß v ein Einheitsvektor aus $\mathsf{T}_x\mathsf{R}$ ist.

Nun zum (B)-Fall. Angenommen, es gäbe eine gegen x strebende Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathsf{S} \cap \mathrm{T}_m^n$, so daß $\left(\mathsf{T}_{y_j}\rho\right)_{|\mathsf{T}_{y_j}\mathsf{S}} = 0$. Dann ist die Sekante $\ell_j = \overline{y_j\,\pi(y_j)}$ orthogonal zu $\mathbb{R}^m$ und $\ker \mathsf{T}_{y_j}\rho$. Nach Auswahl einer Teilfolge von $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert die Folge der Räume $\mathsf{T}_{y_j}\mathsf{S}$ gegen einen Unterraum τ und die Folge der Sekanten ℓ_j gegen eine Gerade ℓ, die ebenfalls orthogonal zu $\mathbb{R}^m$ ist. Aufgrund der Whitney-Bedingung (B) muß $\ell \subset \tau$ gelten, das heißt für alle j größer als ein geeignetes j_0 gibt es Einheitsvektoren v_j in $\mathsf{T}_{y_j}\mathsf{S}$ mit nichtverschwindender orthogonaler Projektion auf ℓ und damit auch auf ℓ_j. Da $\ell_j \subset \left(\ker \mathsf{T}_{y_j}\rho\right)^\perp$ gilt, ist dann für alle v_j mit $j > j_0$ die Beziehung $\mathsf{T}_{y_j}\rho(v_j) \neq 0$ erfüllt, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt. Folglich existiert eine Umgebung $\mathsf{U} \subset \mathrm{T}_m^n$ von x derart, daß $\rho_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}} : \mathsf{S} \cap \mathsf{U} \to \mathbb{R}$ submersiv ist. Desweiteren ist dann das Kernbündel $\mathsf{E} = \ker\left(\mathsf{T}\rho_{|\mathsf{U}\cap\mathsf{S}}\right)$ über $\mathsf{U} \cap \mathsf{S}$ wohldefiniert und besitzt die Faserdimension $\dim \mathsf{S} - 1$. Nehmen wir nun an, es gäbe eine gegen x strebende Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{S} \cap \mathsf{U}$, so daß $\dim \mathsf{T}_{y_j}\pi(\mathsf{E}_{y_j}) < m$. τ und ℓ seien wie oben definiert, und $\mathsf{K}_j = \ker(\mathsf{T}_{y_j}\pi)_{|\mathsf{E}_{y_j}}$. Nach Auswahl einer Teilfolge von $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ können wir annehmen, die Folge der Vektorräume K_j strebe gegen einen Vektorraum K, der dann nach Voraussetzung Dimension $> \dim \mathsf{S} - 1 - m$ haben muß. Aufgrund der Whitney-Bedingung (B) gilt $\mathsf{K} + \ell + \mathsf{T}_x\mathsf{R} \subset \tau$. Nach Definition schneiden sich die Vektorräume K, ℓ und $\mathsf{T}_x\mathsf{R}$ jedoch paarweise jeweils nur im Ursprung, das heißt es ergibt sich der Widerspruch $\dim \mathsf{K} \le \dim \tau - \dim \ell - \dim \mathsf{T}_x\mathsf{R} = \dim \mathsf{S} - 1 - m$. Also muß nach geeigneter Verkleinerung der Umgebung U von x die Relation $\dim \mathsf{T}_y\pi(\mathsf{E}_y) = m$ für alle $y \in \mathsf{S} \cap \mathsf{U}$ erfüllt sein. Das aber impliziert die zweite Behauptung. □

3.4.2 Bemerkung In gewissem Sinne gilt auch die Umkehrung der vorangehenden Proposition. Dies ist von Trotman in seiner Arbeit [152] über geometrische Versionen der Whitney-Regularität genauer untersucht worden. Gezeigt wird darin, daß das Paar (R, S) genau dann an der Stelle $x \in \mathsf{R}$ der Bedingung (A) genügt, wenn für jede Karte $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ um x der Klasse $\mathcal{C}^1$ derart, daß $\mathsf{R} \cap \mathsf{U}$ auf eine offene Menge im $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ abbildet wird, die Projektion

$$\pi^{\mathsf{x}} : \mathrm{T}_{\mathsf{R}} \cap \mathsf{S} \to \mathsf{R}, \quad x \mapsto \left(\mathsf{x}^{-1} \circ \pi^n_m \circ \mathsf{x}\right)(x), \qquad \mathrm{T}_{\mathsf{R}} := \mathsf{x}^{-1}(\mathrm{T}^m_m),$$

submersiv ist. Die Bedingung (B) dagegen ist genau dann wahr, wenn für jede ebensolche Karte $\mathsf{x} : \mathsf{U} \to \mathbb{R}^n$ um x der Klasse $\mathcal{C}^1$ die Abbildung

$$(\pi^{\mathsf{x}}, \rho^{\mathsf{x}}) : \mathrm{T}_{\mathsf{R}} \cap \mathsf{S} \to \mathsf{R} \times \mathbb{R}^{>0}, \quad x \mapsto \left(\pi^{\mathsf{x}}(x), \rho^{\mathsf{x}}(x)\right), \qquad \rho^{\mathsf{x}}(x) := \left(\rho^n_m \circ \mathsf{x}\right)(x),$$

submersiv ist. Interessanterweise genügt es in beiden Fällen nicht, nur Karten der Klasse $\mathcal{C}^2$ zu berücksichtigen. Aus dem Trotmanschen Resultat folgt übrigens unmittelbar, daß die Bedingungen (A) und (B) beide $\mathcal{C}^1$-invariant sind.

Beweise des Resultats von Trotman wurden unabhängig voneinander auch von Hajto [70] und Perkal [132] angegeben.

3.4.3 Korollar (Bekka [6]) *Genügt das Paar* (R, S) *an der Stelle* $x \in \mathsf{R}$ *Whitney* (B), *so ist auch* Bekka*s Bedingung* (C) *an der Stelle* x *erfüllt.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir wieder $\mathsf{M} = \mathbb{R}^n$ annehmen. Zudem seien π und ρ wie im Beweis der Proposition. Nach der dortigen Argumentation gibt es nun eine Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$, so daß $(\pi, \rho)_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}} : \mathsf{S}\cap\mathsf{U} \to \mathsf{R}\times\mathbb{R}$ submersiv ist. Sei nun $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen x strebende Folge aus $\mathsf{S}\cap\mathsf{U}$, so daß die Folge $(\ker \mathsf{T}_{y_k}(\rho_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}}))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen einen Unterraum $\lambda \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert. Nach Auswahl einer Teilfolge kann erreicht werden, daß die Folge $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Verbindungsgeraden $\ell_k = \overline{y_k\pi(y_k)}$ gegen eine auf $\mathsf{T}_x\mathsf{R}$ senkrechte Gerade ℓ konvergiert, und $(\mathsf{T}_{y_k}\mathsf{S})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen einen Unterraum $\tau \subset \mathbb{R}^n$. Nach Whitney (B) und (A) gilt $\mathsf{T}_x\mathsf{R} \oplus \ell \subset \tau$, andererseits gilt aber $\lambda \oplus \ell = \tau$. Die zweite direkte Summe ergibt sich dabei aus Whitney (B) und der Tatsache, daß gemäß dem Beweis der Proposition die Summe aus der Projektion von ℓ_k auf $\mathsf{T}_{y_k}\mathsf{S}$ und dem Unterraum $\ker \mathsf{T}_{y_k}(\rho_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}})$ gleich $\mathsf{T}_{y_k}\mathsf{S}$ ist. Da aber die Gerade ℓ senkrecht auf beiden Unterräumen $\mathsf{T}_x\mathsf{R}$ und λ steht, muß $\mathsf{T}_x\mathsf{R} \subset \lambda$ gelten. Das war zu zeigen. □

3.4.4 Korollar (Bekka [6]) *Erfüllt das Paar* (R, S) *an der Stelle* $x \in \mathsf{R}$ *die Bedingung* (A)+(δ)*, so gibt es eine Umgebung* U *von* x*, so daß die Abbildungen*

$$(\pi_{\mathsf{R}})_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}} : \mathsf{S} \cap \mathsf{U} \longrightarrow \mathsf{R} \quad \textit{und} \quad (\rho_{\mathsf{R}})_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{U}} : \mathsf{S} \cap \mathsf{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

submersiv sind. Zudem genügt dann (R, S) *an der Stelle* x *auch Bekkas Bedingung* (C).

Beweis: Aus 3.4.1 wissen wir schon, daß es ein U gibt mit $(\pi)_{|S\cap U}$ submersiv. Wegen (δ) kann nach Verkleinerung von U erreicht werden, daß $\ker(T_y\rho_{|S})$ für jedes $y \in U \cap S$ Kodimension 1 in T_yS hat, denn $P_{S,y}(y - \pi(y))$ steht ja senkrecht auf $\ker(T_y\rho_{|S}) = T_yS \cap \ker(T_y\rho)$. Das impliziert aber die Submersivität von $\rho_{|S}$. Zum Nachweis von (C) sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen x strebende Folge von Punkten aus $S \cap U$, so daß die Folge der Kerne $\ker(T_{y_k}\rho_{|S})$ gegen einen Unterraum $\tau \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert. Nach Auswahl einer Teilfolge konvergiert die Folge der Vektorräume $\operatorname{span}\{P_{S,y_k}(y_k - \pi(y_k))\}$ gegen eine Gerade $\ell \subset \mathbb{R}^n$. Wegen Whitney (A) ist $T_xR \subset \tau \oplus \ell = \lim_{k\to\infty} T_{y_k}S$. Andererseits steht aber ℓ senkrecht auf τ und T_xR, also muß $T_xR \subset \tau$ gelten. Das war zu zeigen. □

3.4.5 Lemma *Seien $R, S \subset \mathbb{R}^n$ mit $R \subset \partial S$, sei π_R die Projektion und ρ_R die tubulare Funktion der Euklidischen tubularen Umgebung von R, und sei schließlich T_S die Euklidische tubulare Umgebung von S. Mit $P^\pi : \mathrm{T}_R \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ werde der projektionswertige Schnitt auf das Kernbündel von $T\pi_R$ bezeichnet, mit $P_S : \mathrm{T}_S \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ der auf das Horizontalbündel von T_S, und unter $Q^\pi : \mathrm{T}_R \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ sowie $Q_S : \mathrm{T}_S \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ verstehen wir die durch $Q^\pi_x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - P^\pi_x$ und $Q_{S,x} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - P_{S,x}$ definierten projektionswertigen Schnitte. Für jedes $x \in R$ sind dann die folgenden vier Aussagen äquivalent:*

(1) *Das Paar (R, S) erfüllt Whitney (A) an der Stelle x.*

(2) *Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung U von x, so daß $d_{\mathrm{Gr}}(T_xR, T_yS) < \varepsilon$ für alle $y \in S \cap U$.*

(3) *Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung $U \subset \mathrm{T}_R$ von x, so daß $\|Q^\pi_y Q_{S,y} w\| \leq \varepsilon \|Q_{S,y} w\|$ für alle $y \in S \cap U$ und $w \in \mathbb{R}^n$.*

(4) *Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung $U \subset \mathrm{T}_R$ von x, so daß $\|Q_{S,y} Q^\pi_y w\| \leq \varepsilon \|Q^\pi_y w\|$ für alle $y \in S \cap U$ und $w \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis: Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt unmittelbar aus der Definition von Whitney (A), der Definition des Vektorraumabstands d_{Gr} in Appendix A.1 und Proposition A.1.1 (2).

Sei nun $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen x strebende Folge von Punkten aus S und $(T_{y_k}S)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $\tau \subset \mathbb{R}^n$. Da Q^π_x die Orthogonalprojektion auf T_xR ist und Q_{S,y_k} die auf $(T_{y_k}S)^\perp$, so folgt aus (3), daß $\tau^\perp \subset (T_xR)^\perp$, also $T_xR \subset \tau$ und damit Whitney (A). Aus der Gültigkeit von (4) folgt sofort $T_xR \subset \tau$, also ebenfalls Whitney (A).

Nehmen wir als nächstes an, es gelte (1) aber nicht (3). Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus S mit Grenzwert x und noch eine Folge von Einheitsvektoren $v_k \in (T_{y_k}S)^\perp$ mit $\|Q^\pi_{y_k} v_k\| \geq \varepsilon$. Durch Auswahl von Teilfolgen kann erreicht werden, daß $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Da die Projektionen $Q^\pi_{y_k}$ gegen die Orthogonalprojektion auf T_xR konvergieren, hat damit v nichtverschwindende Projektion auf T_xR, was im Widerspruch zu Whitney (A) steht. In analoger Weise zeigt man (1)$\Rightarrow$(4). □

3.4.6 Proposition *Sei $X \subset M$ ein (A)+(δ)-stratifizierter abgeschlossener Unterraum von M bestehend aus den zwei Strata $S = X^\circ$ und ∂S. Sei weiter μ eine Riemannsche Metrik auf M und für jedes Stratum R von X sei T_R die von μ induzierte maximale tubulare Umgebung von R in M mit Projektion π_R und tubularer Funktion ρ_R. Ist dann*

X *von der Ordnung* m *krümmungsmoderat, so ist nach geeigneter Einschränkung von* $T_{\partial S}$ *die Submersion* $(\pi_{\partial S}, \rho_{\partial S}) : T_S \cap T_{\partial S} \to \partial S \times \mathbb{R}^{>0}$ *sogar von der Ordnung* m *stark krümmungsmoderat über* S *.*

BEWEIS: Da die Behauptung letztlich nur lokal nachgewiesen werden muß, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß M eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$ gilt. Überdies nehmen wir an, daß μ durch das Euklidische Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gegeben ist; der Fall beliebigen μ's ergibt sich analog, nur technisch etwas aufwendiger. Schließlich kürzen wir noch ab $\rho := \rho_{\partial S}$, $\pi := \pi_{\partial S}$ und setzen $R := \partial S$.

Mit $P_S : T_S \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ werde der projektionswertige Schnitt auf das Horizontalbündel von T_S entlang dem Vertikalbündel bezeichnet. Weitere projektionswertige Schnitte $P^\rho : T_R \setminus R \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ und $P^\pi : T_R \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ sind durch die Orthogonalprojektion auf das Kernbündel von $T(\rho_{|T_R \setminus R})$ bzw. auf das Kernbündel von $T\pi$ gegeben. Expliziter ausgedrückt hat P^ρ_x die Form

$$P^\rho_y w = w - \langle w, y - \pi(y)\rangle \frac{y - \pi(y)}{\|y - \pi(y)\|^2}, \qquad y \in T_R \setminus R,\ w \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4.1}$$

Da die Behauptung ja letztlich nur lokal um einen Punkt von R zu beweisen ist, können wir (nach Verkleinerung von M und damit auch R) annehmen, daß P^π die Form

$$P^\pi_y w = w - \sum_{i=1}^{\dim R} \langle w, f_i(\pi(y))\rangle\, f_i(\pi(y)), \qquad y \in T_R,\ w \in \mathbb{R}^n, \tag{3.4.2}$$

hat, wobei die $f_i : R \to \mathbb{R}^n$ Vektorfelder bezeichnen, die einen Orthonormalrahmen von R um x aufspannen. Die beiden projektionswertigen Schnitte P^ρ und P^π sind offensichtlich über S krümmungsmoderat. Zudem vertauschen P^ρ_y und P^π_y, also stellt $P^\rho P^\pi$ die Projektion auf das Kernbündel von $T(\pi,\rho)$ über $T_R \setminus R$ dar. Desweiteren ist mit P^ρ und P^π auch $P^\rho P^\pi$ krümmungsmoderat. Zum Nachweis der Behauptung muß folglich nur noch gezeigt werden, daß der projektionswertige Schnitt auf das Kernbündel von $P_S - P^\rho P^\pi$ krümmungsmoderat ist. Dazu wollen wir Lemma 3.3.6 ausnutzen. Da $P_S - P^\rho P^\pi$ selbstadjungiert ist, genügt es wegen Lemma 3.3.6 nachzuweisen, daß zu $x \in R$ eine Umgebung U existiert sowie eine Konstante $\lambda > 0$ derart, daß für jedes $y \in S \cap U$ und jeden Eigenvektor $v \in \big(\ker(P_{S,y} - P^\rho_y P^\pi_y)\big)^\perp$ der zugehörige Eigenwert λ_v Betrag $|\lambda_v| \geq \lambda$ hat. Dies soll im folgenden geschehen. Man berechne zuerst:

$$\big(\ker(P_{S,y} - P^\rho_y P^\pi_y)\big)^\perp \subset \big(\mathrm{im}\, P_{S,y} \cap \mathrm{im}\, P^\rho_y P^\pi_y\big)^\perp = \ker P_{S,y} + \ker P^\rho_y + \ker P^\pi_y,$$

wobei die Vektorraumsumme im allgemeinen nicht direkt ist; im Verlaufe der folgenden Überlegungen wird sich zudem ergeben, daß anstelle der Beziehung $\subset$ sogar Gleichheit gilt. Wir schätzen nun die Normen $\|(P_{S,y} - P^\rho_y P^\pi_y)w\|$ für einen Vektor $w \in \ker P_{S,y} + \ker P^\rho_y + \ker P^\pi_y$ nach unten ab. Zuerst sei $w \in \ker P^\rho_y$. Dann ist

$$w = \frac{\langle w, y - \pi(y)\rangle}{\|y - \pi(y)\|^2}(y - \pi(y)),$$

folglich gilt mit geeignetem U und $\delta > 0$ wegen (δ)

$$\|(P_{S,y} - P^\rho_y P^\pi_y)w\| = \|P_{S,y} w\| = \frac{\|P_{S,y}(y - \pi(y))\|}{\|y - \pi(y)\|}\,\|w\| \geq \delta\,\|w\|. \tag{3.4.3}$$

Als nächstes sei $w \in \ker P_{S,y}$. Wir verkleinern U derart, daß für ein noch zu bestimmendes $\varepsilon > 0$ gemäß Lemma 3.4.5 (3) $\|Q^\pi_y v\| \leq \varepsilon \|v\|$ für alle $y \in S \cap U$ und $v \in \ker P_{S,y}$ gilt. Dann rechnet man mit Gl. (3.4.1) und der Beziehung $P^\pi_y(y - \pi(y)) = y - \pi(y)$ nach

$$\begin{aligned} \|(P_{S,y} - P^\rho_y P^\pi_y)w\| = \|P^\rho_y P^\pi_y w\| &\geq \|P^\pi_y w\| - \frac{\big|\langle w, y - \pi(y)\rangle\big|}{\|y - \pi(y)\|} \\ &= \|P^\pi_y w\| - \frac{\big|\langle w, Q_{S,y}(y - \pi(y))\rangle\big|}{\|y - \pi(y)\|} \\ &\geq \sqrt{\|w\|^2 - \|Q^\pi_y w\|^2} - \frac{\|Q_{S,y}(y - \pi(y))\|}{\|y - \pi(y)\|}\,\|w\| \\ &\geq \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} - \sqrt{1 - \delta^2}\right)\|w\| = \delta^\pi\,\|w\|^2. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

An dieser Stelle bestimme man $\varepsilon > 0$ so, daß $\delta^\pi := \sqrt{1 - \varepsilon^2} - \sqrt{1 - \delta^2} > 0$.
Zuletzt sei $w \in \ker P^\pi_y$. Nach Lemma 3.4.5 (4) können wir U so verkleinern, daß für den Orthonormalrahmen $(f_1, \cdots, f_{\dim R})$ von R um x die Abschätzung

$$\|Q_{S,y} f_i(\pi(y))\| \leq \frac{1}{2n}, \qquad y \in S \cap U,$$

gilt. Andererseits gilt wegen Gl. (3.4.2) $w = \sum_{i=1}^{\dim R} \langle w, f_i(\pi(y))\rangle\, f_i(\pi(y))$, also folgt

$$\begin{aligned} \|(P_{S,y} - P^\rho_y P^\pi_y)w\| = \|P_{S,y} w\| &\geq \|w\| - \sum_{i=1}^{\dim R} \big|\langle w, f_i(\pi(y))\rangle\big|\, \|Q_{S,y} f_i(\pi(y))\| \\ &\geq \|w\| \left(1 - \sum_{i=1}^{\dim R} \|Q_{S,y} f_i(\pi(y))\|\right) \geq \frac{1}{2}\,\|w\|. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Wir setzen nun $\lambda := \min\{\delta, \delta^\pi, \frac{1}{2}\}$. Aus den bisherigen Überlegungen ergibt sich dann, daß der Eigenwert zum Eigenvektor $v \in \left(\ker(P_{S,y} - P^\rho_y P^\pi_y)\right)^\perp$ Betrag $|\lambda_v| \geq \lambda > 0$ haben muß. Das war zu zeigen. □

Die letzte Proposition legt die folgende Definition nahe.

3.4.7 Definition Ein (A)-stratifizierter Raum X heißt *stark krümmungsmoderat* von der Ordnung m, wenn jedes Stratum von der Ordnung m krümmungsmoderat ist, und wenn für jedes Paar $R < S$ von Strata (nach eventueller Verkleinerung der tubularen Umgebungen) die Submersion $(\pi_R, \rho_R)_{|S \cap T_R} : S \cap T_R \to S \times \mathbb{R}^{>0}$ von der Ordnung m stark krümmungsmoderat über S ist.

3.4.8 Beispiel Subanalytische Mengen mit ihrer gröbsten Whitney-Stratifizierung sind von jeder Ordnung stark krümmungsmoderat.

3.5 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

In seiner Arbeit [113] hat J. Mather den klassischen Tubensatz in verschiedene Richtungen verallgemeinert und weitreichende Sätze zur Existenz und Eindeutigkeit tubularer

Umgebungen angegeben. In diesem Abschnitt sollen die Resultate von J. MATHER vorgestellt und bewiesen sowie um “krümmungsmoderate Versionen” ergänzt werden. Bevor wir jedoch dazu kommen, müssen wir noch einige auch in [113] verwendete Begriffe bereitstellen.

3.5.1 Die Voraussetzungen seien wie im vorherigen Abschnitt gegeben: $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, S sei eine Untermannigfaltigkeit von M; zudem seien T, T_0, T_1 usw. immer tubulare Umgebungen von S in M.

Für jede Teilmenge $U \subset S$ bezeichnet man mit $T_{|U}$ die durch $(E_{|U}, \varepsilon_{|U}, \varphi_{|E_{|U} \cap T^{\varepsilon}_{S \subset E}})$ definierte *Einschränkung* von T auf U.

Stellen $T = (E, \varepsilon, \varphi)$ und $\tilde{T} = (\tilde{E}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\varphi})$ zwei tubulare Umgebungen von S in M dar, so versteht man unter einem *Morphismus tubularer Umgebungen* von T nach $\tilde{T}$ (der *Klasse* $\mathcal{C}^m$) ein Paar (ψ, δ), wobei $\psi : E \to \tilde{E}$ eine isometrische Vektorbündel-Abbildung (der Klasse $\mathcal{C}^m$) ist, $\delta : S \to \mathbb{R}^{>0}$ eine $\mathcal{C}^m$-Funktion, so daß $\delta \leq \min(\varepsilon, \tilde{\varepsilon})$ und

$$\tilde{\varphi} \circ \psi_{|T^{\delta}_{S \subset E}} = \varphi_{|T^{\delta}_{S \subset E}}.$$

Dies impliziert insbesondere, daß die beiden Beziehungen

$$\pi_{R|\varphi(T^{\delta}_{S \subset E})} = \tilde{\pi}_{R|\varphi(T^{\delta}_{S \subset E})},$$
$$\rho_{R|\varphi(T^{\delta}_{S \subset E})} = \tilde{\rho}_{R|\varphi(T^{\delta}_{S \subset E})},$$

gelten müssen. Da die Dimension der Faser von E gleich $\operatorname{codim}_M S$ sein muß, ist mit (ψ, δ) auch das Paar (ψ^{-1}, δ) wohldefiniert und stellt einen Morphismus tubularer Umgebungen von $\tilde{T}$ nach T dar. Man sagt deshalb in dieser Situation, T und $\tilde{T}$ seien *isomorph*, und beschreibt sie mittels einer der folgenden Notationen:

$$(\psi, \delta) : T \to \tilde{T}, \quad \psi : T \to \tilde{T}, \quad T \sim_{(\psi,\delta)} \tilde{T}, \quad \text{oder ganz kurz} \quad T \sim \tilde{T}.$$

Unter einer $\mathcal{C}^m$-*Isotopie* von M nach N versteht man eine $\mathcal{C}^m$-Homotopie $H : M \times [0,1] \to N$, so daß alle Abbildungen $H_t : M \to N$, $t \in [0,1]$ Einbettungen der Klasse $\mathcal{C}^m$ sind.

Sei $S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, $Z \subset \partial S$ lokal abgeschlossen und T eine offene Umgebung von S, in der S abgeschlossen liegt. Bezeichnet $h : T \to M$ eine S invariant lassende Einbettung, das heißt gilt $h_{|S} = \mathrm{id}_S$, so sagen wir, h sei *temperiert relativ* Z von der *Klasse* $\mathcal{C}^m$, falls eine Überdeckung von ∂S durch in M offene Mengen V zusammen mit $\mathcal{C}^m$-Karten $x : U \to \mathbb{R}^n$ von M existiert, so daß einerseits $V \cap T \subset h^{-1}(U)$ gilt und andererseits die Abbildungen $V \cap T \ni x \mapsto x(h(x))$ Funktionen darstellen, die temperiert relativ $Z \cap V$ von der Klasse $\mathcal{C}^m$ sind. Falls $H : T \times [0,1] \to M$ eine S invariant lassende $\mathcal{C}^m$-Isotopie ist, das heißt gilt $H_t(x) = x$ für alle $x \in S$, so sagen wir, H sei *temperiert relativ* Z von der *Klasse* $\mathcal{C}^m$, falls jede der Einbettungen $H_t : T \to M$ temperiert relativ Z von der Klasse $\mathcal{C}^m$ ist.

Für jede Einbettung $h : T \to M$ bedeutet der *Träger* von h den Abschluß der Menge aller Punkte $x \in M$ mit $h(x) \neq x$. In analoger Weise definiert man den *Träger* einer Isotopie $H : M \times [0,1] \to M$ als den Abschluß der Menge aller Punkte $x \in M$ mit $H(x,t) \neq x$ für ein $t \in [0,1]$.

Ist schließlich $f : M \to N$ eine $\mathcal{C}^m$-Abbildung, so heißt eine $\mathcal{C}^m$-Abbildung $h : M \to M$ bzw. eine $\mathcal{C}^m$-Homotopie $H : M \times [0,1] \to M$ *kompatibel* mit f, falls $f \circ h = f$ bzw. $f \circ H_t = f$ für alle $t \in [0,1]$.

Nun haben wir alle Zutaten, die wir für die beiden Hauptsätze über tubulare Umgebungen benötigen.

3.5.2 Eindeutigkeit tubularer Umgebungen *Sei* $m \in \mathbb{N}^{>0}$, $S \subset M$ *eine Untermannigfaltigkeit von* M *der Klasse* $\mathcal{C}^{m+2}$, *und* $f : M \to N$ *eine* $\mathcal{C}^{m+2}$*-Abbildung, so daß die Einschränkung* $f_{|S} : S \to N$ *submersiv ist. Seien weiter* T_0 *und* T_1 *zwei mit* f *kompatible tubulare Umgebungen von* S *in* M *der Klasse* $\mathcal{C}^m$, *sowie* $\tilde{\psi} : T_{0|U} \to T_{1|U}$ *ein Isomorphismus tubularer Umgebungen der Klasse* $\mathcal{C}^m$ *über* $U \subset S$ *offen. Schließlich seien* $A, Z \subset S$ *mit* $A \subset U$ *zwei vorgegebene relativ* S *abgeschlossene Teilmengen, und* V *eine offene Umgebung von* Z *in* M. *Dann gelten folgende Aussagen:*

(TU1) *Es existiert eine offene Umgebung* $T \subset M$ *von* S, *in der* S *abgeschlossen liegt, zusammen mit einer* S *invariant lassenden und mit* f *kompatiblen* $\mathcal{C}^m$*-Isotopie* $H : T \times [0,1] \to M$ *mit Träger in* V *derart, daß die beiden tubularen Umgebungen* $h^*\left(T_{0|A\cup Z}\right)$ *und* $T_{1|A\cup Z}$ *isomorph sind. Dabei stellt* h *die Einbettung* H_1 *dar. Der Isomorphismus* $\psi : h_*\left(T_{0|A\cup Z}\right) \to T_{1|A\cup Z}$ *kann so konstruiert werden, daß die Beziehung* $\psi_{|A} = \tilde{\psi}_{|A}$ *gilt.* (*vgl.* Mather [113, Prop. 6.1])

(TU2) *Unter der Voraussetzung, daß* V *eine regulär situierte Umgebung von* Z *ist,* S *sowie die beiden tubularen Umgebungen* T_i, $i = 0,1$ *krümmungsmoderat von der Ordnung* m *sind und schließlich, daß* f *krümmungsmoderat von der Ordnung* $m+1$ *ist, kann die Isotopie* H *so konstruiert werden, daß sie temperiert relativ* ∂S *von der Klasse* $\mathcal{C}^m$ *ist.*

Beweis: Wir führen den Beweis in zwei Schritten; im ersten werden die Behauptungen (TU1) und (TU2) für den lokalen Fall gezeigt, das heißt unter der Annahme $M = \mathbb{R}^n$, und im zweiten wird der allgemeine Fall auf den lokalen zurückgeführt.

1. Schritt Es sei also $M = \mathbb{R}^n$ und $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei weiter π_i, $i = 0,1$ die Projektion von T_i, sowie π die Projektion der durch das Euklidische Skalarprodukt gegebenen tubularen Umgebung $T = (E, \varepsilon, \varphi)$ von S. Mit P_i und P werden die den tubularen Umgebungen T_i und T zugeordneten projektionswertigen Abbildungen bezeichnet. Vektorbündel-Isomorphismen von E_0 bzw. E_1 nach E sind dann durch

$$\xi_{i,x} : E_{i,x} \to E_x, \quad v \mapsto P_x.T\varphi_i.v, \qquad x \in S,$$

gegeben. Sei $\xi : E_0 \to E_1$ der durch Hintereinanderschalten von ξ_0 und ξ_1^{-1} entstandene Vektorbündel-Isomorphismus der Klasse $\mathcal{C}^{m-1}$. Auf U stimmt ξ nach Voraussetzung mit $\tilde{\psi}$ überein: $\xi_{|U} = \tilde{\psi}$. Ändert man ξ außerhalb einer Umgebung $U' \subset U$ von A eventuell geeignet ab, so kann erreicht werden, daß ξ sogar ein $\mathcal{C}^m$-Vektorbündel-Isomorphismus ist. Aufgrund der Polarzerlegung A.2.1 gibt es für jedes $x \in S$ genau einen positiv definiten Operator $\zeta_x : E_{1,x} \to E_{1,x}$, so daß $\psi_x := \zeta_x^{-1} \circ \xi_x : E_{0,x} \to E_{1,x}$ unitär ist, folglich ist $\psi : E_0 \to E_1$ ein Isomorphismus von Vektorbündeln mit Skalarprodukt. Desweiteren ist für $t \in [0,1]$ die Bündelabbildung $(1-t)\xi + t\psi : E_0 \to E_1$ wohldefiniert und stellt einen Isomorphismus von Vektorbündeln dar, der zudem auf U mit $\tilde{\psi}$ übereinstimmt. Das wiederum impliziert die Existenz einer offenen Umgebung T von S (in der S abgeschlossen liegt), so daß für jedes $t \in [0,1]$

$$G_t : T \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \big(\varphi_1 \circ ((1-t)\xi + t\psi) \circ \varphi_0^{-1}\big)(x)$$

wohldefiniert ist, und einen Diffeomorphismus auf sein Bild darstellt. Offensichtlich gilt dann

$$G_{t|S} = \mathrm{id}_S \quad \text{und} \quad G_{t|U'} = \mathrm{id}_{U'},$$

wobei jetzt U' von der Form $U' := \pi_0^{-1}(A) \cap T_0^\delta$ gewählt wird und $\delta : S \to \mathbb{R}^{>0}$ eine geeignete $\mathcal{C}^m$-Funktion mit $T_0^\delta \subset T$ ist. Da die tubularen Umgebungen T_i als mit f kompatibel angenommen worden sind, folgt außerdem

$$f(G_t(x)) = f(x), \qquad x \in T. \tag{3.5.1}$$

Nach eventueller Verkleinerung von T kann erreicht werden, daß G_0 die Umgebung T diffeomorph auf eine offene Umgebung $\tilde{T}$ von S abbildet. Dann ist die Abbildung

$$G_{t,0} : \tilde{T} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto G_t(G_0^{-1}(x)),$$

wohldefiniert und ein Diffeomorphismus auf sein Bild. Nach Konstruktion hat $G_{t,0}$ die Form

$$G_{t,0}(x) = \big(\varphi_1 \circ ((1-t)\mathrm{id} + t\zeta^{-1}) \circ \varphi_1^{-1}\big)(x), \qquad x \in \tilde{T}.$$

Da ζ_x positiv definit ist, ist für jedes $x \in S$ die Ableitung $DG_{t,0}(x)$ diagonalisierbar mit lauter positiven Eigenwerten, eine Tatsache, die wir für spätere Zwecke festhalten wollen.

Als nächstes betrachte man die projektionswertige $\mathcal{C}^{m+1}$-Abbildung $P^f : \tilde{T} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, die sich gemäß Beispiel 3.3.5 aus f ergibt. Setzt man $Q_x^f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - P_x^f$, $x \in \tilde{T}$, so wird durch

$$\nabla_v w = P^f(D(P^f w).v) + Q^f(D(Q^f w).v), \qquad v, w \in \mathcal{X}^{m+1}(\tilde{T}), \tag{3.5.2}$$

ein Zusammenhang ∇ auf T definiert. Sei exp die zugehörige Exponentialfunktion. Aufgrund der Definition von ∇ ist dann exp von der Klasse $\mathcal{C}^m$ und es muß

$$f(\exp tv) = f(x) \tag{3.5.3}$$

für alle $t \in [0,1]$ und alle genügend kleinen $v \in \ker T_x f = P_x^f \mathbb{R}^n$, $x \in \tilde{T}$ gelten.

Nach eventueller Verkleinerung von T kann angenommen werden, daß $\exp_x^{-1}(y)$ für alle $x \in S$ und $y \in T \cap f^{-1}(f(x))$ definiert ist, und daß die Geodäte $\gamma(t) = \exp(t \exp_x^{-1}(y))$ in $\tilde{T}$ liegt. Man wähle sich nun eine glatte Funktion $\kappa : \tilde{T} \to [0,1]$, mit folgenden Eigenschaften. Für alle x aus einer genügend kleinen offenen Umgebung von S in $\tilde{T}$ sei $\kappa(x) = \kappa(\pi_1(x))$. Der Träger von κ soll in V liegen, und auf einer offenen Umgebung $V' \subset V$ von Z soll $\kappa_{|V'} = 1$ gelten. Dann definiere man:

$$F_{t,0}(x) = \exp\big(\kappa(x) \exp_x^{-1}(G_{t,0}(x))\big), \qquad x \in \tilde{T},\ t \in [0,1]. \tag{3.5.4}$$

Von jetzt an müssen wir die beiden Fälle der Behauptung gesondert betrachten.

zu (TU1): In diesem Fall zeigen wir zuerst, daß nach geeigneter Einschränkung von T und $\tilde{T}$ die Abbildungen $F_{t,0} : \tilde{T} \to \mathbb{R}^n$ Diffeomorphismen auf ihr Bild darstellen. Dazu genügt es wegen Lemma 3.1.7 nachzuweisen, daß für jedes $x \in S$ die Ableitungen $DF_{t,0}(x)$ bijektiv sind. Da $F_{t,0|S} = \mathrm{id}_S$ gilt, wirkt die Ableitung $DF_{t,0}(x)$ auf Tangentialvektoren $v \in T_xS$ als Identität. Falls jedoch $v \in \ker T_x\pi_1$, so folgt

$$DF_{t,0}(x).v = (1 - \kappa(x))\, v + \kappa(x) DG_{t,0}(x).v$$

Da der Operator $DG_{t,0}(x)$ wie oben erwähnt nur positive Eigenwerte besitzt, folgt die behauptete Invertierbarkeit der Ableitung. Nach nochmaliger Einschränkung von T ist schließlich

$$H : T \times [0,1] \to M,\ (x,t) \mapsto (F_{t,0} \circ G_0)(x) \tag{3.5.5}$$

wohldefiniert, und stellt eine mit f kompatible $\mathcal{C}^m$-Isotopie von T nach M dar. Die Kompatibilität von H mit f ergibt sich dabei aus (3.5.1) und (3.5.3). Da der Träger von κ in V liegt, muß auch $\operatorname{supp} H \subset V$ gelten. Da zudem κ so gewählt wurde, daß $\kappa_{|V'} = 1$, gilt nach eventueller Verkleinerung der Umgebung V' von Z die Beziehung $H_t(x) = G_t(x)$ für $x \in V'$, also

$$\varphi_1^{-1} \circ h\,(x) = \varphi_1^{-1} \circ G_1\,(x) = \psi \circ \varphi_0^{-1}\,(x), \qquad x \in V'.$$

Über der oben definierten Menge U' gilt andererseits $G_t(x) = x$, woraus folgt

$$H_t(x) = x \quad \text{und} \quad \varphi_1^{-1} \circ h\,(x) = \varphi_1^{-1}(x) = \psi \circ \varphi_0^{-1}\,(x), \qquad x \in U'.$$

Insgesamt ergibt sich somit, daß $\psi_{|A \cup Z} : h_*(T_0)_{|A\cup Z} \to T_{1|A\cup Z}$ ein Isomorphismus tubularer Umgebungen ist. Nach Konstruktion ist $\psi_{|A} = \tilde{\psi}$, womit wir auch den letzten Teil der Behauptung (TU1) für den Fall $M = \mathbb{R}^n$ erhalten.

zu (TU2): Wir betrachten die eben konstruierte Isotopie H und wollen zeigen, daß die in der Konstruktion involvierten Abbildungen $G_{t,s}$, κ und exp temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$ sind. Aus der Darstellung (3.5.5) der Isotopie H ergibt sich dann unmittelbar die Behauptung, daß auch H temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$ sein muß.

Die Christoffel-Symbole $\Gamma_{ij}^k = \langle e_k, \nabla_{e_i} e_j\rangle$ sind temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$, da P^f krümmungsmoderat von der Ordnung $m+1$ ist, und die $\nabla_{e_i} e_j$ mittels der Gleichung (3.5.2) definiert werden. Aufgrund von Proposition 3.3.10 sind nach geeigneter Einschränkung von T die Funktionen exp und $\exp^{-1}$ also relativ ∂S temperiert von der Klasse $\mathcal{C}^m$. Desweiteren ist es unter Verwendung von Lemma 1.7.10 ein Leichtes einzusehen, daß die Funktion κ so konstruiert werden kann, daß sie eine relativ ∂S temperierte Funktion der Klasse $\mathcal{C}^m$ darstellt. Während all dieser Konstruktionen ist zu beachten, daß T als regulär situierte Umgebung von S gewählt werden kann.

Zum Nachweis der Behauptung bleibt folglich wegen $H(x,t) = F_{t,0}(G_0(x))$ und (3.5.4) nur noch zu zeigen, daß die Komponenten der Einbettungen $G_0 : T \to M$ und $G_{t,0} : \tilde{T} \to T$ relativ ∂S temperiert von der Klasse $\mathcal{C}^m$ sind. Um dies zu erreichen, stellen wir die Vektorbündel-Isomorphismen $\xi : E_0 \to E_1$ und $\zeta : E_1 \to E_1$ mit Hilfe von lokalen Orthogonalrahmen in Matrixform dar, woraus sich die Temperiertheit der zugehörigen Matrixfunktionen und dann von G_0 und $G_{t,0}$ unmittelbar ablesen läßt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir jeweils das Vektorbündel E_i, $i = 0, 1$, mit einem zu TS normalen

Untervektorbündel von $T_{|S}M$ identifizieren; die Identifikation erfolgt dabei wie in 3.1.8 (1) mittels der eingeschränkten Tangentialabbildung $T_{|E_i}\varphi_i : E_i \to TM$. Als nächstes lege man folgendermaßen zwei Riemannsche Metriken auf T fest:

$$\mu_{i,x}(v,w) = \eta_{i,\pi_i(x)}(T_x\varphi_i^{-1}.Q_{i,x}.v, T_x\varphi_i^{-1}.Q_{i,x}.w) + \langle P_{i,x}.v, P_{i,x}.w\rangle, \quad x \in \mathrm{T},\ v,w \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5.6}$$

Dabei bezeichnet η_i das Skalarprodukt auf E_i, und $Q_{i,x}$ die Projektion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - P_{i,x}$. Zusätzlich setze man noch $\mu_{\mathrm{E}} = \langle\cdot,\cdot\rangle$.

Wählt man nun um einen Punkt von ∂S eine Kugel B mit genügend kleinem Radius < 1, so erzeugen die drei Riemannschen Metriken μ_i, $i \in \{0, 1, \mathrm{E}\}$ gemäß Proposition 3.3.12 lokalendliche abzählbare Familien $(\phi_j)_{j\in J}$ und $(f^i_{jl})_{j\in J, 1\le l\le n}$ von Funktionen bzw. Schnitten auf T derart, daß die Paare (ϕ_j), (f^i_{jl}) jeweils 3.3.12 (1) bis (5) erfüllen. Insbesondere stellt also für jedes feste j das n-Tupel $(f^i_{j1}, \cdots, f^i_{jn})$ einen μ_i-Orthogonalrahmen über der Menge $\phi_j \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{T}$ dar. Bezüglich dieser Orthogonalrahmen konstruieren wir matrixwertige Abbildungen $a^i_j : \mathrm{T} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, $i = 0,1$, die die Vektorbündel-Isomorphismen ξ_i über $\mathrm{supp}\,\phi_j \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{T}$ repräsentieren. Genauer setzen wir für $x \in \mathrm{supp}\,\phi_j \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{T}$

$$a^i_{j,kl}(x) = \frac{\left\langle f^{\mathrm{E}}_{j(k+\dim S)}(x), f^i_{j(l+\dim S)}(x)\right\rangle}{\|f^{\mathrm{E}}_{j(k+\dim S)}(x)\|_{\mu_{\mathrm{E}}}\,\|f^i_{j(l+\dim S)}(x)\|_{\mu_i}}, \qquad k,l = 1,\cdots, n-\dim S,$$

und dehnen die so definierte matrixwertige Funktion a^i_j zu einer $\mathcal{C}^m$-Funktion auf der tubularen Umgebung T aus. Aufgrund von 3.3.12 (4) und weil die Riemannschen Metriken μ_0, μ_1 und μ_{E} nach (KM7) krümmungsmoderat von der Ordnung m sind, existieren Konstanten $d, d_m \in \mathbb{N}$ und $D, D_m > 0$ derart, daß für alle $j \in J$, $i = 0,1$

$$\begin{aligned} \frac{d(x,\partial S)^d}{D} \le \|a^i_j(x)\| &\le D\left(1 + \frac{1}{d(x,\partial S)^d}\right), \qquad x \in \mathrm{supp}\,\phi_j \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{T},\\ \|\partial^\alpha a^i_j(x)\| &\le D_m\left(1 + \frac{1}{d(x,\partial S)^{d_m}}\right), \qquad |\alpha| \le m. \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Folglich kann man sich $\mathcal{C}^m$-Funktionen $\overline{a}^j_i : \mathrm{T} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft konstruieren, daß $\overline{a}^j_i(x)$ für $x \in \mathrm{supp}\,\phi_j \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{T}$ invers zu a^i_j ist, und so daß nach eventueller Vergrößerung der Konstanten d, d_m, D, D_m auch folgende Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} \frac{d(x,\partial S)^d}{D} \le \|\overline{a}^i_j(x)\| &\le D\left(1 + \frac{1}{d(x,\partial S)^d}\right), \qquad x \in \mathrm{supp}\,\phi_j \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{T},\\ \|\partial^\alpha \overline{a}^i_j(x)\| &\le D_m\left(1 + \frac{1}{d(x,\partial S)^{d_m}}\right), \qquad |\alpha| \le m. \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Der Vektorbündel-Isomorphismus ξ kann nun mit Hilfe der a^j_j und $\overline{a}^j_j$ in der folgenden Form geschrieben werden, wobei $v \in E_{0,x}$ und $x \in S$,

$$\xi_x v = \sum_{j\in J} \phi_j(x) \sum_{l,m,k=0}^{n-\dim S} \overline{a}^1_{j,lm}(x)\, a^0_{j,mk}(x)\, \frac{\mu_0\big(v, f^0_{j(k+\dim S)}(x)\big)}{\|f^0_{j(k+\dim S)}(x)\|_{\mu_0}}\, \frac{f^1_{j(l+\dim S)}(x)}{\|f^1_{j(l+\dim S)}(x)\|_{\mu_1}}. \tag{3.5.9}$$

Aus dieser Darstellung, Proposition 3.3.12 sowie den Abschätzungen (3.5.7) und (3.5.8) folgt, daß für $k = 1,\cdots,n$ die Funktionen $\mathrm{T} \ni x \mapsto \xi_{\pi_0(x)} Q_{0,\pi_0(x)} e_k \in \mathbb{R}^n$ temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$ sind. Zieht man noch die Tatsache heran (siehe 3.1.8 (3)), daß die Abbildung φ_i durch die Exponentialfunktionen des Levi–Civita-Zusammenhangs von μ_i gegeben ist, und benutzt Proposition 3.3.10, so folgt, daß

$$G_1 : T \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \varphi_1 \circ \xi_{\pi_0(x)} \circ \varphi_0^{-1}(x)$$

relativ ∂S temperiert ist.

Als nächstes gilt es, die Temperiertheit relativ ∂S der Funktionen

$$T \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \zeta_{\pi_1(x)} Q_{1,\pi_1(x)} e_k$$

nachzuweisen. Aufgrund der Polarzerlegung A.2.1 gilt $\zeta_x = \sqrt{\xi_x \, \xi_x^*}$, $x \in S$, folglich ergibt sich aus der Analytizität der Wurzelfunktion

$$\left\| \partial_l \big(\zeta_{\pi_1(\cdot)} Q_{1,\pi_1(\cdot)} e_k \big)(x) \right\| \leq \frac{1}{2} \, \frac{\left\| \partial_l \big(\xi_{\pi_1(\cdot)} Q_{1,\pi_1(\cdot)} e_k \big)(x) \right\|}{\left\| \zeta_{\pi_1(x)} \right\|}, \quad k, l = 1, \cdots, n \tag{3.5.10}$$

sowie eine entsprechende Abschätzung für jede höhere partielle Ableitung. Genauer gesagt ist $\partial^\alpha \big(\zeta_{\pi_1(\cdot)} Q_{1,\pi_1(\cdot)} e_k \big)(x)$ durch eine Summe von Quotienten gegeben, die im Zähler die höheren Ableitungen von $\xi_{\pi_1(\cdot)} Q_{1,\pi_1(\cdot)}$ (multipliziert mit kombinatorischen Faktoren) enthalten, und im Nenner Potenzen von $\| \zeta_{\pi_1(x)} \|$, beide jedoch nur bis zur höchsten Ordnung $|\alpha|$. Wegen (3.5.7), (3.5.8) und der Darstellung (3.5.9) gibt es andererseits Konstanten $d' \in \mathbb{N}$ und $D' > 0$ mit

$$\frac{d(x, \partial S)^{d'}}{D'} \leq \| \zeta_x \| \leq D' \left(1 + \frac{1}{d(x, \partial S)^{d'}} \right), \qquad x \in T.$$

Zusammen mit 3.5.10 und der Temperiertheit von $\xi_{\pi_1(\cdot)} Q_{1,\pi_0(\cdot)}$ impliziert diese Ungleichung schließlich, daß auch die sich aus $\zeta_{\pi_1(\cdot)} Q_{1,\pi_1(\cdot)} e_k$ und $\zeta_{\pi_1(\cdot)}^{-1} Q_{1,\pi_1(\cdot)} e_k$ ergebenden Funktionen über T relativ ∂S temperiert sein müssen. Genau wie für G_1 schließt man daraus, daß

$$G_{t,0}(x) = \big(\varphi_1 \circ ((1-t)\mathrm{id} + t\zeta^{-1}) \circ \varphi_1^{-1} \big)(x), \qquad x \in T,$$

temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$ ist. Damit ist der Nachweis der Behauptung (TU2) im lokalen Fall vollzogen.

2. Schritt Der Nachweis der Behauptung im allgemeinen Fall ergibt sich, indem man die Mannigfaltigkeit M zuerst abgeschlossen in einen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ einbettet und dann den eben gezeigten Fall anwendet. Man betrachte dazu die durch das Euklidische Skalarprodukt induzierte tubulare Umgebung $T_M = (E_M, \varepsilon_M, \varphi_M)$ von M in $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung f kann man dann in kanonischer Weise auf T_M derart ausdehnen, daß $f(\pi_M(x)) = f(x)$ für alle $x \in T_M$ gilt. Desweiteren geht man von den Vektorbündeln E_i, $i = 0, 1$ über zu $E_i' := E_i \oplus E_{M|S}$ und definiert nach eventueller Verkleinerung der ε_i Einbettungen $\varphi_i' : T^{\varepsilon_i}_{S \subset E_i'} \to \mathbb{R}^n$ durch $\varphi_i'(v, w) = w + \varphi_i(v)$. Dadurch erhält man zwei tubulare Umgebungen $T_i' = (E_i', \varepsilon_i, \varphi_i')$ von S in $\mathbb{R}^n$. Zudem induziert $\tilde{\psi}$ einen Vektorbündel-Isomorphismus $\tilde{\psi}' : E'_{0|U} \to E'_{1|U}$ durch $(v, w) \mapsto (\tilde{\psi}(v), w)$, und $\tilde{\psi}' : T'_{0|U} \to T'_{1|U}$ wird zu einem Isomorphismus tubularer Umgebungen. Faßt man nun alle Daten zusammen, so erkennt man, daß durch T_0', T_1' und f die Voraussetzungen für den im ersten Schritt betrachteten Fall gegeben sind; das gilt übrigens auch für den krümmungsmoderaten Fall (TU2). Also erhalten wir erstens einen unitären Vektorbündel-Isomorphismus

$\psi' : E_0' \to E_1'$, wobei aufgrund der Konstruktion klar ist, daß die Einschränkung von ψ' auf $E_{M|S}$ gleich der identischen Abbildung ist, und daß ψ' das Bündel E_0 auf E_1 abbildet. Zweitens erhalten wir eine Isotopie $H' : T' \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, deren Komponenten durch (3.5.4) definiert ist, und wobei $T' \subset T_M$ eine geeignete tubulare Umgebung von S in $\mathbb{R}^n$ ist. Die in (3.5.4) enthaltene Funktion κ kann offensichtlich so gewählt werden, daß $\kappa(\pi_M(x)) = \kappa(x)$ für alle $x \in \tilde{T}'$, wobei $\tilde{T}' \subset T_M$ eine weitere tubulare Umgebung von S in $\mathbb{R}^n$ ist. Die ebenfalls in (3.5.4) auftauchende Exponentialfunktion sei bezüglich des folgenden Zusammenhangs definiert:

$$(\nabla_v w)(x) = \quad P^f_y(D(P^f_y w).v) + Q^f_y(D(Q^f_y w).v) + Q_{M,y}(D(Q_{M,y} w).v),$$
$$v, w \in \mathcal{X}^{m+1}(\tilde{T}'),\ \ x \in \tilde{T},\ \ y = \pi_M(x).$$

Dabei bedeutet Q_M die Projektion auf das Vertikalbündel der tubularen Umgebung T_M, P^f_x für $x \in M$ die Euklidische Projektion von T_xM auf $\ker T_x f$ und Q^f_x den Endomorphismus $\mathrm{id}_{T_xM} - P^f_x$. Diese Definition von ∇ garantiert, daß $\exp v$ für $v \in T_xM$ in M liegt und daß $\exp_x^{-1}(y) \in T_xM$ gilt für $x, y \in M$ genügend nahe. Im krümmungsmoderaten Fall sind die Christoffelsymbole von ∇ zudem krümmungsmoderat. Insgesamt folgt aus der Definition der tubularen Umgebungen T_i', den genannten Eigenschaften von ξ', κ und H' die Tatsache, daß $\pi_M(H'(x,t)) = H'(\pi_M(x,t))$ für alle $x \in T'$ und $t \in [0,1]$. Nun können wir die "ungestrichenen" Größen festlegen: Der Vektorbündel-Isomorphismus $\psi : E_0 \to E_1$ ist durch $\psi(v) = \pi_{E_1}(\psi'(v,0))$, $v \in E_0$ gegeben, wobei $\pi_{E_1} : E_1' = E_1 \oplus E_{M|S} \to E_1$ die kanonische Projektion ist. Die Isotopie $H : T \times [0,1] \to M$ erhält man durch die Festlegungen $T := T' \cap M$ und $H(x,t) := H'(x,t)$ für $x \in T$, $t \in [0,1]$. Nach Konstruktion erfüllen ψ und H die Behauptung (TU1). Da alle im 2. Schritt durchgeführten Konstruktionen keinen Einfluß auf eventuelles krümmungsmoderate Verhalten haben, gilt im krümmungsmoderaten Fall auch die Behauptung (TU2). Das war zu zeigen. □

3.5.3 Existenz tubularer Umgebungen *Sei* $m \in \mathbb{N}^{>0}$, S *eine Untermannigfaltigkeit von* M *der Klasse* $\mathcal{C}^{m+2}$ *und* $f : M \to N$ *eine über* S *submersive* $\mathcal{C}^{m+2}$*-Abbildung. Sei weiter* $U \subset S$ *offen relativ* S, $A \subset U$ *abgeschlossen relativ* S, *und* T_0 *eine mit* $f_{|U}$ *kompatible tubulare Umgebung von* U *in* M. *Unter diesen Voraussetzungen gelten die folgenden Aussagen.*

(TU3) *Es existiert eine mit* f *kompatible tubulare Umgebung* T *von* S *in* M *derart, daß* $T_{|A} \sim T_{0|A}$. *Gilt* $\overline{\pi_0^{-1}(U')} \cap S = U'$ *für eine in* S *abgeschlossene Umgebung* $U' \subset U$ *von* A, *dann können* T *und der Isomorphismus* $(\psi, \delta) :\ T_{|A} \to T_{0|A}$ *sogar so gewählt werden, daß* $\varepsilon_{|A} = \varepsilon_{0|A} = \delta$. (*vgl.* Mather [113, Prop. 6.2])

(TU4) *Falls* T_0 *eine regulär situierte Umgebung von* A *ist,* S *und* T_0 *beide krümmungsmoderat von der Ordnung* $m+1$ *sind, und falls* f *eine von der Ordnung* $m+1$ *stark krümmungsmoderate Submersion ist, dann kann die tubulare Umgebung* T *krümmungsmoderat von der Ordnung* m *gewählt werden.*

Beweis: zu (TU3): Zum Nachweis des ersten Teils der Behauptung sei eine offene Umgebung T von S in M gewählt, in der S abgeschlossen liegt, und eine beliebige Riemannsche Metrik θ der Klasse $\mathcal{C}^{m+1}$ auf M. Durch geeignete Einschränkung von T kann erreicht werden, daß die projektionswertige Abbildung $P^f : T \to \mathrm{End}(TM)$ auf das Kernbündel von $\mathrm{T}f$ von der Klasse $\mathcal{C}^{m+1}$ ist; die Projektion P^f_x wird dabei als selbstadjungiert bezüglich θ_x angenommen. Einen weitere projektionswertige $\mathcal{C}^{m+1}$-Abbildung $P^\theta : \mathrm{T} \to \mathrm{End}(TM)$ erhält man (nach eventueller nochmaliger Einschränkung von T) aus der von θ induzierten tubularen Umgebung $T^\theta = (E^\theta, \varepsilon^\theta, \varphi^\theta)$ um S; diese Abbildung ordnet bekanntlich jedem $x \in \mathrm{T}$ die θ-Orthogonalprojektion auf den Horizontalraum von T^θ zu. Als letzte projektionswertige Abbildung sei $P^{f,\theta} : \mathrm{T} \to \mathrm{End}(TM)$ die θ-Orthogonalprojektion auf das Kernbündel von $P^f - P^\theta$. Nach eventueller nochmaliger Einschränkung von T ist $P^{f,\theta}$ auch wohldefiniert und von der Klasse $\mathcal{C}^{m+1}$. Setzt man dann $Q^{f,\theta}_x = P^f_x - P^{f,\theta}_x$, so ist wegen der Submersivität von $f_{|S} : S \to N$ das Bild von $Q^{f,\theta}_x$ komplementär in T_xM zu $\mathrm{im}\, P^\theta_x$. Folglich gibt es für jedes $x \in \mathrm{T}$ eine positiv definite Abbildung $A_x \in \mathrm{End}(TM)$, so daß $A_x(\mathrm{im}\, P^\theta_x) = \mathrm{im}\, P^\theta_x$ und $A_x(\mathrm{im}\, Q^{f,\theta}_x) = \mathrm{im}\, Q^\theta_x$, wobei $Q^\theta_x = \mathrm{id}_{T_xM} - P^\theta_x$. Offensichtlich kann $A : \mathrm{T} \to TM$ als $\mathcal{C}^m$-Schnitt gewählt werden. Durch folgende Vorschrift erhält man eine zweite Riemannsche Metrik μ auf T:

$$\mu_x(v, w) = \theta(A_x v, A_x w) \qquad v, w \in T_xM, \quad x \in \mathrm{T}.$$

Bezüglich μ stehen $\mathrm{im}\, P^\theta_x$ und $\mathrm{im}\, Q^{f,\theta}_x$ dann orthogonal aufeinander. Unter $N \to S$ verstehen wir nun das μ-Orthogonalbündel von TS in $T_{|S}M$, unter exp die Exponentialfunktion des Levi-Civita-Zusammenhangs von μ, und unter $\mathrm{T}^{\max}_{S\subset N}$ die in Abschnitt 3.2 definierte Umgebung des Nullschnitts von N. Nach Definition von μ liegt dann für jeden Vektor $v \in N_x \cap \mathrm{T}^{\max}_{S\subset N}$, $x \in S$ der Tangentialvektor $\dot\gamma(t)$ zur Kurve $\gamma(t) = \exp(tv)$, $t \in [0,1]$ in $Q^{f,\theta}_{\gamma(t)} T_{\gamma(t)}M$. Also muß

$$f(\exp(tv)) = f(x), \qquad v \in N_x \cap \mathrm{T}^{\max}_{S\subset N},\ x \in S,$$

für alle $t \in [0,1]$ gelten. Folglich stellt das Tripel $\check{T} = (N, \varepsilon^{\max}, \varphi)$ eine mit f kompatible tubulare Umgebung von S in M dar, wobei φ wie in 3.2 als die Einschränkung $\exp_{|\mathrm{T}^{\max}_{S\subset N}}$ definiert ist. Sei $V \subset \check{\mathrm{T}} := \exp(\mathrm{T}^{\max}_{S\subset N})$ eine offene Umgebung von A derart, daß V in $\pi_0^{-1}(U) \cap \check{\mathrm{T}}$ liegt. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für tubulare Umgebungen gibt es nach Einschränkung von $\check{\mathrm{T}}$ eine Einbettung $h : \check{\mathrm{T}} \to M$ mit Träger in V, so daß $h_{|S} = \mathrm{id}_{|S}$ und $(h_*\check{T})_{|A} \sim T_{0|A}$. Somit genügt $T := h_*\check{T}$ dem ersten Teil der Behauptung von (TU3).

Nun zum zweiten Teil. Unter der Voraussetzung, daß $U' \subset U$ eine abgeschlossene Umgebung von A in S ist, die die Bedingung $\overline{\pi_0^{-1}(U')} \cap S = U'$ erfüllt, wähle man sich weitere abgeschlossene Umgebungen V, W und W' von A in S mit

$$A \subset V^\circ \subset V \subset U'^\circ \subset U' \subset W^\circ \subset W \subset W'^\circ \subset W' \subset U.$$

Nach dem ersten Teil existiert eine tubulare Umgebung $\tilde{T} = (\tilde{E}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\varphi})$ von S in M und ein Isomorphismus $\tilde{T}_{|W'} \sim_{(\psi,\tilde{\delta})} T_{0|W'}$. Aufgrund der Voraussetzung an U' findet man eine offene Umgebung O von $S \setminus U'$ in M mit $\pi_0^{-1}(V) \cap O = \emptyset$; man setze zum Beispiel $O := M \setminus \overline{\pi_0^{-1}(U')}$. Aufgrund der Voraussetzungen an die Umgebungen V, U', W und W' ist es möglich, eine $\mathcal{C}^m$-Abbildung $\varepsilon : S \to \mathbb{R}^{>0}$ derart zu konstruieren, daß

$$\varepsilon_{|U} \le \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{|A} = \varepsilon_{0|A}, \quad \varepsilon_{|W\setminus V} \le \tilde{\delta}_{|W\setminus V}, \quad \varepsilon_{|S\setminus V} \le \tilde{\varepsilon}_{|S\setminus V} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathrm{T}}^\varepsilon_{S\setminus W} \subset O.$$

Die Abbildung $\varphi : \mathrm{T}^\varepsilon_{S\subset\tilde{E}} \to M$ wird nun dadurch festgelegt, daß man φ über der Menge $\pi_{\tilde{E}}^{-1}(U') \cap \mathrm{T}^\varepsilon_{S\subset\tilde{E}}$ gleich $\varphi_0 \circ \psi$ setzt, und über $\pi_{\tilde{E}}^{-1}(S\setminus V) \cap \mathrm{T}^\varepsilon_{S\subset\tilde{E}}$ mit der Einschränkung von $\tilde{\varphi}$

identifiziert. Aufgrund der Konstruktion sieht man leicht, daß dieses φ wohldefiniert und injektiv ist. Folglich erfüllt das Tripel $\mathsf{T} = (\tilde{\mathsf{E}}, \varepsilon, \varphi)$ zusammen mit dem Isomorphismus $(\psi_{|A}, \varepsilon_{|A})$ den zweiten Teil der Behauptung (TU3).

zu (TU4): Sobald die Voraussetzungen von (TU4) gegeben sind, müssen P^θ (da S, θ krümmungsmoderat) und $P^{f,\theta}$ (da f stark krümmungsmoderat) von der Ordnung $m+1$ krümmungsmoderate projektionswertige Schnitte sein; insbesondere ist der gemeinsame Definitionsbereich T von P^θ und $P^{f,\theta}$ eine regulär situierten Umgebung von S. Da zudem θ eine auf ganz M definierte Riemannsche Metrik darstellt, muß die Riemannsche Metrik μ von der Ordnung $m+1$ krümmungsmoderat sein. Folglich ist die von μ induzierte tubulare Umgebung T von der Ordnung m krümmungsmoderat. Aufgrund der Tatsache, daß T_0 eine regulär situierte Umgebung von A ist, und der Gültigkeit von (TU2) aus dem Eindeutigkeitssatzes kann man erreichen, daß die oben gewählte Einbettung $h : T \to M$ temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$ ist. Folglich ist $\mathsf{T} = h_* \check{\mathsf{T}}$ krümmungsmoderat von der Ordnung m, genügt im krümmungsmoderaten Fall also auch der Behauptung (TU4). Das war zu zeigen. □

3.6 Tuben und Kontrolldaten

3.6.1 Sei $(X, \mathcal{S})$ ein stratifizierter Raum, und $S \in \mathcal{S}$ eines seiner Strata. Unter einer mit $\mathcal{S}$ kompatiblen *Tube* von S versteht man ein Tripel $\mathsf{T}_S = (T_S, \pi_S, \rho_S)$ das folgenden Bedingungen genügt:

(TB1) T_S ist eine offene Umgebung von S in X derart, daß für jedes weitere Stratum $R \in \mathcal{S}$ aus der Gültigkeit von $T_{S,R} := T_S \cap R \neq \emptyset$ die Beziehung $R \geq S$ folgt.

(TB2) $\pi_S : T_S \to S$ ist eine stetige Retraktion von S, so daß für jedes Stratum $R > S$ die Einschränkung $\pi_{S,R} := \pi_{S|T_{S,R}} : T_{S,R} \to S$ glatt ist.

(TB3) $\rho_S : T_S \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist eine stetige Abbildung, so daß $\rho_S^{-1}(0) = S$ erfüllt, und für jedes Stratum $R > S$ die Einschränkung $\rho_{S,R} := \rho_{S|T_{S,R}} : T_{S,R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ glatt ist.

(TB4) Die Abbildung $(\pi_{S,R}, \rho_{S,R}) : T_{S,R} \to S \times \mathbb{R}^{>0}$ ist für jedes Paar von Strata $R > S$ eine Submersion.

3.6.2 Lemma *Besitzt das Stratum S eine mit $\mathcal{S}$ kompatible Tube, so ist $\pi_{S,R} : T_{S,R} \to S$ surjektiv und $\dim R > \dim S$ für alle $R > S$.*

BEWEIS: Die Surjektivität folgt sofort aus $S \subset \overline{R}$ und (TB1). Die Dimensionsaussage ist eine unmittelbare Konsequenz aus (TB4). □

3.6.3 Beispiel Sei X ein stratifizierter Unterraum einer Mannigfaltigkeit M, so daß X von M eine $\mathcal{C}^m$-Struktur erbt, und T_S eine tubulare Umgebung der Klasse $\mathcal{C}^m$ um das Stratum S. Im Falle, daß X Whitney-stratifiziert ist, definiert nach eventueller Verkleinerung von T_S gemäß Proposition 3.4.1 das Tripel (T_S, π_S, ρ_S) eine Tube von S in X, die wir mit dem Buchstaben T notieren. Wir sagen in diesem Fall, die Tube sei von der *Klasse* $\mathcal{C}^m$ und von einer tubularen Umgebung *induziert* oder auch, sie sei *normal* von der *Klasse* $\mathcal{C}^m$.

Die Bezeichnung T sowohl für die tubulare Umgebung von S in M als auch die Tube von S in X führt in der Regel zu keinen Verwechslungen, vereinfacht vielmehr die Notation.

Falls der stratifizierte Raum $(X, \mathcal{S})$ eine glatte Struktur $\mathcal{C}^\infty$ trägt, so sagen wir, eine Tube $T_S = (T_S, \pi_S, \rho_S)$ sei *normal* von der *Klasse* $\mathcal{C}^m$, falls das folgende Axiom erfüllt ist:

(TB5) Es gibt eine Überdeckung von S durch singuläre Karten $x : U \to \mathbb{R}^n$ von X, so daß π_S und ρ_S durch tubulare Umgebungen T^x der Klasse $\mathcal{C}^m$ um $x(S \cap U)$ in $\mathbb{R}^n$ induziert sind, das heißt es gilt

$$\pi^x \circ x = x \circ \pi_{S|U},$$
$$\rho^x \circ x = \rho_{S|U},$$

wobei π^x die Projektion und ρ^x die tubulare Funktion von T^x ist.

In diesem Fall sind die Funktionen π_S und ρ_S $\mathcal{C}^m$-Abbildungen.

Setzt man voraus, daß T_S eine Tube um S normal von der Klasse $\mathcal{C}^m$ ist, so heißt T_S *krümmungsmoderat* von der *Ordnung* m, falls folgendes gilt:

(TB6) Es gibt eine Überdeckung von S durch singuläre Karten $x : U \to \mathbb{R}^n$ von X, so daß T_S durch die tubularen Umgebungen T^x von $x(S \cap U)$ in $\mathbb{R}^n$ induziert wird und jede der T^x krümmungsmoderat Ordnung m ist.

Zwei Tuben T_S und $\tilde{T}_S$ von S heißen *äquivalent* über der Menge $U \subset S$, in Zeichen $T_{|U} \sim \tilde{T}_{|U}$, falls folgendes gilt:

(TB7) Es gibt eine Umgebung $T'_U \subset T_S \cap \tilde{T}_S$ von U, so daß

$$\pi_{S|T'_U} = \tilde{\pi}_{S|T'_U},$$
$$\rho_{S|T'_U} = \tilde{\rho}_{S|T'_U}.$$

Man prüft nun leicht nach, daß die Äquivalenz von Tuben tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Tuben von S in X darstellt.

3.6.4 Ein *Kontrolldatum* für den stratifizierten Raum $(X, \mathcal{S})$ besteht aus einer Familie $(T_S)_{S \in \mathcal{S}}$ von Tuben $T_S = (T_S, \pi_S, \rho_S)$ derart, daß für jedes Paar von Strata $R > S$ und alle $x \in T_S \cap T_R$ mit $\pi_R(x) \in T_S$ die folgenden *Kontrollbedingungen*

(KB1) $$\pi_S \circ \pi_R(x) = \pi_S(x),$$

(KB2) $$\rho_S \circ \pi_R(x) = \rho_S(x)$$

erfüllt sind. Ein stratifizierter Raum, auf dem ein Kontrolldatum existiert, heißt *kontrollierbarer* Raum.

Trägt $(X, \mathcal{S})$ zudem eine $\mathcal{C}^m$-Struktur, und sind alle Tuben des Kontrolldatums normal, so heißt $(T_S)_{S \in \mathcal{S}}$ *normales Kontrolldatum* der *Klasse* $\mathcal{C}^m$. Ein normales Kontrolldatum $(T_S)_{S \in \mathcal{S}}$ heißt *krümmungsmoderat* von der *Ordnung* m, falls für jedes Stratum S die zugehörige Tube T_S krümmungsmoderat von der Ordnung m ist.

Zwei Kontrolldaten $(T_S)_{S \in \mathcal{S}}$ und $(\tilde{T}_S)_{S \in \mathcal{S}}$ zu einem stratifizierten Raum $(X, \mathcal{S})$ werden *äquivalent* genannt, falls für jedes Stratum $S \in \mathcal{S}$ die Tuben T_S und $\tilde{T}_S$ äquivalent über

S sind. Ein stratifizierter Raum $(X, \mathcal{S})$ zusammen mit einer Äquivalenzklasse von Kontrolldaten heißt *kontrollierter* (*stratifizierter*) *Raum*, die entsprechende Äquivalenzklasse *Kontrollstruktur* von X.

Ein *Morphismus* zwischen kontrollierten Räumen X und Y ist durch eine sogenannte *kontrollierte Abbildungen* gegeben, das heißt eine stetige Abbildung $f : X \to Y$, die zugleich ein Morphismus stratifizierter Räume ist, und für die Kontrolldaten $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ und $(T_R)_{R\in\mathcal{R}}$ von $(X, \mathcal{S})$ bzw. $(Y, \mathcal{R})$ mit folgender Eigenschaft existieren: Für jede Zusammenhangskomponente S_0 eines Stratums $S \in \mathcal{S}$ gilt $f(T_{S_0}) \subset T_{R_{S_0}}$, wobei $T_{S_0} := \pi_S^{-1}(S_0)$ ist und R_{S_0} das Stratum aus $(Y, \mathcal{R})$ mit $f(S_0) \subset R_{S_0}$, und für alle $x \in T_{S_0}$ sind die Bedingungen

$$\text{(KB3)} \qquad f \circ \pi_S(x) = \pi_{R_S} \circ f(x),$$

$$\text{(KB4)} \qquad \rho_S(x) = \rho_{R_S} \circ f(x)$$

erfüllt. Gilt für f und geeignete Kontrolldaten nur die Bedingung (KB3), so heißt f *schwach kontrolliert*. Sind alle Einschränkungen $f_{|S_0} : S_0 \to R_{S_0}$ für eine kontrollierte Abbildung $f : X \to Y$ submersiv (bzw. immersiv), so sagt man auch, f sei eine *kontrollierte Submersion* (bzw. *kontrollierte Immersion*).

Die kontrollierten Räume bilden zusammen mit den kontrollierten Abbildungen als Morphismen eine Kategorie $\mathfrak{Esp}_{\mathfrak{ctr}}$. Versieht man jede Mannigfaltigkeit M mit dem trivialen Kontrolldatum bestehend aus der einzigen Tube $T_M = (M, \mathrm{id}_M, 0)$, so bilden die Mannigfaltigkeiten und $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen eine volle Unterkategorie von $\mathfrak{Esp}_{\mathfrak{ctr}}$.

Stellt $f : X \to M$ eine stratifizierte Abbildung von X in die Mannigfaltigkeit M mit der kanonischen Stratifizierung dar, so heißt ein Kontrolldatum $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ *kompatibel* mit f, falls für jedes Stratum S und alle $x \in T_S$

$$\text{(KB5)} \qquad f \circ \pi_S(x) = f(x).$$

Damit ist die Abbildung f genau dann kompatibel mit $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$, wenn sie einen Morphismus kontrollierter Räume von X nach M darstellt.

3.6.5 Beispiel Sei M eine glatte, berandete Mannigfaltigkeit, und $R = \partial M$ ihr Rand. Wählt man für M einen glatten Kragen $k : R \times [0, 1[\to U \subset M$, so induziert dieser ein Kontrolldatum von M mit seiner natürlichen Stratifizierung in die Mengen $M^\circ = M \setminus R$ und R. Man setze einfach $T_R = U$ und definiere π_R und ρ_R als die eindeutig bestimmten Funktionen, für die

$$k \circ (\pi_R, \rho_R) = \mathrm{id}_U$$

ist. Zusammen mit $T_{M^\circ} = M^\circ$, $\pi_{M^\circ} = \mathrm{id}_{M^\circ}$ und $\rho_{M^\circ} = 0$ erhält man so ein normales Kontrolldatum der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ für M.

3.6.6 Beispiel Sei $f : X \to M$ eine kontrollierte Submersion von einem kontrollierten Raum X in eine Mannigfaltigkeit M, und y ein Punkt von M. Dann erbt die Faser $X_y = f^{-1}(y)$ in natürlicher Weise die Struktur eines kontrollierten Raums von X. Da f nach Voraussetzung eine kontrollierte Submersion darstellt, ist nämlich für jedes Stratum S von X der Schnitt $S_y = f^{-1}(y) \cap S$ eine Untermannigfaltigkeit von S, folglich liefert die Familie $(S_y)_{S\in\mathcal{S}}$ eine Zerlegung und damit eine Stratifizierung von X_y. Wählt man sich anschließend ein mit f kompatibles Kontrolldatum $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ von X, so ergibt sich desweiteren, daß die Familie $(\mathsf{T}_{\mathsf{S}_y})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ der eingeschränkten Tuben $\mathsf{T}_{\mathsf{S}_y} = (\mathsf{T}_\mathsf{S} \cap \mathsf{X}_y, \pi_{\mathsf{S}|\mathsf{T}_\mathsf{S}\cap\mathsf{X}_y}, \rho_{\mathsf{S}|\mathsf{T}_\mathsf{S}\cap\mathsf{X}_y})$ ein Kontrolldatum für X_y sein muß.

3.6.7 Proposition *Sei X ein kontrollierbarer Raum. Dann existiert ein Kontrolldatum $(\mathsf{T}_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ von X mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Falls $\mathsf{R},\mathsf{S} \in \mathcal{S}$ und $\mathrm{T}_\mathsf{S} \cap \mathrm{T}_\mathsf{R} \neq \emptyset$ ist, gilt $\mathsf{R} < \mathsf{S}$, $\mathsf{R} = \mathsf{S}$ oder $\mathsf{R} > \mathsf{S}$.*

(2) *Für jeden Punkt x eines Stratums S gibt es eine offene Umgebung $\mathsf{U} \subset \mathsf{S}$, so daß $\pi_\mathsf{S}^{-1}(\mathsf{U})$ nur mit endlich vielen Tuben T_R, $\mathsf{R} > \mathsf{S}$ nichtleeren Durchschnitt hat.*

(3) *Für jedes Paar von Strata $\mathsf{R} > \mathsf{S}$ folgt aus $x \in \mathrm{T}_\mathsf{R} \cap \mathrm{T}_\mathsf{S}$ die Beziehung $\pi_\mathsf{R}(x) \in \mathrm{T}_\mathsf{S}$.*

(4) *Zu jedem Stratum S gibt es eine glatte Funktion $\varepsilon_\mathsf{S} : \mathrm{T}_\mathsf{S} \to \mathbb{R}^{>0}$ derart, daß $\mathrm{T}_\mathsf{S}^{\varepsilon_\mathsf{S}} = \mathrm{T}_\mathsf{S}$ ist und $(\pi_\mathsf{S}, \rho_\mathsf{S}) : \mathrm{T}_\mathsf{S} \to [0, \varepsilon_\mathsf{S}[$ eine eigentliche surjektive Abbildung.*

Ein solches Kontrolldatum genügt dann auch den folgenden Relationen:

(5) *Für jede Zusammenhangskomponente S_0 eines Stratums S ist das Urbild $\pi_\mathsf{S}^{-1}(\mathsf{S}_0)$ bogenzusammenhängend. Ist S_1 eine zweite, zu S_0 disjunkte Zusammenhangskomponente von S, so sind auch $\pi_\mathsf{S}^{-1}(\mathsf{S}_0)$ und $\pi_\mathsf{S}^{-1}(\mathsf{S}_1)$ zueinander disjunkt.*

(6) *Für jedes Paar von Strata $\mathsf{R} > \mathsf{S}$ ist $(\pi_{\mathsf{S},\mathsf{R}}, \rho_{\mathsf{S},\mathsf{R}}) :\ \mathrm{T}_{\mathsf{S},\mathsf{R}} \to]0, \varepsilon_\mathsf{S}[$ eine differenzierbare Faserung.*

Ein Kontrolldatum, das die Bedingungen (1) bis (4) der Proposition erfüllt, nennen wir ein *eigentliches Kontrolldatum.*

Beweis: Wir zeigen zuerst (1) durch ein Induktionsargument. Sei $(\mathsf{S}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Strata von X, und $(\mathsf{T}_\mathsf{S}^{-1})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ ein Kontrolldatum von X. Nehmen wir nun an, $(\mathsf{T}_\mathsf{S}^k)_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ mit $k \geq -1$ sei durch Einschränkung von $(\mathsf{T}_\mathsf{S}^{-1})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ entstanden und habe die Eigenschaft, daß für alle Strata S_l mit $l \leq k$ und alle Strata R aus der Tatsache, daß S_l und R nicht vergleichbar sind, die Beziehung $\mathrm{T}_{\mathsf{S}_l}^k \cap \mathrm{T}_\mathsf{R}^k = \emptyset$ folgt. Da X lokalkompakt und parakompakt ist, existiert eine lokalendliche Überdeckung $(\mathsf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von S_{k+1} durch in X offene Mengen derart, daß $\overline{\mathsf{U}_n}$ kompakt ist und nur mit Strata $\mathsf{R} \geq \mathsf{S}_{k+1}$ nichtleeren Durchschnitt hat. Dann ist $\mathrm{T}_{\mathsf{S}_{k+1}}^{k+1} = \mathrm{T}_{\mathsf{S}_{k+1}}^k \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{U}_n$ eine offene Umgebung von S_{k+1}. Zudem ist $\mathsf{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathsf{U}_n}$ abgeschlossen, disjunkt zu $\mathrm{T}_{\mathsf{S}_{k+1}}^{k+1}$, und $\mathsf{X} \setminus \mathsf{A}$ enthält alle Strata, die nicht mit S_{k+1} vergleichbar sind. Wir setzen desweiteren $\mathrm{T}_{\mathsf{S}_l}^{k+1} = \mathrm{T}_{\mathsf{S}_l}^k$ für $l < k$ und $\mathrm{T}_{\mathsf{S}_l}^{k+1} = \mathrm{T}_{\mathsf{S}_l}^k \setminus \mathsf{A}$ für $l > k$. Schränkt man nun noch die Funktionen π_S^k und ρ_S^k geeignet ein, so erhält man ein neues Kontrolldatum $(\mathsf{T}_\mathsf{S}^{k+1})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$, das die obige Induktionsvoraussetzung für $k+1$ erfüllt. Die Familie $(\mathsf{T}_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ mit $\mathrm{T}_\mathsf{S} = \mathrm{T}_\mathsf{S}^k$ für $\mathsf{S} = \mathsf{S}_k$ stellt dann ein Kontrolldatum dar, das (1) genügt.

Durch weitere Einschränkung der Tuben erhält man aufgrund von Lemma 3.1.2 sofort ein Kontrolldatum $(\mathsf{T}_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$, das (4) erfüllt. Bei weiterer Einschränkung von $(\mathsf{T}_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ durch Verkleinerung der Funktionen ε_S, was im folgenden des öfteren passieren wird, bleiben (1) und (4) erhalten.

Nun zu (2). Da X lokalkompakt ist und eine abzählbarer Basis der Topologie besitzt, existiert eine Metrik d auf X. Nehmen wir nun an, (2) wäre für keine Einschränkung von $(\mathsf{T}_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ gültig. Dann gibt es ein Stratum S, ein $x \in \mathsf{S}$ und eine Folge paarweise verschiedener Strata R_n mit folgender Eigenschaft: Für jede Umgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von x in S und alle Folgen glatter Funktionen $\varepsilon_n : R_n \to \mathbb{R}^{>0}$ und $\delta_n : S \to \mathbb{R}^{>0}$ gibt es einen Punkt $y_n \in T_{R_n}^{\varepsilon_n} \cap T_S^{\delta_n} \cap \pi_S^{-1}(U_n)$. Wir setzen nun voraus, daß alle U_n in S relativ kompakt sind, und daß $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{x\}$. Als nächstes wählen wir gemäß Lemma 3.1.2 die Funktionen ε_n und δ_n derart, daß

$$T_{R_n}^{\varepsilon_n} \subset B_{\frac{1}{2^n}}(R_n) := \Big\{ y \in T_{R_n} \Big| \, d(y, \pi_{R_n}(y)) < \frac{1}{2^n} \Big\} \quad \text{und} \quad T_S^{\delta_n} \subset B_{\frac{1}{2^n}}(S).$$

Nach dem Beweis von Lemma 3.1.2 bilden die Mengen $T_S^{\delta_n} \cap \pi_S^{-1}(U_x)$ aufgrund der Definition der δ_n und U_n eine Umgebungsbasis von x in X, das heißt die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x. Sei nun $B_r(x)$ die Kugel vom Radius $r > 0$ um x bezüglich der Metrik d. Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, daß $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$ und $y_n \in B_{\frac{r}{2}}(x)$ für alle $n > N$. Nach Definition von y_n und ε_n folgt $\pi_{R_n}(y_n) \in B_r(x)$ für $n > N$, das heißt in $B_r(x)$ liegen unendliche viele paarweise verschiedenen Strata, was einen Widerspruch nach sich zieht. Damit existiert eine Einschränkung von $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$, die wir wieder mit $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ bezeichnen, so daß (2) erfüllt ist.

Zum Nachweis von (3) nehmen wir zuerst an, das Kontrolldatum $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ habe die folgende Eigenschaft:

(3)' Für jedes Paar von Strata $R > S$ gibt es glatte Funktionen $\delta_R : S \to \mathbb{R}^{>0}$ und $\kappa_R : R \to \mathbb{R}^{>0}$ derart, daß $x \in T_R^{\kappa_R} \cap T_S^{\delta_R}$ die Beziehung $\pi_R(x) \in T_S$ nach sich zieht.

Mit Hilfe eines Induktionsarguments konstruieren wir aus $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ dann ein Kontrolldatum, das auch (3) erfüllt. Dazu bezeichnen wir mit S_k die Vereinigung aller k-dimensionalen Strata von X verwenden und bezeichnen, sprachlich leicht mißbräuchlich S_k auch als Stratum von X. Wir nehmen nun an, nach eventueller Einschränkung von $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ gelte (3) für alle Strata S_l mit $l \leq k$ und jedes Stratum $R > S_l$. Wir wählen dann anschließend eine lokalendliche offene Überdeckung $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $S = S_{k+1}$ durch in S offene und relativ kompakte Mengen $U_n \subset\subset S$, so daß nur für endlich viele U_m der Durchschnitt $\pi_S^{-1}(U_m) \cap \pi_S^{-1}(U_n)$ nichtleer ist. Sei weiter $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ untergeordnete glatte Teilung der Eins von S. Für $R > S$ wählen wir nach (3)' glatte Funktionen $\delta_R : S \to \mathbb{R}^{>0}$ und $\kappa_R : R \to \mathbb{R}^{>0}$. Da nach eventueller Verkleinerung der U_n nach (2) nur für endlich viele Strata R der Durchschnitt $T_S \cap T_R \cap \pi_S^{-1}(U_n)$ nichtleer ist, existieren glatte Funktionen $\delta_n : S \to \mathbb{R}^{>0}$ mit $0 < \delta_{n|U_n} < \delta_{R|U_n}$ für alle R mit $T_S \cap T_R \cap \pi_S^{-1}(U_n) \neq \emptyset$. Dann setzen wir

$$d_n = \inf \big\{ \delta_m(x) \big| \, x \in U_m \,\&\, U_n \cap U_m \neq \emptyset \big\} \quad \text{sowie} \quad \delta = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n \, \varphi_n,$$

wobei wir bemerken, daß $d_n > 0$ für alle n. Daraus folgt aber $\delta > 0$ sowie nach Definition $\delta_{|U_n} < (\delta_m)_{|U_n} < (\delta_R)_{|U_n}$ für alle m und R mit $\pi_S^{-1}(U_m) \cap T_R \neq \emptyset$ und $U_m \cap U_n \neq \emptyset$. Nach (3)' impliziert das für alle $x \in T_S^{\delta} \cap T_R^{\kappa_R}$, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_n$ die Beziehung $x \in T_S^{\delta_R} \cap T_R^{\kappa_R}$ richtig ist. Folglich ist $\pi_R(x) \in T_S$, woraus sich nach (KB2) $\rho_S(\pi_R(x)) = \rho_S(x) < \delta(x)$ ergibt, also $\pi_R(x) \in T_S^{\delta}$. Gehen wir nun von T_S zu T_S^{δ} und für alle $R > S$ von T_R zu $T_R^{\kappa_R}$ über, so ist der Induktionsschluß für $S = S_{k+1}$ vollzogen. Da für jedes Stratum S von X nur endlich viele Strata $R > S$ existieren, wird jede Tube T_S nur endlich oft eingeschränkt, das heißt wir erhalten insgesamt ein Kontrolldatum, das (3) erfüllt. Es bleibt jedoch noch (3)' zu zeigen. Genauer gesagt werden wir nachweisen, daß für ein Kontrolldatum $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$, das (1) und (4) erfüllt, auch schon (3)' gilt. Seien $R > S$ zwei Strata von X. Wir wählen dann eine glatte Funktion $\delta_R : S \to \mathbb{R}^{>0}$ mit $\delta_R < \varepsilon_S$ und bestimmen für alle Punkte $y \in R$ eine offene Umgebung $U_y \subset R$ sowie ein glattes $\kappa_y : R \to \mathbb{R}^{>0}$, $\kappa_y < \varepsilon_R$, so daß $\pi_R^{-1}(U_y) \cap T_R^{\kappa_y} \cap \overline{T}_S^{\delta} = \emptyset$, falls $y \notin \overline{T}_S^{\delta_R}$, und $\pi_R^{-1}(U_y) \cap T_R^{\kappa_y} \subset T_S$, falls $y \in \overline{T}_S^{\delta_R}$. Es existiert dann ein glattes $\kappa_R : R \to \mathbb{R}^{>0}$ mit $T_R^{\kappa_R} \subset \bigcup_{y\in R} \pi_R^{-1}(U_y) \cap T_R^{\kappa_y} \subset T_R$. Für alle $x \in T_R^{\kappa_R} \cap T_S^{\delta_R}$ ist dann $\pi_R(x) \in U_{\pi_R(x)}$. Nach Definition der U_y muß dann $\pi_R(x) \in \overline{T}_S^{\delta_R}$ also $\pi_R(x) \in T_S$ gelten, was zu beweisen war.

Den Nachweis von (6) stellen wir bis in Abschnitt 3.9, S. 148 zurück. Daraus werden sich keine Zirkelschlüsse ergeben, da bis dahin auf die Eigenschaft (6) eines eigentlichen Kontrolldatums nicht zurückgegriffen wird.

Als letztes zeigen wir noch, daß für jeden Punkt x eines Stratums S, für den zusätzlich eine kompakte bogenzusammenhängende Umgebung U von x in S und eine glatte Funktion $\varepsilon : S \to \mathbb{R}^{>0}$ mit $\varepsilon < \varepsilon_S$ vorgegeben sind, die Menge $W = \overline{T}_S^{\varepsilon} \cap \pi_S^{-1}(U)$ bogenzusammenhängend ist. Daraus folgt dann unmittelbar (5). Zuerst halten wir fest, daß W aufgrund von (4) kompakt sein muß. Nehmen wir an, es gäbe einen Punkt $y \in W$, der nicht durch einen stetigen Weg mit x verbunden werden kann. Sei W_y die Menge aller Punkte $z \in W$, die durch einen stetigen Weg mit y verbunden werden können. Dann ist W_y abgeschlossen in W, also kompakt, und hat nach Voraussetzung an y leeren Durchschnitt mit U. Also ist $d = \inf \left\{ \rho_S(z) \middle| \, z \in W_y \right\} > 0$, und es existierte eine konvergente Folge $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus W_y mit $\lim_{j\to\infty} \rho_S(z_j) = d$. Sei $z \in W_y$ der Grenzwert von $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $R > S$ das Stratum, in dem z liegt. Da $(\pi_{S,R}, \rho_{S,R}) : T_{S,R} \to S\times]0,\infty[$ submersiv ist, und R lokal bogenzusammenhängend, muß es ein $z' \in R \cap W_y$ geben mit $\rho(z') < d$ und $\pi_S(z') = \pi_S(z)$. Das steht aber im Widerspruch zur Minimalität von d, folglich ist W bogenzusammenhängend. □

Aus dem letzten Teil des gerade geführten Beweises folgt unmittelbar

3.6.8 Korollar *Jeder kontrollierbare stratifizierte Raum ist lokal bogenzusammenhängend.*

Bis jetzt wissen wir nicht, ob neben den durch Krägen auf berandeten Mannigfaltigkeiten definierten Kontrolldaten noch andere nichttriviale Kontrollstrukturen auf stratifizierten Räumen existieren. Der folgende Satz gibt hierüber Auskunft.

3.6.9 Satz *Zu jedem Whitney-stratifizierten Raum X und jeder glatten stratifizierten Submersion $f : X \to M$ in eine Mannigfaltigkeit M existiert ein mit f kompatibles normales Kontrolldatum $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ auf X. (vgl.* Mather [113, Prop. 7.1])

Sei $m \in \mathbb{N}^{>0}$ und X Euklidisch einbettbar. Falls dann X stark krümmungsmoderat ist und f über jedem Stratum S stark krümmungsmoderat von der Ordnung $m+(\dim \mathrm{Et}_X(S))^2-(\dim S)^2+1$, so kann das normale Kontrolldatum $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ krümmungsmoderat von der Ordnung m gewählt werden.

Beweis: Im ersten Teil führen wir die Argumentation für den Fall, daß X ein Whitney-stratifizierter Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist, und dehnen diese dann im zweiten Teil auf den Fall beliebiger Whitney-stratifizierter Räume aus.

1. Teil Zuerst nehmen wir an, X sei eine Whitney-stratifizierte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, oder einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit N. Sei X^k das k-Skelett von X, also die

Vereinigung aller Strata der Dimension $\leq k$ von X, und $\mathcal{S}^k$ die Familie aller aller Strata der Dimension $\leq k$. Zudem setzen wir noch $X^{-1} = \emptyset$ und $\mathcal{S}^{-1} = \emptyset$. Durch Induktion nach k wird gezeigt, daß für alle X^k ein mit f kompatibles, gegebenenfalls krümmungsmoderates Kontrolldatum existiert.

Nehmen wir an, wir hätten für ein $k \in \mathbb{N}$ ein System $(\mathsf{T}_S)_{S \in \mathcal{S}^{k-1}}$ normaler Tuben $\mathsf{T}_S = (T_S, \pi_S, \rho_S)$ in X gegeben, so daß die Kontrollbedingungen (KB1), (KB2) und (KB5) erfüllt sind. Desweiteren können wir nach Prop. 3.4.1 annehmen, daß für alle $R < S$ mit $R, S \in \mathcal{S}^{k-1}$ die Abbildung

$$(\pi_R, \rho_R)_{|S \cap T_R} : S \cap T_R \longrightarrow R \times \mathbb{R}$$

submersiv ist. Unter den Voraussetzungen des krümmungsmoderaten Falls nehme man zusätzlich an, daß jede der Tuben T_S, $S \in \mathcal{S}^{k-1}$ krümmungsmoderat von der Ordnung $m + (\dim \mathrm{Et}_X(S))^2 - (\dim S)^2$ ist; zudem sind dann nach Voraussetzung an X alle Submersionen $(\pi_R, \rho_R)_{|S \cap T_R}$ von der Ordnung $m + (\dim \mathrm{Et}_X(S))^2 - (\dim S)^2$ stark krümmungsmoderat über S. Schließlich sei angenommen, daß R und S genau dann vergleichbar sind, wenn $T_R \cap T_S \neq \emptyset$.

Da je zwei Strata von X der Dimension k nicht miteinander vergleichbar sind, können wir die folgenden Konstruktionen für jedes Stratum der Dimension k getrennt durchführen. Sei also S ein Stratum mit $\dim S = k$.

In seinem Beweis der Behauptung konstruiert John Mather die tubularen Umgebungen T_S in zwei Schritten. Für jedes $l \leq k$ sei U_l erst einmal die Vereinigung aller T_R mit $R < S$ und $\dim R \geq l$. Sei $S_l = U_l \cap S$. Mittels einer fallenden Induktion nach l definiert Mather dann in einem ersten Schritt eine Tube $\mathsf{T}_l = (T_l, \pi_l, \rho_l)$ von S_l in X. Dabei werden eventuell die Tuben T_R von Strata $R < S$ verkleinert. Da jedoch ein Stratum nur im Rand endlich vieler anderer Strata liegt, wird für jedes Stratum die zugehörige Tube nur endlich oft verkleinert. In einem zweiten Schritt wird die Tube T_0 dann zu einer Tube (T_S, π_S, ρ_S) von S in X ausgedehnt. Wir ergänzen in der folgenden Argumentation den ursprünglichen Matherschen Beweis um den krümmungsmoderaten Fall, und zeigen, daß unter den entsprechenden Voraussetzungen alle Konstruktionen auch krümmungsmoderat geführt werden können.

1. Schritt Für $l = k$ ist $S_k = \emptyset$, das heißt in diesem Fall ist man fertig. Nehmen wir nun an, T_{l+1} sei konstruiert, und die folgenden Vertauschungsrelationen seien erfüllt: Falls $R < S$, $\dim R \geq l+1$, $x \in T_{l+1} \cap T_R$ und $\pi_{l+1}(x) \in T_R$, so gilt

$$\text{(KB)}_{l+1} \qquad \begin{aligned} \rho_R \circ \pi_{l+1}(x) &= \rho_R(x), \\ \pi_R \circ \pi_{l+1}(x) &= \pi_R(x). \end{aligned}$$

Nach eventueller Verkleinerung von T_{l+1} kann weiter angenommen werden, daß für jedes $x \in T_{l+1}$ ein Stratum $Q < S$ der Dimension $> l$ existiert, so daß $x \in T_Q$ und $\pi_{l+1}(x) \in T_Q$. Im krümmungsmoderaten Fall werde zudem angenommen, daß jede der Tuben T_{l+1} krümmungsmoderat von der Ordnung $m + (\dim \mathrm{Et}_X(S))^2 - (\dim(S))^2 + 2(l+1)$ sei.

Da für je zwei verschiedene l-dimensionale Strata $R, R' < S$ die Beziehung $T_R \cap T_{R'} = \emptyset$ gilt, genügt es, die Tube T_l über jeder der Mengen $T_R \cap S$ separat zu konstruieren. Mit anderen Worten wollen wir eine tubulare Umgebung T_S^R von $T_R \cap S$ konstruieren, deren Einschränkung auf $T_R \cap S_{l+1}$ isomorph zur Einschränkung von T_{l+1} ist, und so daß die folgenden Vertauschungsrelationen erfüllt sind: für jedes $x \in T_S^R \cap T_R$ mit $\pi_S^R(x) \in T_R$ gilt

$$\rho_R \circ \pi_S^R(x) = \rho_R(x),$$
$$\pi_R \circ \pi_S^R(x) = \pi_R(x),$$

wobei $\pi_S^R := \pi_{T_S^R}$. Nach geeigneter Einschränkung von T_R sind diese Vertauschungsrelationen für alle $x \in T_{l+1} \cap T_R$ mit $\pi_{l+1}(x) \in T_R$ schon erfüllt, wobei π_{l+1} anstelle von π_S^R steht. Um dies einzusehen schränke man die Tube T_R auf

$$T_R \setminus \bigcup_{\{Q|\, R<Q<S\}} \pi_Q^{-1}(T_Q \setminus T_R),$$

ein und bezeichne die sich so ergebende Tube wieder mit T_R. Für das gewählte $x \in T_{l+1}$ sei anschließend $Q < R$ ein Stratum mit $\dim Q > l$, so daß $x \in T_Q$ und $\pi_{l+1}(x) \in T_Q$. Es ist dann $\pi_{l+1}(x) \in T_R \cap T_Q$, also $R < Q < S$. Aufgrund der eben durchgeführten Einschränkung gilt $\pi_Q(x) \in T_R$, woraus sich die behaupteten Vertauschungsrelationen ergeben:

$$\rho_R \circ \pi_{l+1}(x) = \rho_R \circ \pi_Q \circ \pi_{l+1}(x) = \rho_R \circ \pi_Q(x) = \rho_R(x),$$
$$\pi_R \circ \pi_{l+1}(x) = \pi_R \circ \pi_Q \circ \pi_{l+1}(x) = \pi_R \circ \pi_Q(x) = \pi_R(x).$$

Als nächstes sei daran erinnert, daß nach Voraussetzung $(\pi_R, \rho_R)_{|S\cap T_R} : S \cap T_R \longrightarrow R \times \mathbb{R}$ submersiv ist. Andererseits bedeuten die Kontrollbedingungen (KB_l) aber nichts anderes, als daß die Tube T_S^R mit der Abbildung $(\rho_R, \pi_R) : S_{l+1} \cap T_R \to R \times \mathbb{R}$ kompatibel ist.

Nun wird jede tubulare Umgebung T_Q für $Q < S$, $\dim Q > l$ auf eine tubulare Umgebung T'_Q so eingeschränkt, daß der Abschluß von $T'_Q \cap S$ in S_{l+1} liegt, und so daß im krümmungsmoderaten Fall T_{l+1} eine regulär situierte Umgebung von $T'_Q \cap S$ ist. Definiert man jetzt S'_{l+1} analog wie S_{l+1}, dann liegt der Abschluß von S'_{l+1} in S_{l+1}, es gibt also aufgrund des Existenzsatzes für tubulare Umgebungen eine tubulare Umgebung T_S^R, die den Kontrollbedingungen (KB_{l+1}) genügt, und die über S'_{l+1} isomorph zu T_{l+1} ist. Im krümmungsmoderaten Fall ist ja $(\pi_R, \rho_R)_{|S\cap T_R}$ stark krümmungsmoderat von der Ordnung

$$m + (\dim \mathrm{Et}_X(R))^2 - (\dim(R))^2 \geq m + (\dim \mathrm{Et}_X(S))^2 - (\dim(S))^2 + 2(l+1) - 1,$$

also kann nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz T_S^R krümmungsmoderat von der Ordnung $m + (\dim \mathrm{Et}_X(S))^2 - (\dim(S))^2 + 2l$ gewählt werden. Somit ist der Induktionsschluß bezüglich l vollzogen, und es existiert eine tubulare Umgebung T_0 von S_0, die (KB_0) für alle $R < S$ erfüllt, und die unter den Voraussetzungen des krümmungsmoderaten Falls krümmungsmoderat von der Ordnung $m + (\dim \mathrm{Et}_X(S))^2 - (\dim(S))^2$ ist.

2. Schritt Aus (KB_0) folgt, daß T_0 nach eventueller Einschränkung kompatibel mit f ist. Man wähle nämlich T_0 so klein, daß für alle $x \in T_0$ ein $Q < S$ existiert mit $x \in T_Q$ und $\pi_0(x) \in T_Q$. Dann ist aber

$$f \circ \pi_0(x) = f \circ \pi_Q \circ \pi_0(x) = f \circ \pi_Q(x) = f(x).$$

Wendet man nun wieder den Existenzsatz für tubulare Umgebungen an, so existiert nach geeigneter Einschränkung von T_0 analog wie im 1. Schritt eine tubulare Umgebung T_S

von S in X, die kompatibel mit f ist, und die den Kontrollbedingungen genügt. Nach eventueller Verkleinerung von $\mathsf{T_S}$ können wir annehmen, daß das System $(\mathsf{T_S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}^k}$ die oben genannten Induktionsvoraussetzungen erfüllt, das heißt der Induktionsschluß ist vollzogen. Da für jedes feste Stratum S und genügend großes k die Tube $\mathrm{T_S}$ beim Übergang zum Kontrollsystem über $\mathcal{S}^{k+1}$ nicht mehr verkleinert wird, erhält man somit insgesamt ein Kontrolldatum für X mit den gewünschten Eigenschaften.

2. Teil Nachdem die Behauptung für den Fall gezeigt wurde, daß X Euklidisch einbettbar ist, gehen wir nun zum allgemeinen Fall über. Wir benötigen zur Konstruktion eines Kontrolldatums auf X einen bezüglich einer kompakten Ausschöpfung $(\mathsf{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von X induktiv einbettenden Atlas von singulären Karten $\mathsf{x}_j : \mathsf{K}^\circ_{j+1} \to \mathsf{O}_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}$, wobei die O_j offen in $\mathbb{R}^{n_j}$ sind und $\mathsf{x}_j(\mathsf{K}^\circ_{j+1})$ abgeschlossen in O_j liegt. Im folgenden werden für die Whitney-stratifizierten Räume $\mathsf{x}_j(\mathsf{K}^\circ_{j+1}) \subset \mathbb{R}^{n_j}$ in einem geeigneten Sinne zueinander kompatible Kontrolldaten konstruiert, die insgesamt das gesuchte Kontrolldatum von X induzieren. Dazu konstruiert man sich zuerst mit Hilfe einer Teilung der Eins und eventueller Einschränkung der O_j glatte und submersive Funktionen $\mathsf{f}_j : \mathsf{O}_j \to \mathsf{M}$ derart, daß für alle $j \in \mathbb{N}$

(1a) $\mathsf{f}_j \circ \mathsf{x}_j(\mathsf{x}) = \mathsf{f}(\mathsf{x})$, falls $\mathsf{x} \in \mathsf{K}^\circ_{j+1}$ und

(1b) $\mathsf{f}_{j+1}(\mathsf{x}) = \mathsf{f}_j \circ \pi^{n_{j+1}}_{n_j}(\mathsf{x})$, falls $\mathsf{x} \in \mathsf{x}_{j+1}(\mathsf{K}_j)$.

Die Behauptung ist offensichtlich gezeigt, wenn man für jede Karte x_j ein Kontrolldatum $(\mathsf{T}^j_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ angeben kann, das aus Tuben $\mathsf{T}^j_\mathsf{S} = (\mathrm{T}^j_\mathsf{S}, \pi^j_\mathsf{S}, \rho^j_\mathsf{S})$ um $\mathsf{x}_j(\mathsf{S} \cap \mathsf{K}^\circ_{j+1})$ in $\mathbb{R}^{n_j}$ besteht, diese von tubularen Umgebungen $(\mathsf{E}^j_\mathsf{S}, \varepsilon^j_\mathsf{S}, \varphi^j_\mathsf{S})$ induziert sind, und so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(2a) Für $\mathsf{x} \in \mathsf{S} \cap \mathsf{K}_j$ gilt $\varepsilon^{j+1}_\mathsf{S} \circ \mathsf{x}_{j+1}(\mathsf{x}) = \varepsilon^j_\mathsf{S} \circ \mathsf{x}_j(\mathsf{x})$.

(2b) Es gilt $\pi^{n_{j+1}}_{n_j}\big(\mathrm{T}^{j+1}_{\mathsf{S}\cap\mathsf{K}_j}\big) = \mathrm{T}^j_{\mathsf{S}\cap\mathsf{K}_j}$, wobei $\mathrm{T}^l_{\mathsf{S}\cap\mathsf{K}_j} = (\pi^l_\mathsf{S})^{-1}\big(\mathsf{x}_l(\mathsf{S} \cap \mathsf{K}_j)\big)$ für $l \geq j$.

(2c) Für $\mathsf{x} \in \mathrm{T}^{j+1}_{\mathsf{S}\cap\mathsf{K}_j}$ ist $\pi^{n_{j+1}}_{n_j} \circ \pi^{j+1}_\mathsf{S}(\mathsf{x}) = \pi^j_\mathsf{S} \circ \pi^{n_{j+1}}_{n_j}(\mathsf{x})$ und $\rho^{j+1}_\mathsf{S}(\mathsf{x}) = \rho^j_\mathsf{S} \circ \pi^{n_{j+1}}_{n_j}(\mathsf{x})$.

(2d) Für $\mathsf{x} \in \mathrm{T}^j_\mathsf{S}$ gilt $\mathsf{f}_j \circ \pi^j_\mathsf{S}(\mathsf{x}) = \mathsf{f}(\mathsf{x})$.

Das Kontrolldatum $(\mathsf{T}^0_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ konstruiert man sich gemäß dem 1. Teil. Sind $(\mathsf{T}^0_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ bis $(\mathsf{T}^j_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ mit den gewünschten Eigenschaften schon gegeben, so zieht man zuerst mittels der kanonischen Projektion $\pi^{n_{j+1}}_{n_j}$ die tubularen Umgebungen $(\mathsf{E}^j_\mathsf{S}, \varepsilon^j_\mathsf{S}, \varphi^j_\mathsf{S})$ zu tubularen Umgebungen $\tilde{\mathrm{T}}^{j+1}_\mathsf{S} = (\tilde{\mathsf{E}}^{j+1}_\mathsf{S}, \tilde{\varepsilon}^j_\mathsf{S}, \tilde{\varphi}^{j+1}_\mathsf{S})$ von $\mathsf{x}_{j+1}(\mathsf{S} \cap \mathsf{K}^\circ_{j+1})$ zurück, wobei $\tilde{\mathsf{E}}^{j+1}_\mathsf{S} = \mathsf{E}^j_{\mathsf{S}|\mathsf{S}\cap\mathsf{K}^\circ_{j+1}} \oplus \mathbb{R}^{m_j}$ mit $m_j = n_{j+1} - n_j$ ist, sowie $\tilde{\varepsilon}^{j+1}_\mathsf{S} = \varepsilon^j_\mathsf{S} \circ \pi^{n_{j+1}}_{n_j}{}_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{K}^\circ_{j+1}}$ gilt, und $\tilde{\varphi}^j_\mathsf{S}$ eine geeigneten Einschränkung von $(\varphi, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m_j}})$ darstellt. In der Notation haben wir dabei $\mathsf{S}\cap\mathsf{K}^\circ_{j+1}$ kanonisch mit ihren Bildern unter x_j beziehungsweise x_{j+1} identifiziert.

Führt man sich nochmals die Argumentation im 1. Teil genauer vor Augen, so ergibt sich sofort, daß man unter mehrfacher Verwendung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für tubulare Umgebungen die Einschränkungen $\tilde{\mathsf{T}}^{j+1}_\mathsf{S}$ derart zu tubularen Umgebungen $\mathsf{T}^{j+1}_\mathsf{S}{}_{|\mathsf{S}\cap\mathsf{K}_j}$ ausdehnen kann, daß die Bedingungen (2a) bis (2d) erfüllt sind. Wir führen diese etwas länglichen Betrachtungen an dieser Stelle jedoch nicht explizit aus, sondern verweisen nur nochmals darauf, daß sie genauso wie im 1. Teil erfolgen. $\square$

3.7 Kontrollierte Vektorfelder und Integrabilität

3.7.1 Bekanntlich versteht man unter einem *Fluß* auf einem metrische Raum X eine stetige Abbildung $\gamma : J \to X$, $(x,t) \mapsto \gamma(x,t) = \gamma_x(t)$ auf einer offenen Menge $J \subset X \times \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(F1) Für jedes $x \in X$ existieren t_x^-, t_x^+ mit $-\infty \leq t_x^- < 0 < t_x^+ \leq \infty$, so daß $J_x := J \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$ gleich dem Intervall $]t_x^-, t_x^+[$ ist.

(F2) Für jedes $x \in X$ gilt $\gamma_x(0) = x$.

(F3) Falls $t \in J_x$ und $s \in J_{\gamma_x(t)}$, so folgt $t + s \in J_x$ und $\gamma_x(t+s) = \gamma(\gamma_x(t), s)$.

Die Menge der Flüsse auf X ist geordnet, indem man für zwei Flüsse $\gamma : J \to X$ und $\tilde{\gamma} : \tilde{J} \to X$ die Relation $\gamma \leq \tilde{\gamma}$ als äquivalent dazu definiert, daß $J \subset \tilde{J}$ gilt und $\gamma(x,t) = \tilde{\gamma}(x,t)$ für alle $(x,t) \in J$.

Sei nun $X \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit von M, und $V : X \to TM$ ein Vektorfeld, das tangential zu X ist, und einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Dann existiert zu V nach dem klassischen Satz von der Existenz und Eindeutigkeit zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen ein eindeutig bestimmter maximaler Fluß $\gamma : J \to X$, so daß für alle $x \in X$ und $t \in J_x$

(IF) $$\dot{\gamma}_x(t) = V(\gamma_x(t)) \quad \text{und} \quad \gamma_x(0) = x.$$

Läßt man für X eine beliebige stratifizierte Untermenge einer Mannigfaltigkeit M zu, und verlangt von $V : X \to TM$ erst einmal nur, daß es eine Abbildung mit $V(x) \in T_xS$ für jedes Stratum S und alle $x \in S$ ist, so macht die Frage immer noch Sinn, unter welchen Voraussetzungen an X und V ein Fluß γ auf X existiert, so daß (IF) erfüllt ist. Mit anderen Worten wollen wir wissen, unter welchen Bedingungen V lokal integrabel ist. In seinen Arbeiten [113, 114] hat John Mather diese Frage ausführlich behandelt. Für den Fall einer Whitney-stratifizierten Untermenge $X \subset M$ konnte er dabei zeigen, daß jedes sogenannte kontrollierte Vektorfeld auf X einen maximalen Integralfluß besitzt. Wir werden das betreffende Theorem in diesem Abschnitt beweisen, führen jedoch vorher noch die dazu benötigten Begriffe ein.

3.7.2 Definition (Mather [113, §9]) Sei X ein kontrollierter stratifizierter Raum. Ein Vektorfeld $V : X \to TX$ heißt *schwach kontrolliert*, falls ein Kontrolldatum $(T_S)_{S \in \mathcal{S}}$ von X existiert, so daß für jedes Paar von Strata $S < R$

(KB8) $$T\pi_{S,R} \circ V_{|T_{S,R}} = V \circ \pi_{S,R}$$

gilt. Falls zusätzlich

(KB9) $$T\rho_{S,R} \circ V_{|T_{S,R}} = 0$$

erfüllt ist, so heißt V *kontrolliert*.

Ein schwach kontrolliertes Vektorfeld $V : T_S \to TX$ auf einer tubularen Umgebung des Stratums S heißt *radial* (bzgl. S), falls V auf $T_S \setminus S$ kontrolliert ist, und die Relationen

(RB1) $$V_{|S} = 0$$

(RB2) $$T\rho_S \circ V_{|T_S \setminus S} = -\frac{\partial}{\partial t}$$

gelten. Gilt neben (RB1) nur

(RB3) $$T\rho_S \circ V_{|T_S \setminus S} = -h\frac{\partial}{\partial t}$$

mit einer stratifizierten Abbildung $h : T_S \to \mathbb{R}^{>0}$, so heißt V *konform radial.*

Falls X zusätzlich eine $\mathcal{C}^{m+1}$-Struktur trägt, und die Kontrollstruktur auf X krümmungsmoderat von der Ordnung m ist, so nennen wir ein (schwach) kontrolliertes Vektorfeld V *krümmungsmoderat* von der *Ordnung* m, wenn eine Überdeckung von X durch singuläre Karten $x : U \to \mathbb{R}^n$ existiert und ein von der Ordnung m krümmungsmoderates Kontrolldatum $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ von X, so daß für diese Objekte die Axiome (TB5), (KB8), (gegebenenfalls (KB9)) sowie die folgende Bedingung erfüllt sind:

(KM10) Für jedes Stratum S ist das auf einer tubularen Umgebung von $x(S\cap U)$ definierte Vektorfeld $V_S^x : T_S^x \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto V\big(x^{-1}(\pi_S^x(x))\big)$ temperiert relativ $x(\partial S \cap U)$ von der Klasse $\mathcal{C}^m$.

Die fundamentale Existenzaussage für kontrollierte Vektorfelder stellt der folgende Satz dar, dessen erster Teil auf Mather [113, Prop. 9.1] zurückgeht.

3.7.3 Satz *Sei X ein kontrollierter Raum und $f : X \to M$ eine kontrollierte Submersion in eine Mannigfaltigkeit M. Zu jedem glatten Vektorfeld $W : M \to TM$ existiert dann ein kontrolliertes Vektorfeld $V : X \to TX$, so daß*

(KB10) $$Tf \circ V = W \circ f.$$

Falls X zudem eine $\mathcal{C}^{m+1}$-Struktur trägt sowie ein von der Ordnung $m+1$ stark krümmungsmoderates Kontrolldatum besitzt, und falls f über jedem Stratum stark krümmungsmoderat von der Ordnung $m+1$ ist, so kann V krümmungsmoderat von der Ordnung m gewählt werden.

Beweis: 1. Teil Mittels Induktion nach k konstruiert Mather in [113] auf dem k-Skelett X^k ein kontrolliertes Vektorfeld $V^k : X^k \to TX^k$, so daß über X^k das Vektorfeld V^k der Relation (KB10) genügt, und $V^{k+1}_{|X^k} = V^k$ gilt. Anschließend wird $V : X \to TX$ durch $V_{|X^k} = V^k$ definiert, wodurch sich ein kontrolliertes Vektorfeld ergibt, das der Behauptung genügt. Zur Konstruktion der V^k gehen wir wie in [113] vor, und wählen zuerst ein mit f kompatibles Kontrolldatum $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$, so daß f mit $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ kompatibel ist. Dabei nützen wir im folgenden stillschweigend aus, daß das Skelett X^k in natürlicher Weise eine Kontrollstruktur von X erbt.

Falls $k = 0$, ist die Behauptung trivial. Nehmen wir also an, es sei für $k \geq 0$ ein Vektorfeld V^k auf X^k mit den gewünschten Eigenschaften gegeben. Durch eventuelle Verkleinerung der Tuben von Strata S der Dimension $\leq k$ kann man erreichen, daß die Kontrollbedingungen (KB8) und (KB9) für V^k und alle Paare von Strata $S \leq R$ mit $\dim R \leq k$ erfüllt sind. Nach eventueller weiterer Einschränkung der Tuben können wir gemäß Proposition 3.6.7 davon ausgehen, daß für alle Paare von Strata $R \leq S$ von X die Beziehung

$$\pi_R(T_S \cap T_R) \subset T_R$$

richtig ist, und daß für zwei nicht vergleichbare Strata S und $\tilde{\mathsf{S}}$ von X die Tuben T_S und $T_{\tilde{\mathsf{S}}}$ disjunkt sind. Zudem verkleinern wir die Tuben derart, daß für geeignete glatte Funktionen $\varepsilon_\mathsf{S} : \mathsf{S} \to \mathbb{R}^{>0}$ die Abbildungen $(\pi_\mathsf{S}, \rho_\mathsf{S}) : T_\mathsf{S}^{\varepsilon_\mathsf{S}} \to [0, \varepsilon_\mathsf{S}[$ eigentlich sind, und $T_\mathsf{S} = T_\mathsf{S}^{\varepsilon_\mathsf{S}}$ gilt.

Nehmen wir nun an, für jedes $(k+1)$-dimensionale Stratum S sei ein glattes Vektorfeld $\mathsf{V}_\mathsf{S} : \mathsf{S} \to \mathsf{TS}$ derart gegeben, daß für alle $\mathsf{R} < \mathsf{S}$, $x \in \mathsf{S} \cap T_\mathsf{R}^{\varepsilon/2}$ und $z \in \mathsf{S}$ die folgenden Kontrollbedingungen erfüllt sind:

$$(\mathrm{KB8})_\mathsf{R} \qquad \mathsf{T}\pi_\mathsf{R} \circ \mathsf{V}_\mathsf{S}(x) = \mathsf{V}^k \circ \pi_\mathsf{R}(x),$$

$$(\mathrm{KB9})_\mathsf{R} \qquad \mathsf{T}\rho_\mathsf{R} \circ \mathsf{V}_\mathsf{S}(x) = 0,$$

$$(\mathrm{KB10})_\mathsf{S} \qquad \mathsf{T}f \circ \mathsf{V}_\mathsf{S}(z) = W \circ f(z).$$

Definiert man dann $\mathsf{V}^{k+1} : \mathsf{X}^{k+1} \to \mathsf{TX}^{k+1}$ durch $\mathsf{V}^{k+1}_{|\mathsf{X}^k} = \mathsf{V}^k$ und $\mathsf{V}^{k+1}_{|\mathsf{S}} = \mathsf{V}_\mathsf{S}$, so erhält man ein kontrolliertes Vektorfeld auf X^{k+1}, das die Induktionsvoraussetzung erfüllt. Damit wäre der Beweis beendet.

Es bleibt also, die Vektorfelder V_S mit den gewünschten Eigenschaften zu konstruieren. Aufgrund der Voraussetzungen an das Kontrolldatum können wir die Konstruktion von V_S für jedes $(k+1)$-dimensionale Stratum S separat durchführen. Sei nun y ein Punkt von S. Dann definieren wir für jedes Stratum $\mathsf{R} < \mathsf{S}$ eine Umgebung $U_{y,\mathsf{R}}$ von y in S durch

$$U_{y,\mathsf{R}} := \begin{cases} \mathsf{S} \cap T_\mathsf{R} & \text{falls } y \in T_\mathsf{R}, \\ \mathsf{S} \setminus \overline{T}_\mathsf{R}^{\varepsilon_\mathsf{R}/2} & \text{falls } y \notin T_\mathsf{R}, \end{cases}$$

und setzen $U_y := \bigcap\limits_{\mathsf{R}<\mathsf{S}} U_{\mathsf{R},y}$. Die Familie $(U_y)_{y\in\mathsf{S}}$ stellt dann eine offene Überdeckung von S dar. Bezeichnet man zudem mit $\mathcal{S}_y$ die Menge aller Strata $\mathsf{R} < \mathsf{S}$ derart, daß $y \in T_\mathsf{R}$, so ist $\mathcal{S}_y$ bezüglich der Inzidenzrelation total geordnet, da das Kontrollsystem ja so gewählt war, daß zwei Strata, deren Tuben nichtleeren Durchschnitt haben, miteinander vergleichbar sind.

Nehmen wir an, für den Punkt $y \in \mathsf{S}$ sei $\mathcal{S}_y$ nichtleer. Dann existiert ein größtes Element R_y von $\mathcal{S}_y$. Aufgrund der Tatsache, daß $(\pi_{\mathsf{R}_y}, \rho_{\mathsf{R}_y}) : \mathsf{S} \cap T_{\mathsf{R}_y} \to \mathsf{R}_y \times \mathbb{R}^{>0}$ submersiv ist, findet man nach eventueller Verkleinerung der Umgebung U_y ein glattes Vektorfeld $\mathsf{V}_y : U_y \to \mathsf{T}U_y$, so daß $(\mathrm{KB8})_{\mathsf{R}_y}$ und $(\mathrm{KB9})_{\mathsf{R}_y}$ für alle $x \in U_y$ erfüllt sind. Zudem gilt für $z \in U_y$ die Bedingung $(\mathrm{KB10})_\mathsf{S}$, denn

$$\mathsf{T}f \circ \mathsf{V}_\mathsf{S}(z) = \mathsf{T}f \circ \mathsf{T}\pi_{\mathsf{R}_y} \circ \mathsf{V}_\mathsf{S}(z) = \mathsf{T}f \circ \mathsf{V}^k \circ \pi_{\mathsf{R}_y}(z) = W \circ f(z).$$

Falls jedoch der Punkt y in keiner der Tuben T_R mit $\mathsf{R} < \mathsf{S}$ liegt, falls also mit anderen Worten $\mathcal{S}_y = \emptyset$ gilt, so sei nach eventueller Verkleinerung von U_y das Vektorfeld $\mathsf{V}_y : U_y \to \mathsf{T}U_y$ derart gewählt, daß für alle $z \in U_z$ die Bedingung $(\mathrm{KB10})_\mathsf{S}$ erfüllt ist. Da f nach Voraussetzung eine kontrollierte Submersion ist, existiert ein solches V_y auch wirklich. Nach Wahl einer der Überdeckung $(U_y)_{y\in\mathsf{S}}$ untergeordneten Teilung der Eins $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und von Punkten $y_j \in \mathsf{S}$ mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_{y_j}$ kann V_S schließlich definiert werden:

$$\mathsf{V}_\mathsf{S}(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j \, \mathsf{V}_{y_j}(x), \qquad x \in \mathsf{S}. \tag{3.7.1}$$

Wir zeigen, daß dieses V_S den gewünschten Kontrollbedingungen genügt. Offensichtlich genügt V_S der Relation $(\mathrm{KB10})_S$, da diese von allen V_y über U_y erfüllt wird. Ist $x \in T_R^{\varepsilon_R/2}$ für ein $R < S$, so folgt aufgrund der Konstruktion der U_y, daß $y_j \in T_R$ für alle y_j mit $x \in U_j := U_{y_j}$. Das impliziert $R \leq R_j$, wobei $R_j := R_{y_j}$, und $\pi_{R_j}(x) \in T_R$. Daraus ergeben sich mit der oben bewiesenen Tatsache, daß V_{y_j} die Bedingungen $(\mathrm{KB8})_{R_j}$ und $(\mathrm{KB9})_{R_j}$ erfüllt, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} T\pi_R \circ V_S(x) &= \sum_{\{j \mid x \in U_j\}} \varphi_j(x) \cdot T\pi_R \circ V_{y_j}(x) = \sum_{\{j \mid x \in U_j\}} \varphi_j(x) \cdot T\pi_R \circ T\pi_{R_j} \circ V_{y_j}(x) \\ &= \sum_{\{j \mid x \in U_j\}} \varphi_j(x) \cdot T\pi_R \circ V^k \circ \pi_{R_j}(x) = \sum_{\{j \mid x \in U_j\}} \varphi_j(x) \cdot V^k \circ \pi_R \circ \pi_{R_j}(x) \\ &= \sum_{\{j \mid x \in U_j\}} \varphi_j(x) \cdot V^k \circ \pi_R(x) = V^k \circ \pi_R(x), \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

$$\begin{aligned} T\rho_R \circ V_S(x) &= \sum_{\{j \mid x \in U_j\}} \varphi_j(x) \cdot T\rho_R \circ V_{y_j}(x) = \sum_{\{j \mid x \in U_j\}} \varphi_j(x) \cdot T\rho_R \circ T\pi_{R_j} \circ V_{y_j}(x) \\ &= \sum_{\{j \mid x \in U_j\}} \varphi_j(x) \cdot T\rho_R \circ V^k \circ \pi_{R_j}(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.7.3}$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt.

2. TEIL Wir geben hier nur eine grobe Skizze für den Nachweis, daß unter den Voraussetzungen des krümmungsmoderaten Falls das Vektorfeld V krümmungsmoderat gewählt werden kann, da ähnliche Konstruktionen schon mehrfach für Beweise von Aussagen zu krümmungsmoderatem Verhalten verwendet worden sind.

Wesentlich im krümmungsmoderaten Fall ist, daß man die Teilung der Eins $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ wie in Lemma 1.7.9 mit $K = \partial S$ wählen kann. Daß dies tatsächlich möglich ist, zeigt man unter Verwendung der Tatsache, das jede Tubenumgebungen T_R regulär situiert zu R ist. Mit Hilfe einer krümmungsmoderaten Riemannschen Metrik über T_S bestimmt man V_{y_j} eindeutig dadurch, daß im Falle $\mathcal{S}_{y_j} \neq \emptyset$ die Beziehung $V_{y_j}(x) \in \left(\ker T_x(\pi_R, \rho_R)\right)^\perp$ für alle $x \in U_{y_i}$ gilt und im Falle $\mathcal{S}_{y_j} = \emptyset$ die Relation $V_{y_j}(z) \in \left(\ker T_z f\right)^\perp$ für alle $z \in U_{y_i}$. Das in Gl. 3.7.1 definierte Vektorfeld V_S ist dann in jeder Karte temperiert relativ ∂S von der Klasse $\mathcal{C}^m$. □

3.7.4 Korollar *Sei X ein kontrollierter Raum. Dann existiert zu jedem Stratum S ein radiales Vektorfeld $V : T_S \to TX$.*

Falls X zudem eine $\mathcal{C}^{m+1}$-Struktur trägt sowie ein von der Ordnung $m+1$ krümmungsmoderates Kontrolldatum besitzt, so kann V krümmungsmoderat von der Ordnung m gewählt werden.

BEWEIS: Zuerst wählen man sich ein Kontrolldatum auf X. Dann ist die Einschränkung $\rho_S : T_S \setminus S \to \mathbb{R}^{>0}$ eine kontrollierte Submersion, woraus sich mit dem vorausgehenden Satz die Existenz eines kontrollierten Vektorfelds $\tilde{V} : T_S \setminus S \to TX$ ergibt, so daß $T\rho_S \circ \tilde{V} = -\frac{\partial}{\partial t}$. Definiert man nun V durch $V_{|S} = 0$ und $V_{|T_S \setminus S} = \tilde{V}$, so stellt V ein radiales Vektorfeld dar. □

Aufgrund der letzten beiden Resultate wissen wir jetzt, daß auf einem stratifizierten Raum genügend viele kontrollierte Vektorfelder existieren. Wir kommen deshalb wieder zu unserem ursprünglichen Anliegen, der Integration kontrollierter Vektorfelder, zurück.

3.7.5 Definition Ein Fluß $\gamma : \mathsf{J} \to \mathsf{X}$ auf einem stratifiziertem Raum X heißt *stratifiziert*, falls für alle $(x,t) \in \mathsf{J}$ aus der Tatsache, daß x in dem Stratum S liegt, schon folgt, daß auch $\gamma(x,t) \in \mathsf{S}$. Ist $\mathsf{V} : \mathsf{X} \to \mathsf{TX}$ ein stratifiziertes Vektorfeld auf X, so nennt man einen stratifizierten Fluß $\gamma : \mathsf{J} \to \mathsf{X}$ *Integralfluß* von V, falls für jedes Stratum S die Kurven γ_x, $x \in \mathsf{S}$ von der Klasse $\mathcal{C}^1$ sind und für alle $(x,t) \in \mathsf{J} \cap (\mathsf{S} \times \mathbb{R})$ die Bedingung (IF) erfüllt ist.

3.7.6 Satz (*vgl.* MATHER [113, Prop. 10.1]) *Ist V ein kontrolliertes Vektorfeld auf einem kontrollierten Raum X, so existiert ein eindeutig bestimmter maximaler stratifizierter Integralfluß $\gamma : \mathsf{J} \to \mathsf{X}$ von V. Unter allen stratifizierten Integralflüssen von V ist γ zudem durch die folgende Eigenschaft eindeutig bestimmt:*

$(\mathrm{IF})_{\max}$ *Für alle $x \in \mathsf{X}$ mit $t_x^+ < \infty$ (bzw. $t_x^- > -\infty$) ist die Einschränkung*

$$\gamma_{|\{x\}\times[0,t_x^+[} : \{x\} \times [0, t_x^+[\to \mathsf{X} \qquad (\textit{bzw. } \gamma_{|\{x\}\times\,]t_x^-,0]} : \{x\}\times\,]t_x^-, 0] \to \mathsf{X})$$

eigentlich.

BEWEIS: Als erstes sei zu V ein eigentliches Kontrolldatum $(\mathsf{T}_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ auf X derart fixiert, daß die Kontrollbedingungen (KB8) und (KB9) erfüllt sind. Nach Voraussetzung an V ist für jedes Stratum S die Einschränkung $\mathsf{V}_{|\mathsf{S}}$ ein glattes Vektorfelder auf S. Aufgrund des klassischen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes über die Integrierbarkeit von Vektorfeldern existiert ein eindeutig bestimmter maximaler Integralfluß $\gamma_\mathsf{S} : \mathsf{J}_\mathsf{S} \to \mathsf{S}$ von $\mathsf{V}_{|\mathsf{S}}$. Wir setzen nun

$$\mathsf{J} := \bigcup_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}} \mathsf{J}_\mathsf{S} \quad \text{sowie} \quad \gamma : \mathsf{J} \to \mathsf{X}, \quad \gamma_{|\mathsf{J}_\mathsf{S}} := \gamma_\mathsf{S},$$

und behaupten, daß γ ein maximaler Integralfluß von V ist, eindeutig bestimmt ist, und $(\mathrm{IF})_{\max}$ erfüllt. Unter der Annahme, daß die Offenheit von J und die Stetigkeit von γ bewiesen sind, folgt nach Definition, daß γ einen stratifizierten Integralfluß von V darstellt. Dieser ist dann auch maximal, denn für jeden Integralfluß $\tilde{\gamma} \geq \gamma$ folgt

$$\tilde{\gamma}_{|\mathsf{J}\cap(\mathsf{S}\times\mathbb{R})} \geq \gamma_{|\mathsf{J}\cap(\mathsf{S}\times\mathbb{R})} = \gamma_\mathsf{S},$$

woraus sich wegen der Maximalität der γ_S die Relation $\tilde{\gamma}_{|\mathsf{J}\cap(\mathsf{S}\times\mathbb{R})} = \gamma_\mathsf{S}$, also $\tilde{\gamma} = \gamma$ ergibt. Aus einem analogen Argument folgt die Eindeutigkeit von γ.

Zum Nachweis von $(\mathrm{IF})_{\max}$, der Offenheit von J und der Stetigkeit von γ benötigen wir das folgende Resultat.

3.7.7 Lemma *Sei x ein Punkt des Stratums S, K eine kompakte Umgebung von x in S und $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ derart, daß $t_x^- < t_1 < t_2 < t_x^+$. Zu V und $(\mathsf{T}_\mathsf{S})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ wähle man sich $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \varepsilon_\mathsf{S}(\gamma_y(t))$ für $y \in \mathsf{K}$ und $t \in [t_1, t_2]$, und setze $\mathsf{U} := \{y \in \mathrm{T}_\mathsf{S} \mid \pi_\mathsf{S}(y) \in \mathsf{K},\ \rho_\mathsf{S}(y) < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Dann genügt die V zugeordnete Abbildung $\gamma : \mathsf{J} \to \mathsf{X}$ für alle $y \in \mathsf{U}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\max(t_y^-, t_1) < t < \min(t_y^+, t_2)$ den folgenden Kontrollbedingungen*

(KB11) $$\gamma(y,t) \in \mathrm{T}_\mathsf{S},$$

(KB12) $$\pi_\mathsf{S}(\gamma(y,t)) = \gamma(\pi_\mathsf{S}(y), t),$$

(KB13) $$\rho_S(\gamma(y,t)) = \rho_S(y).$$

Beweis des Lemmas: Der Punkt $y \in U$ liege in dem Stratum $R > S$. Da γ_R ein Fluß auf R ist, gibt es ein genügend kleines $t_0 > 0$, so daß (KB11) für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < t_0$ erfüllt ist. Aufgrund der Kontrollbedingungen (KB8) und (KB9) sind nach eventueller Verkleinerung von t_0 auch (KB12) und (KB13) für $|t| < t_0$ erfüllt. Konsequenterweise muß, da $(\pi_S, \rho_s) : T_S = T_S^{\varepsilon_S} \to [0, \varepsilon_S[$ eigentlich ist, auch $\gamma_y(t_0)$ in T_S liegen. Daraus ergibt sich wiederum, daß (KB12) und (KB13) auch für $t = t_0$ richtig sind. Aufgrund der Flußeigenschaft von γ_R gilt dann für jedes genügend kleine $s > 0$ die Beziehung $\gamma_y(t_0 + s) \in T_S$, sowie

$$\begin{aligned}\pi_S(\gamma(y, t_0 + s)) &= \pi_S(\gamma(\gamma(y, t_0), s)) = \gamma(\pi_S(\gamma(y, t_0)), s)\\ &= \gamma(\gamma(\pi_S(y), t_0), s) = \gamma(\pi_S(y), t_0 + s),\end{aligned}$$

und nach ähnlicher Rechnung

$$\rho_S(\gamma(y, t_0 + s)) = \rho_S(y).$$

Folglich sind (KB11), (KB12) und (KB13) für $0 \leq t < \min(t_y^+, t_2)$ erfüllt. Mittels einer ähnlichen Argumentation zeigt man die Behauptung auch für negatives t. □

Beweis von Satz 3.7.6, Fortsetzung: Bevor es um die Offenheit von J und die Stetigkeit von γ geht, soll gezeigt werden, daß γ der Bedingung $(\mathrm{IF})_{\max}$ genügt. Nehmen wir an, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es ein $y \in X$ mit $t_y^+ < \infty$ (oder $t_y^- > -\infty$), eine kompakte Menge $K \subset X$ und eine monoton wachsende (bzw. fallende) Folge $(s_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset]t_y^-, t_y^+[$, so daß $\gamma_y(s_j) \in K$ und $\lim_{j\to\infty} s_j = t_y^+$ (bzw. $\lim_{j\to\infty} s_j = t_y^-$). Wir betrachten im folgenden nur den ersten Fall $s_j \to t_y^+$, der zweite verläuft analog. Nach eventueller Auswahl einer Teilfolge konvergiert $\gamma_y(s_j)$ gegen ein Element $x \in K$. Sei S das Stratum, in dem x liegt, und R dasjenige mit $y \in R$. Falls $R = S$ ergibt sich ein Widerspruch zu der Tatsache, daß γ_R der maximale Integralfluß von V_R ist, also muß $S < R$ gelten. Wählt man nun j genügend groß, so liegen die Punkte $y_j := \gamma_y(s_j)$ in der Umgebung U aus Lemma 3.7.7, und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$0 \leq s_{j+k} - s_j < t_y^+ - s_j = t_{y_j}^+ \quad \text{sowie} \quad 0 \leq s_{j+k} - s_j < t_2.$$

Aufgrund von (KB13) folgt dann

$$0 < \rho_S(y_j) = \rho_S(\gamma(y_j, s_{j+k} - s_j)) = \rho_S(\gamma(\gamma(y, s_j), s_{j+k} - s_j)) = \rho_S(\gamma(y, s_{j+k})) = \rho_S(y_{j+k}).$$

Das bedeutet aber, daß die Folge $(\rho_S(y_j))_{j\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergieren kann, was im Widerspruch zu $\rho_S(x) = 0$ steht. Folglich ist $(\mathrm{IF})_{\max}$ doch richtig.

Als nächstes soll für $(x, s) \in J$ eine offene Umgebung von in J konstruiert werden. Seien t_1, t_2 derart, daß $t_x^- < t_1 < s < t_2 < t_x^+$. Nehmen wir an, es wäre $t_y^+ < t_2$ für ein $y \in U$, wobei U eine Umgebung von x gemäß Lemma 3.7.7 ist. Dann existiert eine gegen t_y^+ konvergierende Folge von Elementen $s_j \in [0, t_y^+[$. Sei $y_j = \gamma(y, t_j)$ für alle j. Wegen (KB12) und (KB13) gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \pi_S(y_j) &= \gamma(\pi_S(y), t_y^+),\\ \lim_{j\to\infty} \rho_S(y_j) &= \rho_S(y).\end{aligned}$$

Da $(\pi_S, \rho_S) : T_S \to [0, \varepsilon_S[$ eigentlich ist, besitzt damit $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, was im Widerspruch zu $(\mathrm{IF})_{\max}$ steht. Also folgt $t_y^+ \geq t_2$, und in analoger Weise $t_y^- \leq t_1$, woraus sich insgesamt $U\times]t_1, t_2[\subset J$, also die Offenheit von J ergibt. Da zudem (KB12) und (KB13) für alle $(y, t) \in U\times]t_1, t_2[$ gelten, ist γ an der Stelle (x, s) und damit auf ganz J stetig.

Der Satz ist damit gezeigt, wenn zum Schluß noch nachgewiesen werden kann, daß jeder stratifizierte Integralfluß $\tilde{\gamma}$ von V, der der Bedingung $(\mathrm{IF})_{\max}$ genügt, schon gleich γ ist. Das ist jedoch offensichtlich, denn jede der Einschränkungen $\tilde{\gamma}_{|S} : \tilde{J}_{|S} = \tilde{J}\cap(S\times\mathbb{R}) \to S$ muß wegen $(\mathrm{IF})_{\max}$ ein maximaler Integralfluß sein, stimmt also mit γ_S überein. □

3.7.8 Korollar *Sei* $f : X \to M$ *eine eigentliche kontrollierte Abbildung zwischen dem kontrollierten Raum* X *und der Mannigfaltigkeit* M*. Für je zwei kontrollierte Vektorfelder* $V : X \to TX$ *und* $W : M \to TM$*, die die Kontrollbedingung* (KB10) $Tf \circ V = W \circ f$ *erfüllen, gilt*

$$J_V = (f \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}})^{-1}(J_W),$$

wobei J_W *den Definitionsbereich des Flusses von* W *bezeichnet, und* J_V *den von* V*.*

3.8 Fortsetzungssätze auf kontrollierten Räumen

In diesem Abschnitt wollen wir die in 1.7 vorgestellte Fortsetzungstheorie glatter Funktionen auf stratifizierten Räumen weiterführen. Das in 1.7 bewiesene Hauptresultat erlaubt es, geeignete Jets auf dem Abschluß $\overline{S}$ eines Stratums zu einer Whitney-Funktion auf X fortzusetzen, gibt jedoch noch kein allgemeingültiges Kriterium dafür an, wann eine glatte Funktion auf S, selbst wenn sie dem Rand gegenüber schnell genug abfällt, zu einer glatten Funktion auf X erweitert werden kann. Erst mit Hilfe eines Kontrolldatums für X gelingt es, ein solches Fortsetzungstheorem für glatte Funktionen zu formulieren und zu beweisen.

Für unsere Fortsetzungstheorie benötigen wir als nächstes einen intrinsischen Begriff für das Abfallverhalten einer glatten Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ auf einem Stratum S gegenüber dem Rand ∂S. Die entsprechende Definition 1.7.1 für Whitney-Funktionen läßt sich nicht unmittelbar auf glatte Funktionen übertragen, da für derartige Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ die höheren Ableitungen $\partial^\alpha f$ schließlich global nicht zur Verfügung stehen. Um doch noch zu einem geeigneten Begriff von Flachheit auf dem Rand zu kommen, erweitern wir die von Ferrarotti–Wilson [53, Sec. I] für spezielle singuläre Unterräume im $\mathbb{R}^n$ angegebene Definition auf den Fall beliebiger (A)-stratifizierter Räume.

3.8.1 Definition Sei μ eine glatte Riemannsche Metrik auf einem (A)-stratifizierten Raum X, und $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine $\mathcal{C}^m$-Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ auf einem Stratum S von X heißt *geometrisch flach am Rand* von der *Ordnung* $c \in \mathbb{R}^{>0}$, falls für alle natürlichen $k \leq m$ und alle $y \in \partial S$

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in S}} \frac{\|\nabla^k f(x)\|_\mu}{\delta_\mu(x, \partial S)^c} = 0.$$

Dabei ist ∇ der durch μ auf S induzierte Levi–Civita-Zusammenhang auf den Tensoren über S, $\|\cdot\|_\mu$ die Norm eines Tensors bezüglich μ, und δ_μ der von μ induzierte geodätische

Abstand auf S. Falls f geometrisch flach am Rand von beliebiger Ordnung ist, so sagen wir, f sei *geometrisch flach am Rand.*

3.8.2 Erläuterungen Zur Erinnerung: es gilt $\nabla^0 f = f$, $\nabla^1 f = df$ und $\nabla^k f = \nabla(\nabla^{k-1} f)$ für $k \geq 2$. Ist f bezüglich einer glatten Riemannschen Metrik μ geometrisch flach, so auch bezüglich jeder anderen glatten Riemannschen Metrik η auf X. Dies liegt daran, daß μ und η lokal äquivalent und beide glatt sind. Damit ist der Begriff der geometrischen Flachheit am Rand unabhängig von der speziellen Wahl der glatten Metrik auf X.

Nun kommen wir zu unserem Hauptsatz.

3.8.3 Fortsetzungssatz *Sei $m \in \mathbb{N}^{>0}$, X ein (A)-stratifizierter Raum, und μ eine glatte Riemannsche Metrik auf X. Sei S ein (r, l)-reguläres und von der Ordnung $m + 3$ krümmungsmoderates Stratum von X, und T_S die durch Orthogonalprojektion bezüglich μ induzierte Tube von S. Ist dann $c \geq c_S^m(r, l)$ genügend groß, so kann jede am Rand von der Ordnung c geometrisch flache Funktion $g \in \mathcal{C}^m(S)$ zu einer Funktion $f \in \mathcal{C}^m(X)$ derart fortgesetzt werden, daß*

$$f_{|T_S^\delta} = g \circ \pi_{S|T_S^\delta} .$$

Dabei ist $\delta : S \to \mathbb{R}^{>0}$ eine geeignete (glatte) Funktion.

Beweis: Wir können annehmen, daß X abgeschlossen in einer offenen beschränkten Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ liegt; den allgemeinen Fall spielt man dann mit Hilfe einer glatten Teilung der Eins, die einer Kartenüberdeckung untergeordneten ist, auf die im folgenden gezeigte Aussage zurück. Aufgrund der Voraussetzungen an S sind nach Proposition 3.3.14 die Komponenten der Projektion $\pi := \pi_S$ temperiert von der Klasse $\mathcal{C}^m$. Schließlich erinnern wir noch daran, daß die Einschränkung von μ eine Riemannsche Metrik auf S definiert. Der zugehörige Levi-Civita-Zusammenhang werde mit ∇ bezeichnet. Unter diesen Annahmen betrachten wir den auf $\overline{S}$ definierten Jet G, der über S durch die glatte Funktion $g \circ \pi$ induziert ist, und der auf dem Rand ∂S verschwindet. Um nachzuweisen, daß G sogar eine Whitney-Funktion ist, müssen wir nach dem verallgemeinerten Lemma von Hesténès 1.7.2 nur zeigen, daß G von der Ordnung $c_S^m(r, l)$ flach über dem Rand ∂S ist. Seien dazu $V_1, V_2, \cdots, V_k, \cdots$ beliebige konstante Vektorfelder $V_k : T \to \mathbb{R}^n$, mit anderen Worten verschwinden also alle Ableitungen DV_k. Da die Funktionen $T\pi.V_k$ Vektorfelder entlang π darstellen, ist die kovariante Ableitung $\nabla_{V_j} T\pi.V_k$ entlang π in Richtung V_j definiert (siehe Klingenberg [94, Prop. 1.5.5]). Unter Verwendung lokaler Koordinaten auf S und der zugehörigen Christoffel-Symbole rechnet man nun nach, daß folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned}
&D(g \circ \pi).V_1 = \langle dg, T\pi.V_1 \rangle, \\
&D^2(g \circ \pi).(V_1, V_2) = D\langle dg, T\pi.V_2 \rangle.V_1 = \left\langle \nabla^2 g, T\pi.V_1 \otimes T\pi.V_2 \right\rangle + \langle dg, \nabla_{V_1} T\pi.V_2 \rangle \\
&D^3(g \circ \pi).(V_1, V_2, V_3) = \left\langle \nabla^3 g, T\pi.V_1 \otimes T\pi.V_2 \otimes T\pi.V_3 \right\rangle + \langle dg, \nabla_{V_1} \nabla_{V_2} T\pi.V_3 \rangle \\
&\qquad + \left\langle \nabla^2 g, \nabla_{V_1} T\pi.V_2 \otimes T\pi.V_3 + T\pi.V_2 \otimes \nabla_{V_1} T\pi.V_3 + T\pi.V_1 \otimes \nabla_{V_2} T\pi.V_3 \right\rangle .
\end{aligned}$$

Mittels eines Induktionsarguments schließt man in analoger Weise, daß für $k \leq m$

$$D^k(g \circ \pi).(V_1, \cdots, V_k) = \sum_{1 \leq j \leq k} \langle \nabla^j g, T_{jk} \rangle,$$

wobei T_{jk} ein j-faches kontravariantes Tensorfeld darstellt, das sich als Summe von Tensorprodukten von Vektorfeldern der Form $\nabla_{\mathsf{V}_{i_1}} \cdots \nabla_{\mathsf{V}_{i_l}} \mathsf{T}\pi.\mathsf{V}_{i_0}$ mit $l \leq k - j$ darstellen läßt.

Ab sofort nehmen wir an, jedes der Vektorfelder V_i sei eines der Basiselemente $e_1, \cdots, e_n$. Da S krümmungsmoderat von der Ordnung m ist und π temperiert von der Klasse $\mathcal{C}^{\mathsf{m}}$, folgt aus der Beziehung $\nabla_{\mathsf{V}_1}\mathsf{T}\pi.\mathsf{V}_2(x) = \mathsf{P}_{\pi(x)}\mathsf{D}(\mathsf{T}\pi.\mathsf{V}_2)(x).\mathsf{V}_1(x)$, daß $\nabla_{\mathsf{V}_1}\mathsf{T}\pi.\mathsf{V}_2$ fern von $\partial\mathsf{S}$ beschränkt ist (zur Erinnerung: die Sprechweise “fern von Z beschränkt” wurde im Beweis von 3.3.6 auf S. 108 eingeführt). Induktiv ergibt sich dann die Beschränktheit fern von $\partial\mathsf{S}$ der Vektorfelder $\nabla_{\mathsf{V}_{i_1}} \cdots \nabla_{\mathsf{V}_{i_l}} \mathsf{T}\pi.\mathsf{V}_{i_0}$, $l \leq \mathsf{m}$. Folglich existiert zu jedem Punkt von $\partial\mathsf{S}$ eine relativ kompakte Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ zusammen mit Konstanten $\mathsf{C}_j > 0$ und $\mathsf{c}_j \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|\mathsf{T}_{jk}(x)\| \leq \mathsf{C}_j \left(1 + \frac{1}{\mathsf{d}(x, \partial\mathsf{S})^{\mathsf{c}_j}}\right), \qquad x \in W \cap \mathsf{S}. \tag{3.8.1}$$

Da g aufgrund der Voraussetzung von genügend hoher Ordnung geometrisch flach ist und wegen der Gültigkeit des Axioms (RA1) auf S. 52 existiert zu einer später zu bestimmenden Konstanten $\mathsf{d} \in \mathbb{N}$ ein $\mathsf{C} > 0$, so daß

$$\|\nabla^l \mathsf{g}(x)\| \leq \mathsf{C}\, \mathsf{d}(x, \partial\mathsf{S})^{\mathsf{c}_j + \mathsf{c}_{\mathsf{S}}^{\mathsf{m}}(\mathsf{r},\mathsf{l}) + \mathsf{d} + 1}, \qquad x \in W \cap \mathsf{S},$$

für alle $j, l \leq k$. Das impliziert aber die Existenz einer geeigneten Konstanten $\tilde{\mathsf{C}} > 0$, so daß

$$\|\mathsf{D}^k(\mathsf{g} \circ \pi)(x)\| \leq \tilde{\mathsf{C}}\, \mathsf{d}(x, \partial\mathsf{S})^{\mathsf{c}_{\mathsf{S}}^{\mathsf{m}}(\mathsf{r},\mathsf{l}) + \mathsf{d} + 1}, \qquad x \in W \cap \mathsf{S}.$$

Folglich sind die Voraussetzungen des verallgemeinerten Lemmas von Hesténès erfüllt, also ist G eine Whitney-Funktion auf $\overline{\mathsf{S}}$. Insbesondere gilt dann für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq \mathsf{m}$, falls $x, y \in \overline{\mathsf{S}}$ gegen ein $z \in \overline{\mathsf{S}}$ streben, die Abschätzung

$$(\mathsf{R}_x^{\mathsf{m}}\mathsf{G})^{(\alpha)} = o\big(|x - y|^{\mathsf{m} - |\alpha|}\big). \tag{3.8.2}$$

Damit sind wir jedoch noch nicht fertig, denn es bleibt noch zu zeigen, daß eine glatte Funktion $\mathsf{f} : \mathsf{O} \to \mathbb{R}$ derart gewählt werden kann, daß $\mathsf{f} = \mathsf{g} \circ \pi$ auf einer Umgebung von S. Um ein solches f zu konstruieren, erinnern wir als nächstes daran, daß nach Voraussetzung an S die tubulare Umgebung T_{S} regulär situiert zu S ist. Also gibt es eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \partial\mathsf{S} \to [0, 1]$ derart, daß φ von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ temperiert relativ $\partial\mathsf{S}$ ist, daß $\varphi = 1$ auf einer Umgebung von S gilt, und φ auf einer Umgebung von $\complement\mathsf{T}_{\mathsf{S}} \setminus \partial\mathsf{S}$ verschwindet. Wir definieren $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nun durch

$$\mathsf{f}(y) = \begin{cases} \varphi(y)\, \mathsf{g}(\pi(y)), & \text{falls } y \in \mathrm{T}, \\ 0, & \text{falls } y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{T}. \end{cases}$$

Ist nun d bzw. c groß genug gewählt, so folgt wegen der Temperiertheit von φ, daß das so definierte f tatsächlich eine $\mathcal{C}^{\mathsf{m}}$-Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und damit auch auf X darstellt. Da φ auf einer Umgebung von S identisch 1 ist, genügt somit f der Behauptung des Fortsetzungssatzes. □

3.8.4 Bemerkung Ferrarotti–Wilson haben in [53] für singuläre Unterrräume des $\mathbb{R}^n$ mit einem dichten Top-Stratum und der Differenzierbarkeitsklasse $\mathsf{m} \leq 2$ ein analoges Fortsetzungsresultat bewiesen.

3.9 Das erste Isotopielemma von Thom

3.9.1 Definition Eine stratifizierte Abbildung $f : X \to M$ von einem stratifizierten Raum X in eine Mannigfaltigkeit M heißt *trivial*, falls es einen stratifizierten Raum Y und einen Isomorphismus stratifizierter Räume $H : Y \times M \to X$ derart gibt, daß $f \circ H(y, x) = x$ für alle $y \in Y$ und $x \in M$.

Man sagt, f sei *lokal trivial*, falls eine Überdeckung von M durch offene Mengen U derart existiert, daß alle Einschränkungen $f_{|f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ trivial sind.

3.9.2 Erstes Isotopielemma von Thom *Sei* X *ein kontrollierter Raum,* M *ein glatte Mannigfaltigkeit, und* $f : X \to M$ *eine eigentliche kontrollierte Submersion. Dann ist* f *lokal trivial.*

Beweis: Da es sich um eine lokale Aussage handelt, genügt es, für den Fall $M = \mathbb{R}^n$ einen Isomorphismus stratifizierter Räume $H : X_0 \times \mathbb{R}^n \to X$ derart zu konstruieren, daß $f \circ H(y, v) = v$ für alle $y \in X_0$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dabei ist $X_0 := f^{-1}(0)$ die Faser von f über 0 gemäß Beispiel 3.6.6.

Zu den Koordinatenvektorfeldern $e_1 = \frac{\partial}{\partial v_1}, \cdots, e_n = \frac{\partial}{\partial v_n}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ wähle man sich nach Satz 3.7.3 kontrollierte Vektorfelder $E_1, \cdots, E_n$ auf X, so daß $Tf \circ E_k = e_k \circ f$ für $k = 1, \cdots, n$. Da die Vektorfelder e_k global integrierbar sind, folgt aus Korollar 3.7.8, daß dies auch für die Vektorfelder E_k gilt, daß also für jedes k der Definitionsbereich J_k des maximalen Integralflusses γ_k von E_k gleich $X \times \mathbb{R}$ ist. Damit können wir für alle $y \in X_0$ und $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren:

$$H(y, v) = \gamma_n(\gamma_{n-1}(\cdots(\gamma_1(x, v_1), \cdots, v_n).$$

Umgekehrt kann man eine Abbildung $G : X \to X_0 \times \mathbb{R}^n$ durch

$$G(x) = \big(\gamma_n(\gamma_{n-1}(\cdots(\gamma_1(x, -v_1), \cdots, -v_n), f(x)\big), \quad (v_1, \cdots, v_n) := f(x), \ x \in X$$

festlegen. Da für alle $x \in X$

$$f(\gamma_k(x, t)) = f(x) + te_k, \tag{3.9.1}$$

liegt $G(x)$ auch wirklich in $X_0 \times \mathbb{R}^n$, das heißt G ist wohldefiniert. Zudem ergibt sich aus (3.9.1), daß $f \circ H(y, v) = v$ für $y \in X_0$ und $v \in \mathbb{R}^n$.

Aus der Tatsache, daß alle γ_k Flüsse sind, folgt schließlich, daß $G \circ H = \mathrm{id}_{X \times \mathbb{R}^n}$ und $H \circ G = \mathrm{id}_X$, sowie daß G und H stratifizierte Abbildungen sind. Damit ist H ein stratifizierter Isomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften, und das Isotopielemma ist gezeigt. □

Mit Hilfe des ersten Isotopielemmas ist der Beweis der in Prop. 3.6.7 behaupteten Eigenschaft (6) eines eigentlichen Kontrolldatums offensichtlich.

Beweis von Prop. 3.6.7 (6): Für jedes eigentliche Kontrolldatum $(T_S)_{S \in \mathcal{S}}$ von X und jedes Stratum S ist die Abbildung $(\pi_S, \rho_S) : T_S \setminus S \to]0, \varepsilon_S[$ eine eigentliche Submersion, nach dem Isotopielemma also lokal trivial. Das impliziert aber insbesondere, daß für jedes Stratum $R > S$ die Einschränkung $(\pi_{S,R}, \rho_{S,R}) : T_{S,R} \to]0, \varepsilon_S[$ lokal trivial, also eine differenzierbare Faserung ist. □

3.9.3 Korollar *Jeder Whitney-stratifizierte Raum ist lokal trivial mit Kegeln als typischer Faser.*

Beweis: Da X nach kontrollierbar ist, und $(\pi_S, \rho_S) : T_S \setminus S \to]0, \varepsilon_S[$ für jedes Stratum S eine eigentliche Submersion (wobei das Kontrolldatum $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ geeignet gewählt sei), folgt die Behauptung sofort aus dem ersten Isotopielemma. □

Als eine wichtige Folgerung aus der lokalen Trivialität ergibt sich der Satz, daß für jeden stratifizierten Raum die abgeschlossene Hülle eines Stratums durch eine Mannigfaltigkeit-mit-Rand in einem gewissen Sinne "aufgelöst" werden kann. Dieses Resultat stammt von Verona [157] und soll im folgenden bewiesen werden.

3.9.4 Satz (Verona [157, Prop. 2.6]) *Sei X ein kontrollierbarer stratifizierter Raum endlicher Dimension derart, daß $\partial X \neq \emptyset$, $\overline{X^\circ} = X$ und so daß X° eine Mannigfaltigkeit der Dimension d ist. Dann existieren eine $(d-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Q (ohne Rand), ein eigentliches Kontrolldatum $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ von X, sowie eine eigentliche stetige Abbildung $H : Q \times [0,1] \to X$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $H(Q\times]0,1[) \subset X^\circ$ *und* $H_{|Q\times]0,1[}$ *ist eine glatte Einbettung.*

(2) $H(Q \times \{0\}) = \partial X$.

(3) *Das Bild von H stellt eine Umgebung von ∂X in X dar.*

(4) *Falls $y \in Q$ und $x = h(y, 0)$ ein Punkt des Stratums S ist, so existieren eine Umgebung $U \subset Q$ von y und ein Stratum $R \leq S$ derart, daß für jedes $\tilde{y} \in U$ und $t \in [0, 1[$ die Beziehungen $H(\tilde{y}, t) \in T_R$ und $\pi_R(H(\tilde{y}, t)) = \pi_R(H(\tilde{y}, 0))$ gelten.*

3.9.5 Bemerkung In Verona [158, Prop. 1.3] ist die Behauptung aufgestellt worden, daß zu jedem Whitney-Raum X die Abbildung h als $\mathcal{C}^1$-Abbildung gewählt werden kann. Dies stimmt im allgemeinen nicht, denn sonst hätte jeder Whitney-Raum ein lokal endliches Volumen, was im Widerspruch zu dem von Ferrarotti [50, 52] konstruierten Beispiel eines Whitney-stratifizierten Raums mit nicht lokal endlichem Volumen stünde. Man beachte aber, daß zu jeder subanalytischen Menge die Abbildung h von der Klasse $\mathcal{C}^1$, ja sogar von der Klasse $\mathcal{C}^\omega$ gewählt werden kann (Hironaka [80], siehe auch Bierstone–Milman [12]).

Beweis: Sei $0 \leq d_0 < d_1 < \cdots < d_k = d$ die Folge der Dimensionen der Strata von X, und k die dadurch definierte *Dimensionstiefe* von X. Wegen $\partial X \neq \emptyset$ muß $k \geq 1$ gelten. Sei weiter $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$ ein eigentliches Kontrolldatum von X, das im Fall, daß X ein krümmungsmoderater Whitney-Raum ist, normal und krümmungsmoderat von der Ordnung m sein soll. Schließlich sei S die Vereinigung aller Strata kleinster Dimension d_0. Nach Proposition 3.6.7 ist dann $\phi := (\pi_{S,X^\circ}, \rho_{S,X^\circ}) : T_S \cap X^\circ \to]0, \varepsilon_S[$ eine differenzierbare Faserung, und $S^\varepsilon := \phi^{-1}([\varepsilon])$ mit $\varepsilon := \frac{1}{3}\varepsilon_S$ eine $(d-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von X° (siehe 3.1.1 für die Definition von $[\varepsilon]$). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir nach eventueller Verkleinerung von ε_S annehmen, daß $T_S = T_S^{16\varepsilon_S}$ gilt, und $(\pi_S, \rho_S) : T_S \to [0, 16\varepsilon_S[$ eigentlich ist. Nach diesen grundlegenden Vereinbarungen führen wir den Beweis in mehreren Schritten.

1. Schritt Bereitstellung einiger hilfreicher glatten Abbildungen.
Sei $\varphi : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ eine die Ecke glättende Funktion gemäß Lemma C.4.1, und $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine weitere glatte Funktion derart, daß $\chi(s) = 0$ für $s \leq 0$, $\chi'(s) > 0$ für $0 < s < 1$ und $\chi(s) = 1$ für $s \geq 1$. Die glatte Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \chi((s-\frac{1}{2})^2)\varphi(s,1)$ kürzen wir dann mit dem Buchstaben c ab, und ihre Komponenten mit c_1 und c_2.

2. Schritt Betrachtung des Integralflusses zu einem radialen Vektorfeld.
Zuerst wähle man sich ein radiales Vektorfeld V auf X, so daß

$$\phi_*(V(x)) = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad x \in T_S.$$

Zudem verlangen wir $V_{|S} = 0$. Sei nun $\gamma : J^\circ \to X^\circ$ der Integralfluß von $V^\circ := V_{|X^\circ}$. Dann genügt für jedes $x \in X^\circ$ die Integralkurve γ_x der Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial t}\rho_S(\gamma_x(t)) = -1$ mit Anfangswert $\rho_S(x)$, das heißt es gilt

$$\rho_S(\gamma_x(t)) = t + \rho_S(x).$$

Daraus ergibt sich, daß der Integralfluß durch $\gamma_x(-\rho_S(x)) = \pi_S(x)$ zu einer stetigen Abbildung $\gamma : J \to X$ mit

$$J = \{(x,t) \in (X^\circ \cap T_S) \times \mathbb{R} \mid -\rho_S(x) \leq t < 2\varepsilon_S(\pi_S(x)) - \rho_S(x)\},$$

ausgedehnt werden kann, die auf $J \cap (X^\circ \times \mathbb{R})$ natürlich glatt ist. Die Funktion

$$G : T_S^{\varepsilon_S} \times [0,2[\to X, \quad (x,t) \mapsto \gamma_x\left((t-1)\,\rho_S(x)\right)$$

ist dann stetig und glatt auf $(T_S^{\varepsilon_S} \setminus S) \times]0,2[$. Aufgrund der Eigenschaften des Integralflusses gibt es zudem eine glatte Funktion $\delta : X^\circ \to \mathbb{R}^{>0}$ mit den Eigenschaften

$$\delta(x) \quad \begin{cases} = t, & \text{falls } x = G(y,t) \text{ mit } y \in S^\varepsilon \text{ und } t \in]0,3/2[, \\ \geq t, & \text{falls } x = G(y,t) \text{ mit } y \in S^\varepsilon \text{ und } t \in]3/2,2[, \\ \geq 2, & \text{falls } x \notin G(S^\varepsilon \times]0,2[). \end{cases}$$

Damit haben wir weitere wesentliche Zutat für den Beweis des Satzes, den wir nun durch Induktion nach k führen.

3. Schritt: Nachweis der Behauptung für $k = 1$.
Aufgrund der Eigenschaften des Integralflusses γ erfüllen die Mannigfaltigkeit $Q := S^\varepsilon$ und die Abbildung $H := G_{|S^\varepsilon \times [0,1[}$ die obigen Bedingungen (1) bis (4), das heißt die Behauptung folgt für $k = 1$.

4. Schritt: Beginn des Induktionsschlußes, Konstruktion eines Integralflusses.
Nehmen wir als nächstes an, der Satz sei richtig für alle Räume der Dimensionstiefe $\leq k$, und X sei ein Raum der Dimensionstiefe $k+1$. Mit S aus dem 1. Schritt sei $X' := X \setminus S$. Da die folgenden Konstruktionen für jede Zusammenhangskomponente von S getrennt durchgeführt werden können, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß S zusammenhängend ist. Nach Induktionsvoraussetzung existieren eine $(d-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Q' und eine stetige Abbildung $H' : Q' \times [0,2[\to X'$, so daß $H'_{|Q' \times [0,1]}$ der Behauptung des Satzes bezüglich X' genügt, und $H'_{|Q' \times]0,2[}$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

Ziel der folgenden Konstruktionen ist es nun, die Mannigfaltigkeiten Q' und S^ε sowie die Abbildungen H' und G in geeigneter Weise zusammenzukleben, so daß die resultierenden Objekte die gewünschten Eigenschaften haben. Die Schwierigkeit liegt dabei darin, die sich durch den Schnitt von $H'(Q' \times r)$, $0 < r < 1$ und S^ε ergebende Ecke zu glätten.

Um dies zu erreichen bemerken wir zuerst, daß aufgrund von (4) eine glatte Funktion $r' : Q' \to \mathbb{R}^{>0}$, $r' \leq \frac{2}{3}$ existiert, so daß für alle $(y,t) \in Q' \times [0,1[$ mit $t \leq \frac{3}{2} r'(y)$ und $H'(y,0) \in \overline{T}_S^{3\varepsilon_S/2}$ die Relationen $H'(y,t) \in T_S$ und $\pi_S(H'(y,t)) = \pi_S(H'(y,0))$ sowie $\rho_S(H'(y,t)) = \rho_S(H'(y,0))$ gelten. Dann sind aber die Untermannigfaltigkeiten $H'([r'])$ und S^ε von X° für alle $0 < s \leq 1$ transversal, und ihr Schnitt $B := H'([r']) \cap S^\varepsilon$ stellt eine $(d-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit dar. Wir wählen nun eine weitere glatte Funktionen $r : X^\circ \to \mathbb{R}^{>0}$ derart, daß

$$r(x) \begin{cases} = \frac{t}{r'(y)}, & \text{falls } x = H'(y,t) \text{ mit } (y,t) \in Q' \times]0,3/2], \\ \geq \frac{t}{r'(y)}, & \text{falls } x = H'(y,t) \text{ mit } (y,t) \in Q' \times]3/2,2[, \\ \geq 2, & \text{falls } x \notin H'(Q' \times]0,2[), \end{cases}$$

Die Funktion $Q' \times [0,2[\to X$, $(y,t) \mapsto H'(y, t\, r'(y))$ bezeichnen wir im folgenden mit H''. Man erhält aus H'' ein Vektorfeld $W : U \to TX$, $x = H''(y,t) \mapsto \frac{\partial}{\partial s} H''(y, t+s)\big|_{s=0}$, über der offenen Menge $U := H''(Q' \times]0,3/2[)$. Den Integralfluß von W bezeichnen wir mit $\zeta : I^\circ \to U$, wobei

$$I^\circ = \big\{(x,s) \in U \times \mathbb{R} \,\big|\, x = H''(y,t) \text{ und } 0 < s + t < \tfrac{3}{2}\big\}.$$

Anschließend ziehen wir das radiale Vektorfeld $V : X \to TX$ mit dem Integralfluß $\gamma : J^\circ \to Y$ aus dem 2. Schritt heran. Wesentlich für das Folgende ist nun die Beobachtung, daß die Flüsse γ und ζ kommutieren, da aufgrund der Voraussetzung an H' und der Definition von V und W die die beiden Vektorfelder V und W kommutieren.

5. Schritt: Fortsetzung des Induktionsschlußes, Konstruktion von Q.
Nun können wir $Q \subset X^\circ$ als die Vereinigung $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$ der Mengen

$$\begin{aligned} Q_1 &= \big\{H'\big(y, \tfrac{1}{3} r'(y)\big) \,\big|\, y \in Q' \text{ und } \delta\big(H'\big(y, \tfrac{1}{3} r'(y)\big)\big) \geq \tfrac{5}{6}\big\}, \\ Q_2 &= \big\{H''(G(b, c_2(s)), c_1(s)) \,\big|\, b \in B \text{ und } s \in]0,1[\big\}, \\ Q_3 &= \big\{x \in S^{\varepsilon/81} \,\big|\, r(x) \geq \tfrac{5}{6}\big\} = \big\{x \in G\big(S^\varepsilon \times \{\tfrac{1}{3}\}\big) \,\big|\, r(x) \geq \tfrac{5}{6}\big\}, \end{aligned}$$

definieren, und stellen fest, daß Q sogar eine $d-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von X° darstellt, da ihre Komponenten Untermannigfaltigkeiten sind, und $Q_i \cap Q_j$, $i,j = 1,2,3$ jeweils offen in Q_j sind. Zum genauen Nachweis dieser Tatsache benutzt man dabei die Definition der Funktionen r und δ, die der Funktionen H'' und G sowie schließlich noch das Faktum, daß sich $H''(Q' \times \frac{1}{3})$ und S^ε transversal in B schneiden.

6. Schritt: Ende des Induktionsschlußes, Konstruktion von F.
Wir geben drei Funktionen $H_i : Q_i \times]0,1] \to X$, $i = 1,2,3$ mit den gewünschten Eigenschaften an. Für $y \in Q_1$ setzen wir $H_1(y,t) = \zeta(y, \frac{t}{3} - 1)$, falls $y = H''(G(b, c_2(s)), c_1(s))$ mit $b \in B$ und $s \in]0,1[$ sei $H_2(y,t) = H''(G(b, \varphi_2(s,t)), \varphi_1(s,t))$, und schließlich werde noch $H_3(y,t) = \gamma(y, \frac{t}{3} - 1)$ für $y \in Q_3$ festgelegt. Man prüft nun leicht nach, daß die Funktionen H_i und H_j auf dem Durchschnitt $(Q_i \cap Q_j) \times]0,1]$ übereinstimmen. Dabei

muß die Tatsache verwendet werden, daß die Integralflüsse γ und ζ vertauschen. Insgesamt erhalten wir somit eine glatte Funktion $H : Q\times]0,1] \to X$, deren Einschränkung auf $Q\times]0,1[$ einen Diffeomorphismus auf ihr Bild darstellt. Man sieht nun ebenfalls unter Verwendung der Kommutativität der Flüsse γ und ζ, daß sich H zu einer stetigen Funktion $H : Q \times [0,1] \to X$ fortsetzen läßt, und daß dann die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt sind. $\square$

Aus dem Satz ergibt sich durch ein einfaches "Klebeargument" unmittelbar das folgende Resultat.

3.9.6 Korollar *Sei X ein kontrollierbarer stratifizierter Raum und S ein Stratum der Dimension d mit $\partial S \neq \emptyset$. Dann existieren eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit-mit-Rand M und eine eigentliche stetige Abbildung $f : M \to X$ derart, daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(1) *Es gilt $f(M^\circ) = S$, und $f_{|M^\circ}$ ist eine glatte Einbettung.*

(2) $f(\partial M) = \partial S$.

3.9.7 Eine eigentliche stetige Abbildung $f : M \to X$ zu einem Stratum S von X wie im Korollar nennen wir eine *Auflösung* von S.

Ist jedoch X allgemeiner ein (A)-stratifizierter Raum der Klasse $\mathcal{C}^m$, so heißt ein Stratum $S \subset X$ *temperiert auflösbar* von der *Klasse* $\mathcal{C}^m$, wenn es eine berandete Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer eigentlichen $\mathcal{C}^m$-Abbildung $f : M \to \overline{S}$ gibt, die den folgenden Bedingungen genügen:

(RT1) $f_{|M^\circ} : M^\circ \to S$ ist ein $\mathcal{C}^m$-Diffeomorphismus.

(RT2) Sei μ eine glatte Riemannsche Metrik der Klasse auf X und $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ eine eigentliche Einbettung. Dann sind die Komponenten $\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m$ der Komposition $\overline{f} := \iota \circ {f_{|M^\circ}}^{-1} : S \to \mathbb{R}^m$ *geometrisch temperiert* von der *Klasse* $\mathcal{C}^m$, das heißt zu jedem Punkt $y \in \partial S$ gibt es eine Umgebung V sowie Konstanten $c \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ derart, daß für alle $k \leq m$

$$\|\nabla^k f(x)\|_\mu \leq C\left(1 + \frac{1}{\delta_\mu(x, \partial S)^c}\right), \qquad x \in V. \tag{3.9.2}$$

3.9.8 Beispiel Aufgrund der schon erwähnten Arbeit [80] von HIRONAKA ist jedes Stratum der kanonischen Stratifizierung einer subanalytischen Menge von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ temperiert auflösbar. Dies liegt letztlich daran, daß es nach HIRONAKA für jede subanalytische Menge (lokal) eine bimeromorphe Auflösung der Singularitäten gibt.

3.10 Kegelräume

Nach Korollar 3.9.3 ist jeder Whitney-Raum X lokal trivial mit Kegeln als typischer Faser, das heißt es gibt eine Überdeckung von X durch offene Mengen U, so daß U durch einen stratifizierten Homöomorphismus k auf ein kartesische Produkt der Form $(S \cap U) \times CL$ abgebildet werden kann, wobei S ein Stratum von X darstellt, und L einen kompakten Whitney-Raum. In der Regel kann man aber k nicht als Diffeomorphismus zwischen stratifizierten Räumen mit glatter Struktur wählen, wie schon das Beispiel der Neilschen Parabel im Reellen zeigt. Zwar ist die Neilsche Parabel $\mathsf{X}_{\mathrm{Neil}} \subset \mathbb{R}^2$ stratifiziert homöomorph zur Kante $\mathsf{X}_{\mathrm{Kante}} = \mathsf{C}\mathsf{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, aber es gibt keinen Diffeomorphismus um den Ursprung von $\mathbb{R}^2$, der (lokal um den Ursprung) die Neilsche Parabel auf $\mathsf{X}_{\mathrm{Kante}}$ abbildet, da sich die Schenkel von $\mathsf{X}_{\mathrm{Neil}}$ in höherer Ordnung berühren als die von $\mathsf{X}_{\mathrm{Kante}}$.

Eine spezielle Klasse stratifizierter Räume ist durch solche Räume gegeben, bei denen der Homöomorphismus k zusätzliche Regularitätseigenschaften aufweist, wie zum Beispiel, daß er glatt oder Lipschitz gewählt werden kann. Man erhält dann verschiedene Kategorien sogenannter Kegelräume, die sich insbesondere gut für weitere geometrisch-analytische Untersuchungen eignen. In diesem Abschnitt werden wir diese Kegelräume mittels einer rekursiven Definition einführen.

Bevor wir dazu kommen, sei noch kurz erwähnt, daß unter $\mathcal{C}^\omega(\mathsf{O})$ (bzw. $\mathcal{C}^{1-}(\mathsf{O})$) mit $\mathsf{O} \subset \mathbb{R}^n$ offen der Raum aller reell analytischen Funktionen (bzw. aller Lipschitz-Funktionen) auf O verstanden werden soll.

3.10.1 Definition Sei $m \in \mathbb{N} \cup \{1-, \infty, \omega\}$. Ein *Kegelraum* der *Klasse* $\mathcal{C}^m$ und *Tiefe* 0 ist die topologische Summe X abzählbar vieler glatter (bzw. für $m = \omega$ reell analytischer) zusammenhängender Mannigfaltigkeiten versehen mit der Stratifizierung, deren Strata S durch die Vereinigung von Zusammenhangskomponenten gleicher Dimension gegeben sind. Ein *Kegelraum* der *Klasse* $\mathcal{C}^m$ und *Tiefe* $d+1$, $d \in \mathbb{N}$ ist ein stratifizierter Raum X mit glatter (bzw. reell analytischer) Struktur, so daß für alle $x \in \mathsf{X}$ eine offene zusammenhängende Umgebung U von x, ein kompakter Kegelraum L der Klasse $\mathcal{C}^m$ und Tiefe d und ein stratifizierter Homöomorphismus

$$\mathsf{k} : \mathsf{U} \to (\mathsf{S} \cap \mathsf{U}) \times \mathsf{C}\mathsf{L}$$

existieren. Falls $m \neq 0$, so wird zusätzlich verlangt, daß L mittels einer festen globalen singulären Karte $\mathsf{l} : \mathsf{L} \hookrightarrow \mathsf{S}^l$ in eine Sphäre eingebettet ist, und k und k^{-1} als Abbildung der Klasse $\mathcal{C}^m$ gewählt werden können. Dabei ist die glatte Struktur auf $\mathsf{C}\mathsf{L}$ die durch l induzierte, das heißt mit anderen Worten durch die globale Karte

$$\mathsf{C}\mathsf{L} \to \mathbb{R}^{l+1}, [t, y] \mapsto t \cdot \mathsf{l}(y), \quad t \in [0,1], y \in \mathsf{L},$$

gegeben. Die Karte $\mathsf{l} : \mathsf{L} \hookrightarrow \mathsf{S}^l$ nennen wir manchmal die *Linkkarte* von L, und k eine *Kegelkarte.*

Ein *Kegelraum* von der *Klasse* $\mathcal{C}^m$ oder kurz $\mathcal{C}^m$-*Kegelraum* ist schließlich ein stratifizierter Raum, so daß für jedes $x \in \mathsf{X}$ eine Umgebung U und ein $d \in \mathbb{N}$ existieren, so daß U ein iterierter Kegelraum der Tiefe d von der Klasse $\mathcal{C}^m$ ist.

3.10.2 Beispiel Nach Mostowski [121] besitzt jede komplex analytische Menge $\mathsf{X} \subset \mathbb{C}^n$ eine sogenannte *Lipschitz-Stratifizierung.* Da für Lipschitz-Stratifizierung ein Isotopielemma gilt, in dem die Trivialisierungen bi-Lipschitz sind, ergeben sich durch komplex-analytische Mengen mit einer Lipschitz-Stratifizierung nach Mostowski nichttriviale Beispiele für $\mathcal{C}^{1-}$-Kegelräume. Desweiteren konnte Parusiński in der Arbeit [131] zeigen, daß jede subanalytische Menge eine Lipschitz-Stratifizierung besitzt, also mit dieser Stratifizierung einen $\mathcal{C}^{1-}$-Kegelraum darstellt.

3.10.3 Beispiel Jede Mannigfaltigkeit-mit-Rand sowie jede Mannigfaltigkeit-mit-Ecken ist ein Kegelraum der Klasse $\mathcal{C}^\infty$, wie man unschwer erkennt. Etwas technische aufwendiger, aber dennoch kanonisch zu beweisen ist die Tatsache, daß jeder Polyeder X mit der durch eine feste Triangulierung $\mathsf{h} : \mathsf{X} \to \mathbb{R}^n$ definierten glatten Struktur ein Kegelraum der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ ist.

3.10.4 Satz *Jeder Kegelraum von der Klasse $\mathcal{C}^m$ mit $m \geq 2$ ist ein Whitneyraum, erfüllt also in jeder singulären Karte die Whitney-Bedingung* (B).

Beweis: Wir betrachten folgende Situation: Vorgegeben sei ein kompakter Kegelraum $\mathsf{L} \subset \mathsf{S}^l$ der Tiefe d, ein Stratum $\mathsf{S}' \subset \mathsf{L}$, eine offene Kugel $\mathsf{B} \subset \mathbb{R}^n$ sowie ein Punkt $x \in \mathsf{B}$. Dann ist $\mathsf{X} = \mathsf{B} \times \mathsf{CL}$ ein Kegelraum der Tiefe $d + 1$, $\mathsf{B} \cong \mathsf{B} \times \{0\}$ und $\mathsf{S} := \mathsf{B} \times (]0, 1[\cdot \mathsf{S}')$ sind Strata von X, und $(x, 0) \in \mathbb{R}^{n+l+1}$ ist ein Punkt von X im Stratum B. Aufgrund von Lemma 1.4.4 und Bemerkung 1.4.6 genügt es dann, das Erfülltsein der Whitney-Bedingung (B) für das Paar (B, S) an der Stelle $x \in \mathsf{B}$ nachzuweisen.

Sei also $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus B mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus S mit $\lim_{k\to\infty} y_k = x$, und die Folge der Sekanten $\ell_k = \overline{x_k y_k}$ konvergiere im projektiven Raum gegen eine Gerade $\ell \subset \mathbb{R}^{n+l+1}$. Wir können dann jedes y_k eindeutig in der Form $y_k = (x'_k, t_k \cdot y'_k)$ mit $x'_k \in \mathsf{B}$, $t_k \in]0, 1[$ und $y'_k \in \mathsf{S}'$ darstellen. Nach eventueller Auswahl von Teilfolgen kann man annehmen, daß die Folge der y'_k gegen ein $y' \in \mathsf{S}'$ strebt, und die Folge der normierten Differenzvektoren

$$\frac{(x_k - x'_k, -t_k \cdot y'_k)}{\sqrt{\|x_k - x'_k\|^2 + t_k^2}}$$

gegen einen Vektor $(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{l+1}$. Dann spannt (v, w) die Gerade ℓ auf, und die Folge der Tangentialräume $\mathsf{T}_{y_k}\mathsf{S}$ konvergiert in der Graßmannschen gegen den Unterraum $\tau = \mathbb{R}^n \times (\operatorname{span} y' + \mathsf{T}_{y'}\mathsf{S}')$. Nach einer weiteren Auswahl von Teilfolgen kann man zudem, da t_k gegen 0 strebt, davon ausgehen, daß entweder $\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_k - x'_k\|}{t_k} = \infty$ gilt oder $r := \lim_{k\to\infty} \frac{\|x_k - x'_k\|}{t_k} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Im ersten Fall folgt $w = 0$, im zweiten $w = -\frac{1}{r+1} y'$. In beiden Fällen ergibt sich also $(v, w) \in \tau$ bzw. $\ell \subset \tau$. Das war zu zeigen. □

3.10.5 Kegelmetriken Besondere Aufmerksamkeit haben in der Geometrischen Analysis singulärer Räume die sogenannten metrischen Kegel erlangt. Diese sehen wie folgt aus. Gegeben sei eine kompakte Mannigfaltigkeit M mit Riemannscher Metrik μ. Auf dem in kanonischer Weise stratifizierten Kegel CM liefert dann

$$\eta_{(t,x)} = dt^2 \oplus t^2\, \mu_x, \qquad (t, x) \in \mathsf{CM} \setminus \{o\} \tag{3.10.1}$$

eine Riemannsche Metrik. Das Paar (CM, η) nennt man dann einen *metrischen Kegel* und η die *Kegelmetrik* über μ. Nun kann man analog wie bei der Definition der Kegelräume fortfahren, bildet also gemäß die Gl. 3.10.1 die Kegelmetrik über η und so weiter. Eine Riemannsche Metrik auf einem Kegelraum X, die lokal durch einen derartigen iterativen Prozeß konstruiert werden kann, nennen wir eine *Kegelmetrik* auf X. Angesichts der interessanten Resultate, die man schon für metrische Kegel erhalten hat, wäre das Studium von allgemeineren Kegelmetriken sicher lohnenswert, wobei jedoch davon auszugehen ist, daß dies sehr aufwendig ist.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen historischen Anmerkungen, die im wesentlichen Lesch [104] entnommen sind. Initiiert wurde das Studium metrischer Kegel von Cheeger [34, 35, 37], Differentialoperatoren der Ordnung 1 und 2 auf diesen Räumen wurden unter anderem von Brüning–Seeley [28, 29, 30] untersucht. Eine wichtige Klasse von Differentialoperatoren auf metrischen Kegeln haben Melrose [117] und Schulze [137, 138] unabhängig voneinander eingeführt: die sogenannten *Operatoren* vom *Fuchs-Typ*. Das sind Differentialoperatoren der Form

$$\mathsf{t}^{-n} \sum_{k=0}^{m} \mathsf{A}_k(\mathsf{t}) \left(-\mathsf{t} \frac{\partial}{\partial \mathsf{t}} \right)^k ,$$

wobei $m, n \in \mathbb{N}^{>0}$ und die A_k glatte Familien von Differentialoperatoren auf M sind. Eine ausführliche Darstellung der Theorie der Operatoren vom Fuchs-Typ sowie weitere Informationen zu metrischen Kegeln mit zahlreichen Referenzen findet der Leser in Lesch [104].

Kapitel 4

Orbiträume

Wie schon in der Einleitung erwähnt, stellen die Orbiträume bestimmter, genauer gesagt eigentlicher G-Aktionen einer Lie-Gruppe G schöne Beispiele für stratifizierte Räume mit glatter Struktur dar. Orbiträume spielen zudem eine wichtige Rolle in vielen Bereichen der Mathematik und mathematischen Physik. Aus diesem Grund werden sie hier ausführlich erläutert, wobei gemäß dem Anliegen dieser Monographie das Augenmerk hauptsächlich auf die kanonische Stratifizierung durch Orbittypen und der Konstruktion der glatten Struktur gerichtet ist. Die Ergebnisse aus den ersten drei Abschnitten dieses Kapitels sind zumindest für den kompakten Fall Standard. Wir haben sie deshalb von vorneherein in der größten Allgemeinheit nicht nur für den Fall kompakten G's sondern gleich für den Fall eigentlicher G-Wirkungen formuliert. Als Quellen dienten für Abschnitt 4.1 bis 4.3 vor allem Jänich [88], Bredon [21] und Lesch [103].

4.1 Differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten

4.1.1 Sei M eine Mannigfaltigkeit und G ein Lie-Gruppe. Unter einer G-(*Links-*) *Wirkung* oder auch G-(*Links-*) *Aktion* verstehen wir eine glatte Abbildung

$$\Phi : \mathsf{G} \times \mathsf{M} \to \mathsf{M}, \quad (g, x) \mapsto \Phi(g, x) = \Phi_g(x) = gx$$

derart, daß für alle $g, h \in \mathsf{G}$ und $x \in \mathsf{M}$ die Beziehungen $\Phi_g(\Phi_h(x)) = \Phi_{gh}(x)$ und $\Phi_e(x) = x$ gelten, wobei e das das Einselement von G ist. Als G-*Rechts-Wirkung* bezeichnen wir eine glatte Abbildung

$$\Psi : \mathsf{M} \times \mathsf{G} \to \mathsf{M}, \quad (x, g) \mapsto \Psi(x, g) = \Psi_g(x) = xg,$$

so daß $\Phi : \mathsf{G} \times \mathsf{M} \to \mathsf{M}$, $(g, x) \mapsto \Psi(x, g^{-1})$ eine G-Links-Wirkung darstellt.

Eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer G-Wirkung $\Phi : \mathsf{G} \times \mathsf{M} \to \mathsf{M}$ nennen wir häufig auch eine *differenzierbare* G-*Mannigfaltigkeit* oder kürzer einen G-*Raum*. Eine G-Links- oder G-Rechts-Aktion auf M heißt *transitiv*, falls für alle Paare (x, y) von Punkten aus M ein $g \in \mathsf{G}$ existiert mit $gx = y$ bzw. $xg = y$. Die G-Wirkung heißt *effektiv* oder *treu*, falls $\Phi_g = \mathrm{id}_{\mathsf{M}}$ bzw. $\Psi_g = \mathrm{id}_{\mathsf{M}}$ genau dann erfüllt ist, wenn $g = e$. Mit anderen Worten besagt dies, daß der kanonische Homomorphismus von G in die Diffeomorphismengruppe $\mathrm{Diff}(\mathsf{M})$ injektiv ist.

Ein *Morphismus von* G*-Wirkungen* oder auch eine G-*äquivariante Abbildung* ist eine differenzierbare Abbildung $f : M \to N$ zwischen G-Räumen M und N, so daß für alle $g \in G$ und $x \in M$ die Gleichung $f(gx) = gf(x)$ erfüllt ist. Falls nun $\gamma : G \to H$ einen glatten Homomorphismus von Lie-Gruppen darstellt, so nennen wir eine glatte Abbildung $f : M \to N$ von einem G-Raum M in einen H-Raum N γ-*äquivariant*, falls das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{\gamma \times f} & H \times N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \tag{4.1.1}$$

kommutiert. Die G-Äquivarianz ist damit gleichbedeutend zur id_G-Äquivarianz.

4.1.2 Für einen Punkt $x \in M$ heißt die Menge $Gx = \{gx \in M | g \in G\}$ der *Orbit* von x in M. Die Partition von M in seine verschiedenen Orbits stellt dann eine Äquivalenzrelation auf M dar; den entsprechenden Quotientenraum der Äquivalenzklassen nennen wir den *Orbitraum* von M, und bezeichnen ihn mit $G\backslash M$. In analoger Weise definiert man für eine Mannigfaltigkeit N mit einer G-Rechts-Wirkung die Orbits qG mit $q \in N$ und den Orbitraum N/G. Als nächstes versehen wir $G\backslash M$ (bzw. N/G) mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Projektion $\pi : M \to G\backslash M$ (bzw. $\pi : N \to N/G$). Damit wird π zu einer stetigen und offenen Abbildung, denn für alle $U \subset M$ offen ist $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$ offen in M. In der Regel ist der Orbitraum $G\backslash M$ keine differenzierbare Mannigfaltigkeit, in manchen Fällen nicht einmal mehr Hausdorffsch. Für eine relativ große und für die meisten Anwendungen ausreichende Klasse von G-Mannigfaltigkeiten M - nämlich derjenigen mit einer sogenannten eigentlichen G-Aktion - besitzt der Orbitraum $G\backslash M$ die Struktur eines Whitney-Raums. In den nächsten Abschnitten werden wir dies genauer erläutern, und führen jetzt die dazu notwendigen neuen Begriffe ein. Zudem sei für das Folgende vereinbart, daß, wenn nicht anders vermerkt, Definitionen und Resultate nur für den Fall von Links-Wirkungen explizit angegeben werden, stillschweigend jedoch auch als auf den "Rechts"-Fall übertragen gelten.

4.1.3 Für jeden Punkt $x \in M$ definiert man seine *Standgruppe* oder auch *Isotropiegruppe* durch $G_x = \{g \in G | gx = x\}$. Man prüft leicht nach, daß G_x eine Untergruppe von G ist, und daß für alle $g \in G$ die Beziehung $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ richtig ist. Mit anderen Worten heißt dies, daß die Standgruppen zweier Punkte eines Orbits jeweils zueinander konjugiert sind. Folglich ist jedem Orbit Gx eindeutig eine Konjugationsklasse zugeordnet, nämlich die Konjugationsklasse (G_y) der Standgruppe G_y eines beliebigen Punktes $y \in Gx$. Im folgenden werde (G_y) auch als der *Typ* des Orbits Gx bezeichnet. Eine G-Wirkung auf M heißt *frei*, falls alle Isotropiegruppen G_x trivial, also gleich $\{e\}$ sind. Jede freie Gruppenwirkung ist effektiv, denn aus $\Phi_g = \mathrm{id}_M$ folgt mit der Freiheit von Φ schon $g = e$. Umgekehrt muß eine effektive G-Aktion nicht unbedingt frei sein.

Jeder abgeschlossenen Untergruppe $H \subset G$ ordnet man die folgenden drei Unterräume von M zu:

$$\begin{aligned} M_H &:= \{x \in M |\, G_x = H\}, \\ M^H &:= \{x \in M |\, G_x \subset H\}, \\ M_{(H)} &:= \{x \in M |\, G_x \sim H\}. \end{aligned}$$

M^H stellt dann nichts anderes als die *Fixpunktmenge* von H in M dar.

4.1.4 Leitet man eine G-Aktion $\Phi : G \times M \to M$ in der zweiten Variablen ab, so erhält man eine G-Wirkung auf dem Tangentialbündel von M:

$$G \times TM \to TM, \quad (g, v) \mapsto gv = T\Phi_g(v).$$

Leitet man dagegen Φ in der ersten Variablen ab, so erhält man für jedes Element $\xi \in \mathfrak{g}$ der Lie-Algebra von G ein kanonisches Vektorfeld auf M, das sogenannte *Fundamentalvektorfeld* ξ_M von ξ. Explizit ist ξ_M durch

$$\xi_M(x) := \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\exp t\xi, x)\Big|_{t=0}, \qquad x \in M,$$

gegeben. Die G-Aktion Φ liefert in funktorieller Weise neben der G-Aktion auf dem Tangentialbündel auch eine auf dem Kotangentialbündel, auf Tensor- und äußeren Produkten derselben und so weiter. Wir geben der Vollständigkeit halber die Wirkung auf T^*M an:

$$G \times T^*M \to T^*M, \quad (g, \alpha_x) \mapsto \left(T_{gx}M \ni v \mapsto \left\langle \alpha_x, g^{-1}v \right\rangle\right), \qquad \alpha_x \in T_x^*M, \ \ x \in M.$$

Da nun auch das Bündel der äußeren Formen zu einer G-Mannigfaltigkeit wird, macht es Sinn, von einer G-*invarianten Differentialform* auf M zu sprechen; das ist dann eine Differentialform $\alpha \in \Omega^k(M)$, so daß $\alpha_{gx} = g\alpha_x$ für alle $x \in M$ und $g \in G$. Fordert man schließlich noch zusätzlich, daß die Kontraktion von α mit jedem Fundamentalvektorfeld ξ_M verschwindet, wenn also $i_{\xi_M} \alpha = 0$ für jedes $\xi \in \mathfrak{g}$ gilt, so nennt man α eine *basische Differentialform*. Der Raum der basischen k-Formen auf M wird mit $\Omega^k_{\mathrm{basic}}(G\backslash M)$ bezeichnet. Die basischen Differentialformen auf M können zur Berechnung der Kohomologie von $G\backslash M$ verwendet werden (siehe 5.3).

4.2 Eigentliche Gruppenwirkungen

4.2.1 Definition Eine G-Aktion $\Phi : G \times M \to M$ heißt *eigentlich*, falls die Abbildung

$$\Phi_{\mathrm{ext}} : G \times M \to M \times M, \quad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

eigentlich ist.

4.2.2 Beispiel Für eine kompakte Lie-Gruppe G sind offensichtlich alle G-Aktionen eigentlich.

4.2.3 Beispiel Man könnte vermuten, daß alle freien G-Aktion eigentlich sind. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie schon die folgende Aktion von $\mathbb{R}$ auf dem Torus $S^1 \times S^1$ mit dem irrationalem Winkel $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ zeigt:

$$\mathbb{R} \times S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1, \quad (r, e^{i2\pi s}, e^{i2\pi t}) \mapsto (e^{i2\pi(s + r\cos\alpha)}, e^{i2\pi(t + r\sin\alpha)})$$

Der folgende Satz ist neben dem später bewiesenen Scheibensatz Ausgangspunkt für alle weiteren Untersuchungen über eigentliche Gruppenwirkungen.

4.2.4 Satz *Sei* $\Phi : \mathsf{G} \times \mathsf{M} \to \mathsf{M}$ *eine eigentliche Gruppenwirkung. Dann gilt:*

(1) *Jeder Orbit* $\mathsf{G}x$, $x \in \mathsf{M}$ *stellt eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von* M *dar. Zudem liefert die kanonische Abbildung*

$$\Phi_x : \mathsf{G}/\mathsf{G}_x \to \mathsf{M}, \quad g\,\mathsf{G}_x \mapsto gx$$

einen Diffeomorphismus von G/G_x *auf den Orbit* $\mathsf{G}x$.

(2) *Die Standgruppe* G_x *eines jeden Punktes* $x \in \mathsf{M}$ *ist kompakt.*

(3) *Die kanonische Projektion* $\pi : \mathsf{M} \to \mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ *ist abgeschlossen. Der Orbitraum* $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ *ist Hausdorffsch, lokalkompakt und hat abzählbare Topologie.*

(4) *Zu jeder Überdeckung von* M *durch* G*-invariante offene Mengen existiert eine untergeordnete Teilung der Eins aus* G*-invarianten glatten Funktionen.*

(5) *Die Algebra* $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})^\mathsf{G}$ *der* G*-invarianten glatten Funktionen trennt die Punkte von* M.

(6) M *besitzt eine* G*-invariante Riemannsche Metrik.*

Beweis: Wir zeigen zuerst (2). Die Standgruppe $\mathsf{G}_x = \{g \in \mathsf{G} \mid gx = x\}$ läßt sich in der Form

$$\mathsf{G}_x = \mathrm{pr}_1(\Phi_{\mathrm{ext}}^{-1}(x, x))$$

schreiben, ist also kompakt, da sie das Urbild der kompakten Menge (x, x) unter der eigentlichen Abbildung Φ_{ext} ist.

Nun zum Beweis von (1). Da G_x kompakt, also eine Unter-Lie-Gruppe von G ist, muß G/G_x eine (reell analytische) Mannigfaltigkeit sein. Wir zeigen zuerst, daß Φ_x eine injektive Immersion ist. Die Injektivität ist offensichtlich, denn aus $gx = hx$ folgt sofort $g^{-1}h \in \mathsf{G}_x$, also $g\mathsf{G}_x = h\mathsf{G}_x$. Um die Immersivität von Φ_x nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß das Differential $\mathsf{T}_{e\mathsf{G}_x}\Phi_x$ injektiv ist, da Φ_x äquivariant bezüglich der G-Aktion $\mathsf{G} \times \mathsf{G}/\mathsf{G}_x \to \mathsf{G}/\mathsf{G}_x$ ist. Sei also $v \in \mathsf{T}_{e\mathsf{G}_x}\mathsf{G}/\mathsf{G}_x$ ein Tangentialvektor mit $\mathsf{T}_{e\mathsf{G}_x}\Phi_x.v = 0$. Da die kanonische Projektion $\pi : \mathsf{G} \to \mathsf{G}/\mathsf{G}_x$ submersiv ist, existiert ein $\xi \in \mathfrak{g} = \mathsf{T}_e\mathsf{G}$ mit $\mathsf{T}_e\pi.\xi = v$. Es folgt dann

$$\mathsf{T}_e\Phi(-, x).\xi = \mathsf{T}_{e\mathsf{G}_x}\Phi_x.\mathsf{T}_e\pi.\xi = \mathsf{T}_{e\mathsf{G}_x}\Phi_x.v = 0,$$

und für die Kurve $\gamma(t) = \exp t\xi$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\gamma(t), x)\Big|_{t=s} = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\gamma(t+s), x)\Big|_{t=0} = \big(\mathsf{T}_x\Phi(\gamma(s), \cdot) \circ \mathsf{T}_e\Phi(-, x)\big)(\xi) = 0,$$

wobei ausgenützt wurde, daß $\Phi(\gamma(t+s), x) = \Phi(\gamma(s), \gamma(t)x)$. Somit ergibt sich $\Phi(\gamma(t), x) = x$ für alle $t \in \mathbb{R}$, oder mit anderen Worten $\gamma(t) \in \mathsf{G}_x$. Das aber wiederum impliziert $\xi \in \mathsf{T}_e\mathsf{G}_x$, also $v = \mathsf{T}_e\pi.\xi = 0$. Folglich ist Φ_x immersiv. Da die Abbildung $\mathsf{G} \times \{x\} \to \mathsf{M} \times \{x\}$ eigentlich ist, gilt dies auch für Φ_x. Als eigentliche injektive Immersion ist somit Φ_x eine Einbettung, also ein Diffeomorphismus auf sein Bild $\mathsf{G}x$.

Als nächstes zeigen wir (3). Sei $\mathsf{A} \subset \mathsf{M}$ abgeschlossen. Da Φ_{ext} eigentlich ist, muß $\mathsf{G}\mathsf{A} \times \mathsf{A} = \Phi_{\mathrm{ext}}(\mathsf{G}, \mathsf{A})$ abgeschlossen in $\mathsf{M} \times \mathsf{M}$ sein, also ist $\mathsf{G}\mathsf{A}$ abgeschlossen in M. Da

$GA = \pi^{-1}(\pi(A))$, ist $\pi(A)$ abgeschlossen in $G\backslash M$, das heißt π ist abgeschlossen. Nun betrachte man zwei verschiedene Orbits Gx und Gy. Da M normal ist und Gy abgeschlossen, existieren disjunkte offene Umgebungen U von x und V von Gy. Insbesondere ist dann $\overline{U} \cap Gy = \emptyset$ und $\pi(y) \notin \pi(U)$. Wegen der Abgeschlossenheit von π sind dann $\pi(U)$ und $(G\backslash M) \setminus \pi(\overline{U})$ disjunkte offene Umgebungen von $\pi(x)$ beziehungsweise $\pi(y)$. Also ist $G\backslash M$ Hausdorffsch. Die Lokalkompaktheit und Separabilität von $G\backslash M$ folgt unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften von M.

Zum Beweis von (4) bemerken wir zuerst, daß aufgrund von (3) der Orbitraum $G\backslash M$ parakompakt ist. Dann nehmen wir an, $\mathcal{U} = (U_\iota)_{\iota \in J}$ sei eine Überdeckung von M durch G-invariante offene Mengen U_ι. Aufgrund der Parakompaktheit von $G\backslash M$ existiert eine lokalendliche Überdeckung von $G\backslash M$ durch offene Mengen V_ι, so daß $\pi^{-1}(V_\iota) \subset U_\iota$. Zudem gibt es eine lokalendliche glatte Teilung der Eins $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ auf M und eine Abbildung $\iota : \mathbb{N} \to J$ derart, daß $\operatorname{supp} \psi_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ kompakt ist und in $\pi^{-1}\big(V_{\iota(j)}\big)$ liegt. Man wähle nun ein rechtsinvariantes Haarsches Maß μ auf G. Aufgrund der Kompaktheitsannahme an die Träger $\operatorname{supp} \psi_j$ existiert für $x \in M$ und $j \in \mathbb{N}$ das Integral

$$\psi_j^G(x) = \int_G \psi(gx)\, d\mu(g).$$

Eine einfache Argumentation impliziert dann, daß alle ψ_j^G invariante glatte Funktion auf M darstellen, und $\operatorname{supp} \psi_j^G \subset \pi^{-1}\big(V_{\iota(j)}\big)$ gilt. Allerdings ist die Familie der Träger $(\operatorname{supp} \psi_j^G)_{j \in \mathbb{N}}$ nun nicht unbedingt mehr lokalendlich, was durch geeignete Summation der Funktionen ψ_j^G wider beheben wollen. Da $\mathcal{C}^\infty(M)$ ein Fréchet-Raum ist, existiert eine die Fréchet-Topologie definierende Folge von Seminormen $\|\cdot\|_j$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)$, so daß $\|\cdot\|_j \leq \|\cdot\|_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\tilde{\varphi}_\iota := \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ \iota(j) = \iota}} \frac{1}{2^j \, \|\psi_j^G\|_j} \psi_j^G .$$

Auch die Funktionen $\tilde{\varphi}_\iota$ sind dann glatt, G-invariant und erfüllen $\operatorname{supp} \tilde{\varphi}_\iota \subset \pi^{-1}\big(V_\iota\big)$. Aufgrund der Lokalendlichkeit der Überdeckung $(V_\iota)_{\iota \in J}$ ist die Familie der Träger $\operatorname{supp} \tilde{\varphi}_\iota$ ebenfalls lokalendlich, also ist für alle $x \in M$

$$\varphi_\iota(x) = \frac{1}{\tilde{\varphi}(x)} \tilde{\varphi}_\iota(x) \quad \text{mit } \tilde{\varphi}(x) = \sum_{\iota \in J} \varphi_\iota(x)$$

wohldefiniert. Die Familie $(\varphi_\iota)_{\iota \in J}$ ist nun eine $\mathcal{U}$ untergeordnete lokalendliche und G-invariante Teilung der Eins.

Zu (5): Seien Gx und Gy zwei disjunkte Orbits. Da $G\backslash M$ parakompakt, insbesondere also normal ist, können wir disjunkte offene Umgebungen V_1 und V_2 von $\pi(x)$ beziehungsweise $\pi(y)$ wählen. Setzt man nun $U_i = \pi^{-1}(V_i)$ für $i = 1, 2$ und $U_3 = M \setminus (Gx \cup Gy)$, so ist (U_1, U_2, U_3) eine G-invariante offene Überdeckung von M, zu der nach dem eben Bewiesenen eine G-invariante untergeordnete Teilung der Eins $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ existiert. Es gilt dann $\varphi_1(x) = \varphi_2(y) = 1$ und $\varphi_2(x) = \varphi_1(y) = 0$, also trennt $\mathcal{C}^\infty(M)^G$ die Punkte von M.

Zum Schluß wollen wir noch (6) beweisen. Dazu wählen wir erst einmal eine beliebige Riemannsche Metrik η auf M und eine kompakte Ausschöpfung $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von M.

Anschließend sei zu jedem $j \in \mathbb{N}$ eine glatte Abschneidefunktion $\chi_j : M \to [0,1]$ derart gewählt, daß $\operatorname{supp}\chi_j \subset K^\circ_{j+1}$ und $\chi_j(x) = 1$ für alle $x \in K_j$. Mittels des oben schon einmal verwendeten Haarschen Maßes auf G definieren wir G-äquivariante glatte Schnitte $\eta_j : M \to T^*M \otimes_x T^*M$ durch

$$\eta_j(x)\,(v,w) = \int_G \chi_j(gx)\,\eta_{gx}(gv,gw)\,d\mu(g), \qquad x \in M, \ \ v,w \in T_xM.$$

Aufgrund der Voraussetzungen an η und die χ_j sind alle Formen $\eta_j(x)$ symmetrisch und positiv semidefinit. Falls $x \in GK_j$, so ist $\eta_j(x)$ sogar positiv definit. Da die Familie $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $U_j = GK^\circ_j$ eine G-invariante offene Überdeckung von M darstellt, existiert nach (4) eine $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ untergeordnete G-invariante Teilung der Eins $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Definiert man $\mu : M \to T^*M \otimes_x T^*M$ durch

$$\mu(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j(x)\,\eta_j(x), \quad x \in M,$$

so ist μ eine G-invariante Riemannsche Metrik auf M. Damit ist auch die letzte Behauptung des Satzes gezeigt. $\square$

4.2.5 Zur Vorbereitung des Scheibensatzes betrachte man zu $x \in M$ den Normalraum $\mathcal{V}_x = T_xM/T_xGx$ des Orbits Gx an x, die sogenannte *Scheibe* von x. Für jedes Element g der Standgruppe G_x bildet das Differential $T\Phi_g$ den Tangentialraum T_xGx an den Orbit Gx wieder in T_xGx ab, induziert also einen Automorphismus von $\mathcal{V}_x$. Somit erhalten wir die sogenannte *Scheibendarstellung*

$$S_x : G_x \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}_x).$$

Da der homogene Raum $G \to G/G_x$ ein G_x-Prinzipalbündel darstellt, erhalten wir zudem ein assoziiertes Bündel $N_x = G \times_{G_x} \mathcal{V}_x$, das *Scheibenbündel* von x. Da G_x kompakt ist, existiert auf $\mathcal{V}_x$ eine G_x-invariante Euklidische Metrik, bezüglich der man dann die Sphäre $S\mathcal{V}_x = \{v \in \mathcal{V}_x \,|\, \|v\| = 1\}$ und das *Sphärenbündel* $SN_x = G \times_{G_x} S\mathcal{V}_x$ definieren kann. Die Gruppe G_x wirkt dann in natürlicher Weise auf $S\mathcal{V}_x$, so daß SN_x wohldefiniert ist und zu einem differenzierbaren G-Raum wird.

Der Scheibensatz besagt nun nichts anderes, als daß jede G-Mannigfaltigkeit mit eigentlicher G-Wirkung lokal wie eine Umgebung des Nullschnitts im Scheibenbündel aussieht.

4.2.6 Scheibensatz (Koszul [97, p. 139], Palais [128]) *Sei $\Phi : G \times M \to M$ eine eigentliche Gruppenwirkung, x ein Punkt von M und $\mathcal{V}_x = T_xM/T_xGx$ der Normalraum an den Orbit von x. Es existiert dann ein G-äquivarianter Diffeomorphismus einer G-invarianten Umgebung des Nullschnitts von $G \times_{G_x} \mathcal{V}_x$ auf eine G-invarianten Umgebung von Gx, so daß der Nullschnitt in kanonischer Weise auf Gx abgebildet wird.*

Beweis: Da die Exponentialfunktion zu einer G-invarianten Metrik wieder G-invariant ist, folgt der Scheibensatz sofort aus dem klassischen Tubensatz 3.1.6. $\square$

4.2.7 Bemerkung Oft nennt man in der Literatur auch die eindeutig bestimmte Nullumgebung $V \subset \mathcal{V}_x$ mit $\varphi(U) \cap (\{e\} \times \mathcal{V}_x) = \{e\} \times V$ die *Scheibe* von x. Dabei ist e das Einselement von G und $\varphi : U \to G \times_{G_x} \mathcal{V}_x$ der G-äquivariante Diffeomorphismus nach dem Scheibensatz.

4.2.8 Korollar *Für jede kompakte Untergruppe* $H \subset G$ *sind* M_H, $M_{(H)}$ *und* M^H Σ-*Untermannigfaltigkeiten von* M. *Mit anderen Worten heißt das, daß jede Zusammenhangskomponente von* M_H, $M_{(H)}$ *und* M^H *eine Untermannigfaltigkeit in* M *ist. Zudem stehen diese drei Mengen in folgender Relation:*

$$M_H = M_{(H)} \cap M^H. \tag{4.2.1}$$

BEWEIS: Da es sich jeweils um eine lokale Aussage handelt, genügt es nach dem Scheibensatz, den Fall zu betrachten, daß $M = G \times_H \mathcal{V}$, wobei $H \subset G$ kompakt und $\mathcal{V}$ ein H-Modul ist. Die Standgruppe eines Punktes $[(g, v)] \in G \times_H \mathcal{V}$ ist dann $G_{[(g,v)]} = gH_v g^{-1}$, wobei $H_v \subset H$ die Standgruppe der H-Mannigfaltigkeit $\mathcal{V}$ an v bezeichnet. Es gilt nämlich $\tilde{g}[(g, v)] = [(g, v)]$ genau dann, wenn ein $h \in H$ existiert mit $\tilde{g}gh^{-1} = g$ und $hv = v$. Aufgrund des nachstehenden Lemmas ist H_v und folglich $G_{[(g,v)]}$ genau dann zu H konjugiert, wenn $H_v = H$, wenn also v im Fixpunktraum $\mathcal{V}^H \subset \mathcal{V}$ von H liegt. Damit ist $M_{(H)}$ gleich dem abgeschlossenen differenzierbaren Unterbündel $G \times_H \mathcal{V}^H = G/H \times \mathcal{V}^H$.

Die Standgruppe $G_{[(g,v)]} = gH_v g^{-1}$ ist offensichtlich genau dann gleich H, wenn g im Normalisator $N_G(H)$ von H in G liegt. Folglich muß M_H gleich der abgeschlossenen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit $N_G(H) \times_H \mathcal{V}^H = N_G(H)/H \times \mathcal{V}^H$ sein, da der Normalisator $N_G(H)$ abgeschlossen in G ist, also eine Unter-Lie-Gruppe von G darstellt.

Die Beziehung (4.2.1) ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen von M_H, $M_{(H)}$ und M^H sowie dem nachstehenden Lemma. □

4.2.9 Lemma *Sei* G *eine Lie-Gruppe und* $H \subset G$ *eine kompakte Untergruppe. Jede zu* H *konjugierte abgeschlossene Untergruppe* $H_0 \subset H$ *ist dann identisch mit* H.

BEWEIS: Sei $g \in G$ derart, daß $\mathrm{Ad}_g(H) = gHg^{-1} = H_0$. Da Ad_g ein Diffeomorphismus von G ist, muß H_0 eine Untergruppe von H der gleichen Dimension sein, also stimmen die Zusammenhangskomponenten der Eins von H und H_0 überein. Daraus folgt weiter, daß für jedes $h \in H_0$ die Zusammenhangskomponente von h in H_0 mit der in H übereinstimmen muß. Da wegen der Kompaktheit von H und H_0 beide nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzen, ergibt sich somit die Behauptung, wenn nachgewiesen werden kann, daß H und H_0 die gleiche Anzahl von Zusammenhangskomponenten haben. Dies ist jedoch wegen $\mathrm{Ad}_g(H) = H_0$ tatsächlich der Fall. □

4.2.10 Proposition *Die Lie-Gruppe* G *wirke eigentlich und frei von links auf der Mannigfaltigkeit* P. *Dann existiert auf dem Quotientenraum* $G\backslash P$ *eine eindeutig bestimmte Mannigfaltigkeitsstruktur, so daß die kanonische Projektion* $\pi : P \to G\backslash P$ *zu einem differenzierbaren Faserbündel mit typischer Faser* G *wird.*

4.2.11 Anmerkung und Definition Ein Faserbündel $P \to N$, das wie in der Proposition durch eine eigentliche freie Links-G-Aktion entsteht, bezeichnen wir als *entgegengesetztes* G-*Prinzipalbündel*. Gewöhnlich operiert die Strukturgruppe eines Prinzipalbündels ja von rechts auf dem Totalraum, weswegen wir den Zusatz „entgegengesetzt“ gewählt haben, um auszudrücken, daß die Strukturgruppe von links operiert. Analog wie zu gewöhnlichen Prinzipalbündeln kann man auch zu entgegengesetzten Faserbündel assoziieren: sie entstehen dann aber aus Mannigfaltigkeiten F, auf denen G von rechts operiert, und werden in der Form $F\,{}_G{\times}P \to N$ notiert.

Beweis: Da die Gruppenwirkung eigentlich ist, wissen wir schon, daß $G\backslash P$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie ist. Mit Hilfe des Scheibensatzes konstruiert man sich nun lokale Karten für $G\backslash P$. Sei $x \in G\backslash P$ und $z \in P$ ein Punkt mit $x = Gz$. Da die Gruppenwirkung frei ist, existiert ein G-äquivarianter Diffeomorphismus $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) : U \to G \times V$ von einer Umgebung U von z auf ein Produkt $G \times V$, wobei $V \subset \mathcal{V}_z$ eine Nullumgebung der Scheibe an z ist. Die Abbildung $s : \pi(U) \to \mathcal{V}_z$, $Gy \mapsto \Psi_2(y)$ ist dann über der Umgebung $\pi(U)$ von x wohldefiniert, stetig und ein Homöomorphismus auf sein Bild. Je zwei solcher Karten von $G\backslash P$ sind aufgrund des Scheibensatzes kompatibel, die Menge aller $s : \pi(U) \to \mathcal{V}_z$ definiert also einen differenzierbaren Atlas auf $G\backslash P$. Die Projektion $\pi : P \to G\backslash P$ stellt überdies ein Faserbündel dar, da dies nach Konstruktion lokal in Karten der Fall ist: $s \circ \pi_{|U} \circ \Psi^{-1} : G \times V \to V \subset \mathcal{V}_z$ ist ja nichts anderes als die Projektion auf die zweite Koordinate.

Die differenzierbare Struktur auf $G\backslash P$ ist eindeutig bestimmt, da wegen der Faserbündeleigenschaft von π die Garbe $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash P}$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen gleich $\pi_* \mathcal{C}^\infty_P$ sein muß, andererseits aber $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash P}$ die Mannigfaltigkeitsstruktur determiniert. □

4.3 Stratifizierung des Orbitraums

4.3.1 Die Menge der Konjugationsklassen abgeschlossener Untergruppen einer Lie-Gruppe G ist geordnet, indem man $(K) \leq (H)$ als äquivalent dazu definiert, daß H konjugiert zu einer Untergruppe von K ist.

4.3.2 Satz *Sei $\Phi : G \times M \to M$ eine eigentlich Gruppenaktion und $G\backslash M$ zusammenhängend. Dann erfüllen die Orbittypen von Φ die folgenden Relationen:*

(1) *Es gibt es eine eindeutig bestimmte Konjugationsklasse (H°) in G, so daß $M_{(H^\circ)} \subset M$ offen und dicht ist. Zudem ist $G\backslash M_{(H^\circ)}$ zusammenhängend.*

(2) *Jede kompakte Untergruppe $H \subset M$, die als Standgruppe eines $x \in M$ auftaucht, erfüllt $(H) \leq (H^\circ)$. Mit anderen Worten ist (H°) maximal in der geordneten Menge der Orbittypen von M.*

(3) *Für je zwei kompakte Untergruppen $K, H \subset G$ mit $(H) < (K)$ ist die Menge $M_{(H)} \cap \overline{M_{(K)}}$ offen und abgeschlossen in $M_{(H)}$.*

4.3.3 Definition Man nennt (H°) den *Hauptorbittyp* von M, und $M_{(H^\circ)}$ das *Hauptorbitbündel*. Die in $M^\circ := M_{(H^\circ)}$ liegenden Orbits heißen *Hauptorbits*.

4.3.4 Bemerkung Die Annahme, daß $G\backslash M$ zusammenhängend ist, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da ja eine beliebige G-Mannigfaltigkeit M in die G-Mannigfaltigkeiten $\pi^{-1}(Z)$ zerlegt werden kann, wobei Z die Zusammenhangskomponenten von $G\backslash M$ durchläuft.

Beweis des Satzes: Die Existenz des Hauptorbittyps in (1) zeigen wir wie in Jänich [88, Satz 2.1] durch Induktion nach $\dim M$. Für $\dim M = 0$ besteht nach Voraussetzung an M der Orbitraum $G\backslash M$ nur aus einem einzigen Punkt, also hat M nur einen einzigen Orbit. Nehmen wir nun an M sei n-dimensional. Wir betrachten zuerst ein Scheibenbündel $N_x = G \times_{G_x} \mathcal{V}_x$ von $x \in M$ und das bezüglich einer G_x-invarianten Metrik zugeordnete Sphärenbündel $SN_x = G \times_{G_x} S\mathcal{V}_x$. Nach Induktionsannahme ist die Behauptung für SN_x erfüllt, sofern der Orbitraum $G\backslash SN_x = G_x\backslash S\mathcal{V}_x$ zusammenhängend ist. Falls dieser jedoch nicht zusammenhängend ist, muß $\dim \mathcal{V}_x = 1$ und $G_x \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}_x)$ die triviale Darstellung sein. Der Orbittyp eines jeden Punktes von SN_x wäre dann (G_x). In jedem Fall folgt jedoch, daß mit $\varepsilon > 0$ der G-Raum $N_x^\varepsilon = \big\{[(g,v)] \in G\times_{G_x}\mathcal{V}_x \big| \|v\| < \varepsilon\big\}$ einen Hauptorbittyp im Sinne des Satzes besitzt. Aufgrund des Scheibensatzes und der Parakompaktheit des Orbitraums können wir M jetzt durch lokal endlich viele solcher N_x^ε überdecken. Aus dem Zusammenhang von $G\backslash M$ ergibt sich, daß je zwei Scheibenbündel $N_{p_0}^{\varepsilon_0}$ und N_x^ε durch eine Kette $N_{p_0}^{\varepsilon_0}, \cdots, N_{p_k}^{\varepsilon_k} = N_x^\varepsilon$ miteinander verbunden werden können, das heißt daß $N_{p_j}^{\varepsilon_j} \cap N_{p_{j+1}}^{\varepsilon_{j+1}} \neq \emptyset$ für $0 \leq j < k$. Also müssen die Hauptorbittypen (H) aller N_x^ε übereinstimmen, ihre Vereinigung bildet also eine offene und dichte $M_{(H)} \subset M$, deren Quotient $G\backslash M_{(H)}$ zusammenhängend ist. Damit hätten wir (1) gezeigt. (2) folgt nun leicht aus (1).

Schließlich kommen wir zur letzten Behauptung des Satzes, zu (3). Wir führen den Beweis gemäß Sjamaar [143, Lem. 1.2.21]. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß K eine Untergruppe von H ist. Aufgrund des Scheibensatz genügt es zu zeigen, daß für M der Form $M = G \times_H \mathcal{V}$ und nichtleeres $M_{(K)}$ der Abschluß von $M_{(K)}$ die Untermannigfaltigkeit $M_{(H)} = G/H \times \mathcal{V}^H$ enthält. Der H-Modul $\mathcal{V}$ sei mit einer H-invarianten Metrik versehen, und $\mathcal{W}$ der Orthogonalraum zu $\mathcal{V}^H$. Dann hat M die Darstellung $M = (G \times_H \mathcal{W}) \times \mathcal{V}^H$, mittels der sich

$$M_{(K)} = G \times_H \mathcal{V}_{(K)} = (G \times_H \mathcal{W}_{(K)}) \times \mathcal{V}^H.$$

ergibt. Da $\mathcal{W}_{(K)}$ invariant gegenüber Multiplikation mit nichtverschwindenden Skalaren ist und nach Voraussetzung an $M_{(K)}$ nicht leer sein darf, liegt der Ursprung von $\mathcal{W}$ in $\overline{\mathcal{W}_{(K)}}$. Also folgt

$$M_{(H)} = G/H \times \mathcal{V}^H \subset (G \times_H \overline{\mathcal{W}_{(K)}}) \times \mathcal{V}^H = \overline{M_{(K)}},$$

was zu beweisen war. □

4.3.5 Zu jeder G-Mannigfaltigkeit M, auf der G eigentlich wirkt, können wir nun eine Stratifizierung von M angeben, indem wir jedem Punkt $x \in M$ den Keim $\mathcal{S}_x$ der Menge $M_{(G_x)}$ zuordnen. $\mathcal{S}$ wird üblicherweise die *Stratifizierung nach Orbittypen* genannt. Aufgrund von Satz 4.3.2 ist $\mathcal{S}$ tatsächlich eine Stratifizierung im Sinne von Definition 1.2.2, wenn wir noch zeigen können, daß die Zerlegung von M in die Untermannigfaltigkeiten $M_{(H)}$ lokalendlich ist. Zusammen mit dem Scheibensatz ist dies jedoch eine direkte Konsequenz aus dem folgenden Lemma.

4.3.6 Lemma *Sei* $\mathsf{H} \subset \mathsf{G}$ *eine kompakte Untergruppe, und* $\mathcal{V}$ *ein* H*-Modul. Dann besitzt der* G*-Raum* $\mathsf{G} \times_{\mathsf{H}} \mathcal{V}$ *nur endlich viele Orbittypen. Insbesondere besitzt jede kompakte Mannigfaltigkeit* M*, auf der* G *eigentlich wirkt, nur endlich viele Orbittypen.*

Beweis: Wir zeigen die zweite Behauptung durch Induktion nach $\dim \mathsf{M}$. Für $\dim \mathsf{M} = 0$ ist die Behauptung trivial, denn in diesem Fall besteht M nur aus endlich vielen Punkten, hat also auch nur endlich vielen Orbittypen. Sei nun M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Da M nach dem Scheibensatz durch endlich viele offene Mengen der Form $\mathsf{G} \times_{\mathsf{H}} \mathcal{V}$ mit $\dim \mathcal{V} \leq n$ und $\mathsf{H} \subset \mathsf{G}$ kompakt überdeckt werden kann, genügt es, den Induktionsschluß für diese G-Mannigfaltigkeiten zu nachzuweisen. Da H kompakt und $\mathcal{V}$ ein H-Modul ist, gibt es eine H-invariante Metrik auf $\mathcal{V}$. Sei $S\mathcal{V}$ die Einheitssphäre bezüglich dieser Metrik. Dann hat $S\mathcal{V}$ eine Dimension $< n$, und ist zudem eine kompakte H-Mannigfaltigkeit. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $S\mathcal{V}$ also nur endlich viele Orbittypen. Aufgrund des Beweises von Korollar 4.2.8 ist die Standgruppe von $[(g, v)] \in \mathsf{G} \times_{\mathsf{H}} S\mathcal{V}$ gleich $g\mathsf{H}_v g^{-1}$, das heißt die Anzahl der Orbittypen von $S\mathcal{V}$, $\mathsf{G} \times_{\mathsf{H}} S\mathcal{V}$ und $\mathsf{G} \times_{\mathsf{H}} (\mathcal{V} \setminus \{0\})$ stimmen überein. Da $\mathsf{G} \times_{\mathsf{H}} \mathcal{V}$ gegenüber $\mathsf{G} \times_{\mathsf{H}} (\mathcal{V} \setminus \{0\})$ höchstens zusätzlich den Orbittyp (H) besitzt, ist der Induktionsschluß vollzogen.

Aus dem Beweis der zweiten Behauptung folgt zudem, daß auch die erste Behauptung richtig sein muß. □

4.3.7 Satz *Die Stratifizierung einer* G*-Mannigfaltigkeit* M *mit eigentlicher Gruppen-Wirkung durch Orbittypen macht* M *zu einem Whitney-stratifizierten Raum.*

Beweis: Es muß nur noch gezeigt werden, daß die Whitney-Bedingung (B) erfüllt ist. Seien also $\mathsf{K} \subsetneq \mathsf{H} \subset \mathsf{G}$ zwei (kompakte) Standgruppen von M, das heißt mit anderen Worten gelte $\mathsf{M}_{(\mathsf{H})} < \mathsf{M}_{(\mathsf{K})}$. Seien weiter zwei gegen ein $y \in \mathsf{M}_{(\mathsf{H})}$ konvergente Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{M}_{(\mathsf{K})}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{M}_{(\mathsf{H})}$ vorgegeben, wobei noch angenommen wird, daß in einer glatten Karte um y die Sekanten $\ell_k = \overline{x_k y_k}$ gegen eine Gerade ℓ, und die Tangentialräume $\mathsf{T}_{x_k}\mathsf{M}_{(\mathsf{K})}$ gegen einen Unterraum τ konvergieren. Aufgrund des Scheibensatzes können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$\mathsf{M} = \mathsf{G} \times_{\mathsf{H}} \mathcal{V} = (\mathsf{G} \times_{\mathsf{H}} \mathcal{W}) \times \mathcal{V}^{\mathsf{H}} \quad \text{und} \quad y = [(1, 0)],$$

wobei $\mathcal{V}$ die Scheibe von H bezeichnet, $\mathcal{V}^{\mathsf{H}}$ den Unterraum der H-invarianten Vektoren, und $\mathcal{W} = (\mathcal{V}^{\mathsf{H}})^{\perp}$ den Orthogonalraum bezüglich eines H-invarianten Skalarprodukts auf $\mathcal{V}$.

Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G, $\mathfrak{h}$ die von H, und $\mathfrak{m}$ der Orthogonalraum von $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ bezüglich eines H-invarianten Skalarprodukts auf $\mathfrak{g}$. Mittels der Exponentialfunktion auf G erhalten wir eine natürliche glatte Karte

$$\mathsf{y} : \mathsf{U} \to \mathfrak{m} \times \mathcal{V}, \quad \mathsf{y}([(\exp \xi, v)]) = (\xi, v), \quad \xi \in \mathfrak{m},\ v \in \mathcal{V},$$

wobei $\mathsf{U} \subset \mathsf{M}$ eine geeignete offene Umgebung von y ist, von der wir offensichtlich annehmen können, daß in ihr alle Glieder der Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liegen. Man erinnere sich nun daran, daß $\mathsf{M}_{(\mathsf{K})} = (\mathsf{G} \times_{\mathsf{H}} \mathcal{W}_{(\mathsf{K})}) \times \mathcal{V}^{\mathsf{H}}$ und $\mathsf{M}_{(\mathsf{H})} = \mathsf{G}/\mathsf{H} \times \mathcal{V}^{\mathsf{H}}$. Da $\mathcal{W}_{(\mathsf{K})}$ invariant gegenüber Multiplikation mit nichtverschwindenden Skalaren ist, folgt nach eventueller

Auswahl von Teilfolgen

$$(\xi, w, v) := \lim_{k\to\infty} \frac{y(x_k) - y(y_k)}{\|y(x_k) - y(y_k)\|} \in \mathfrak{m} \times \overline{\mathcal{W}_{(K)}} \times \mathcal{V}^{H} \quad \text{mit} \quad \overline{\mathcal{W}_{(K)}} = \mathcal{W}_{(K)} \cup \{0\}.$$

Mit der Darstellung $y(x_k) = (\xi_k, w_k, v_k) \in \mathfrak{m} \times \mathcal{W}_{(K)} \times \mathcal{V}^{H}$ gilt dann (nach eventueller weiterer Auswahl einer Teilfolge)

$$\|w\| \lim_{k\to\infty} \frac{w_k}{\|w_k\|} = w.$$

Verwendet man nochmals die Invarianz von $\mathcal{W}_{(K)}$ gegenüber Multiplikation mit Skalaren, so ergibt sich daraus andererseits

$$\mathfrak{m} \times \operatorname{span} w \times \mathcal{V}^{H} \subset \tau = \lim_{k\to\infty} T_{x_k} M_{(K)},$$

was insbesondere $\ell = \operatorname{span}(\xi, w, v) \subset \tau$ nach sich zieht. Das war zu zeigen. □

4.3.8 Satz *Sei $f : M \to N$ eine G-äquivariante glatte Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten M, N, auf denen G eigentlich wirke. Unter der weiteren Voraussetzung, daß f eine stratifizierte Submersion bezüglich der Stratifizierung $\mathcal{S}$ auf M durch Orbittypen ist, existiert ein zu f kompatibles, G-äquivariantes Kontrolldatum $(T_S)_{S\in\mathcal{S}}$, das heißt für jedes Stratum S gilt $G \cdot T_S \subset T_S$ und*

(KB14) $$\pi_S(gx) = g\, \pi_S(x),$$

(KB15) $$\rho_S(gx) = \rho_S(x),$$

sofern $x \in T_S$ und $g \in G$.

Beweis: Zum Nachweis der Behauptung benötigt man zuerst G-äquivariante Versionen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für tubulare Umgebungen. Anschließend geht man gemäß Teil 1 des Beweises von Proposition 3.6.9 vor und konstruiert wie dort beschrieben ein G-äquivariantes Kontrolldatum, indem man als Zutaten nur G-äquivariante Objekte verwendet. Eine G-äquivariante Version des klassischen Tubensatzes haben wir schon, das ist letztlich ja der Scheibensatz, und mit dessen Hilfe zeigt man (nahezu) wortwörtlich wie im Abschnitt 3.1, daß die G-äquivarianten Versionen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für tubulare Umgebungen ebenfalls gelten. Da die Ausführung der einzelnen Beweisschritte nach diesen Bemerkungen zwar kanonisch, aber langwierig ist, sei sie dem Leser überlassen. □

4.3.9 Zwar haben wir eben eine natürliche Stratifizierung von M mittels der Orbittypen gefunden, aber noch keine von $G\backslash M$. In den folgenden Untersuchungen wird sich herausstellen, daß die Quotienten $G\backslash M_{(H)}$ in natürlicher Weise eine Mannigfaltigkeitsstruktur besitzen, wobei beim Beweis dieser Tatsache die Proposition 4.2.10 wesentlich eingeht. Die Mannigfaltigkeiten $G\backslash M_{(H)}$ definieren dann die gesuchte Stratifizierung des Orbitraums.

4.3.10 Satz *Sei* H *eine der Standgruppe einer eigentlichen* G*-Aktion auf* M*. Dann operiert die Quotientengruppe* $\Gamma_H = N_G(H)/H$ *des Normalisators* $N_G(H)$ *von* H *in* G *eigentlich und frei von links auf* M_H*, das heißt* $M_H \to \Gamma_H \backslash M_H$ *wird zu einem entgegengesetzten* Γ_H*-Prinzipalbündel. Die Untermannigfaltigkeit* $M_{(H)}$ *wird zudem durch den* G*-äquivarianten Diffeomorphismus*

$$\Psi : G/H \,{}_{\Gamma_H}\!\!\times M_H \to M_{(H)}, \quad [gH, x] \mapsto gx$$

mit dem assoziierten Faserbündel $G/H \,{}_{\Gamma_H}\!\!\times M_H \to \Gamma_H \backslash M_H$ *identifiziert.*
(*vgl.* Borel [16, §1] *und* Jänich [88, 1.5 Satz])

Beweis: Für jedes Element g des Normalisators $N_G(H)$ und jeden Punkt $x \in M_H$ liegt gx wieder in M_H, also haben wir eine Aktion $N_G(H) \times M_H \to M_H$. Da die Standgruppe eines jeden Punktes von M_H nach Definition gleich H ist, induziert die $N_G(H)$-Aktion eine Links-Wirkung der Quotientengruppe Γ_H auf M_H, und diese muß frei sein. Eigentlich ist sie auch, denn $N_G(H)$ und M_H sind abgeschlossene Untermengen von G bzw. M, und G wirkt nach Voraussetzung ja eigentlich auf M. Somit ergibt sich die erste Behauptung des Satzes.

Zum Nachweis der zweiten beachte man zuerst, daß Γ_H frei von rechts auf dem homogenen Raum G/H wirkt: $gH \cdot \gamma H := g\gamma H$ ist nämlich für $g \in G$ und $\gamma \in N_G(H)$ ein wohldefiniertes Produkt. Das assoziierte Faserbündel $G/H \,{}_{\Gamma_H}\!\!\times M_H$ besteht folglich aus allen Äquivalenzklassen $[gH, x]$ bezüglich der Äquivalenzrelation $(gH, \gamma x) \sim (g\gamma H, x)$, $\gamma \in N_G(H)$. Man sieht dann sofort wegen $g(\gamma x) = (g\gamma)x$, daß Ψ eine wohldefinierte differenzierbare Abbildung auf $G/H \,{}_{\Gamma_H}\!\!\times M_H$ ist. Da die G-Links-Aktion mit der Γ_H-Rechts-Aktion vertauscht, wird $G/H \,{}_{\Gamma_H}\!\!\times M_H$ zu einem differenzierbaren G-Raum, und Ψ zu einer G-äquivarianten differenzierbaren Abbildung. Die Surjektivität von Ψ ist klar. Es bleibt, die Injektivität zu zeigen. Aus $gx = \tilde{g}y$ folgt jedoch $\gamma := g^{-1}\tilde{g} \in N_G(H)$, also $[gH, x] = [g\gamma H, \gamma^{-1}x] = [\tilde{g}H, y]$, was nichts anderes als die Injektivität von Ψ bedeutet. □

4.3.11 Korollar *Seien* M *und* G *wie im vorangehenden Satz. Ordnet man jedem Punkt* Gx *des Orbitraums* $G\backslash M$ *den Keim der Menge* $G\backslash M_{(G_x)} \cong \Gamma_{G_x}\backslash M_{G_x}$ *zu, so erhält man eine Stratifizierung von* $G\backslash M$*.*

Beweis: Die Behauptung ist eine direkte Konsequenz aus Satz 4.3.10 und der Tatsache, daß die Zerlegung von M in Orbittypen eine Stratifizierung darstellt. □

4.4 Funktionale Struktur

4.4.1 Auf dem Orbitraum $G\backslash M$ einer eigentlichen G-Wirkung hat man eine kanonische Garbe $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash M}$ "glatter" Funktionen, indem man die Schnitträume folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{C}^\infty_{G\backslash M}(U) = \left\{ f \in \mathcal{C}(U) \,\middle|\, f \circ \pi \in \mathcal{C}^\infty(\pi^{-1}(U)) \right\}, \quad U \subset G\backslash M \text{ offen.}$$

Für jedes offene $U \subset G\backslash M$ ist damit $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash M}(U)$ kanonisch isomorph zu $\mathcal{C}^\infty(\pi^{-1}(U))^G$, der Algebra der G-invarianten glatten Funktionen auf $\pi^{-1}(U)$. Wegen Satz 4.2.4, (4) ergibt sich daraus unter anderem, daß die Garbe $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash M}$ fein ist.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash M}$ tatsächlich von einer kanonischen glatten Struktur auf dem stratifizierten Raum $G\backslash M$ herrührt, mit anderen Worten also auch durch einen singulären Atlas gemäß Abschnitt 1.3 definiert werden kann. Der erste und fundamentale Schritt dazu ist der folgende DAVID HILBERT zugeschriebene, wohl aber auch von MENAHEM SCHIFFER unabhängig bewiesene klassische Satz (vgl. WEYL [166, Chap. 8, Sec. 14] und BIERSTONE [11]).

4.4.2 Satz *Sei H eine kompakte Lie-Gruppe, und $\mathcal{V}$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-linearer Darstellungsraum von H. Dann ist die Algebra $\mathcal{P}(\mathcal{V})^H$ der H-invarianten Polynome auf $\mathcal{V}$ endlich erzeugt.*

Ein endliches Erzeugendsystem von $\mathcal{P}(\mathcal{V})^H$ gemäß dem Satz nennt man üblicherweise eine *Hilbert-Basis* von $\mathcal{P}(\mathcal{V})^H$. Besteht das Erzeugendsystem nur aus homogenen Polynomen, so nennt man die Hilbert-Basis *homogen*. Eine Hilbert-Basis heißt *minimal*, wenn es kein Erzeugendsystem für $\mathcal{P}(\mathcal{V})^H$ mit weniger Elementen gibt.

BEWEIS: Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ die Algebra der Polynome auf $\mathcal{V}$. Gemäß dem Hilbertschen Basissatz ist das von den H-invarianten nichtkonstanten Polynomen erzeugte Ideal in $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ endlich generiert. Es existieren also H-invariante Polynome $p_1, \cdots, p_k$, die das Ideal erzeugen. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Polynome p_j homogen sind, da jedes H-invariante Polynom in H-invariante homogene Komponenten zerlegt werden kann. Sei d_0 der niedrigste Polynom-Grad, der in dem Erzeugendsystem $p_1, \cdots, p_k$ auftaucht. Dann muß jedes nichtkonstante H-invariante Polynom mindestens den Grad d_0 haben. Wir zeigen durch Induktion nach dem Grad $d \geq d_0$, daß jedes Element von $\mathcal{P}(\mathcal{V})^G$ ein Polynom in den p_j ist. Sei p ein homogenes H-invariantes Polynom vom minimalen Grad d_0. Dann gibt es eine Darstellung von p der Form

$$p = \sum_{j=1}^{k} q_j \cdot p_j, \tag{4.4.1}$$

wobei $q_j = 0$ falls $\deg p_j > d$ und $q_j \in \mathbb{C}$ sonst. Das war der Induktionsanfang. Nehmen wir nun an, für ein $d \geq d_0$ wäre jedes H-invariante q vom Grad $\leq d$ ein Polynom in den p_j, und $p \in \mathcal{P}(V)^H$ homogen vom Grad $d+1$. Dann existiert erst einmal eine Darstellung

$$p = \sum_{j=1}^{k} r_j \cdot p_j, \tag{4.4.2}$$

mit $r_j \in \mathcal{P}(\mathcal{V})$ und $\deg r_j < \deg p$. Integriert man beide Seiten dieser Gleichung über H bezüglich des Haarschen Maßes μ, so erhält man eine Darstellung der Form (4.4.1), wobei $q_j \in \mathcal{P}(\mathcal{V})^H$ durch

$$q_j(v) = \int_G r_j(gv)\, d\mu(v), \quad v \in \mathcal{V}$$

gegeben ist, und $\deg q_j < d$ gilt. Nach Induktionsvoraussetzung ist jedes q_j ein Polynom in $p_1, \cdots, p_k$, also gilt das auch für p. Damit ist der Induktionsschluß vollzogen und der Satz gezeigt. □

An dieser Stelle erinnern wir daran, daß die Algebra $\mathcal{C}^\infty(M)$ der glatten Funktionen auf M eine natürliche Fréchet-Topologie besitzt (siehe Anhang C.1), und daß jede glatte Funktion $f : M \to N$ mittels des Rückzugs einen stetigen Homomorphismus $f^* : \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ von Fréchet-Algebren induziert. Da $\mathcal{C}^\infty(M)^G$ ein bezüglich dieser Topologie abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{C}^\infty(M)$ ist, wird somit $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash M}$ zu einer Garbe von Frèchet-Algebren. Der nun folgende Satz besagt, daß $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash M}$ auch als topologischer Quotient der Algebra der glatten Funktionen auf einem $\mathbb{R}^k$ aufgefaßt werden kann und stellt den zweiten wichtigen Schritt zur Konstruktion einer glatten Struktur auf $G\backslash M$ dar.

4.4.3 Satz (Schwarz [140], Mather [115]) *Seien H und $\mathcal{V}$ wie im vorangehenden Satz und sei $p = (p_1, \cdots, p_k)$ eine Hilbert-Basis von $\mathcal{P}(\mathcal{V})^H$. Dann ist*

$$p^* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})^H, \quad f \mapsto f \circ (p_1, \cdots, p_k)$$

eine surjektive topologisch lineare Abbildung zwischen Fréchet-Räumen und zerfällt topologisch, das heißt es gibt ein topologisch lineares Rechtsinverses $e : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})^H \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$. Zudem ist die von p induzierte Abbildung

$$\overline{p} : H\backslash\mathcal{V} \to \mathbb{R}^k, \quad Hv \mapsto (p_1(v), \cdots, p_k(v)),$$

stetig, injektiv und eigentlich.

4.4.4 Bemerkung Von Schwarz stammt der Nachweis, daß p^* surjektiv ist. Mather konnte dann zeigen, daß p^* sogar topologisch zerfällt, und dabei einen neuen, vereinfachten Beweis für das Resultat von Schwarz angeben.

Beweis: Da der Beweis des Satzes sehr aufwendig und lang ist, verweisen wir dafür auf die schon angegebene Literatur [140, 115] oder die Monographie von Bierstone [11]. □

Sei nun $Gx \in G\backslash M$ ein Punkt im Orbitraum und U eine "Scheibenumgebung" von x, also G-äquivariant diffeomorph zu einer Umgebung des Nullschnitts von $G \times_{G_x} \mathcal{V}_x$. Sei $\varphi : U \to G \times_{G_x} \mathcal{V}_x$ die entsprechende G-äquivariante Einbettung und $\overline{\varphi} : G\backslash U \to G_x\backslash\mathcal{V}_x$ die kanonische Quotientenabbildung. Nach Wahl eines Erzeugendsystems $p = (p_1, \cdots, p_k)$ für $\mathcal{P}(\mathcal{V}_x)^{G_x}$ können wir folgendermaßen eine singuläre Karte um Gx definieren:

$$x : G\backslash U \to \mathbb{R}^k, \quad Gz \mapsto \overline{p} \circ \overline{\varphi}(Gz).$$

Da die G_x-invarianten Funktionen die Punkte von $\mathcal{V}_x$ trennen, ist x injektiv. Die Stetigkeit ist klar; daß x auch ein Homöomorphismus auf sein Bild ist ergibt sich aus der Tatsache, daß $\overline{p}$ eigentlich ist. Da die Komponenten p und φ jeweils glatt sind, und die Faserbündel $G \times_{G_x} \mathcal{V}_x \to G/G_x$ sowie $M_{(H)} \to G\backslash M_{(H)}$ für $H \subset G$ lokale glatte Schnitte besitzen, ist die Einschränkung von x auf ein Stratum der Form $G\backslash(U \cap M_{(H)})$ glatt. Folglich haben wir mit x tatsächlich eine singuläre Karte an der Hand, wenn noch gezeigt werden kann, daß jede der Einschränkungen $x_{|G\backslash(U\cap M_{(H)})}$ immersiv ist. Den entsprechenden Beweis werden wir gleich führen, wobei sich überdies herausstellen wird, daß die Familie aller solcher singulären Karten einen singulärer Atlas für $G\backslash M$ darstellt und daß die zugehörigen glatten

Funktionen durch $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash M}$ gegeben sind. Zum expliziten Nachweis unserer Behauptungen benötigen wir jetzt das folgende Resultat, das eine Aussage über die Zariski-Ableitung (siehe Anhang B.3) von $\overline{p}$ macht.

4.4.5 Lemma *Seien* H *und* $\mathcal{V}$ *wie oben und sei* $q = (q_1, \cdots, q_l)$ *eine minimale homogene Hilbert-Basis von* $\mathcal{P}(\mathcal{V})^H$. *Dann ist die Zariski-Ableitung von* $\overline{q}$ *im Ursprung ein Isomorphismus, das heißt*

$$T_0^Z \overline{q} : T_0^Z (H\backslash\mathcal{V}) \to T_0^Z \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^l$$

ist ein Isomorphismus. Folglich ist für jede Hilbert-Basis $p = (p_1, \cdots, p_k)$ *von* $\mathcal{P}(\mathcal{V})^H$ *die Zariski-Ableitung*

$$T_v^Z \overline{p} : T_v^Z (H\backslash\mathcal{V}) \to T_v^Z \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k$$

in jedem Punkt $v \in \mathcal{V}$ *injektiv.*

Beweis: Das Lemma ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem Satz von Schwarz. Für einen direkten Beweis siehe auch Bierstone [11, Lem. 2.17]. □

Wir weisen als erstes nach, daß $x_{|G\backslash(U\cap M_{(G_x)})}$ eine Immersion ist. Mittels φ wird das Stratum $U \cap M_{(G_x)}$ G-äquivariant und diffeomorph auf eine offene Teilmenge des Bündels $G/G_x \times \mathcal{V}_x^{G_x}$ abgebildet, folglich muß die Einschränkung

$$\overline{\varphi}_{|G\backslash(U\cap M_{(G_x)})} : G\backslash(U \cap M_{(G_x)}) \to G_x\backslash\mathcal{V}_x^{G_x} = \mathcal{V}_x^{G_x}$$

ein Diffeomorphismus auf eine Nullumgebung in $\mathcal{V}_x^{G_x}$ sein. Andererseits ist nach dem vorangehenden Lemma 4.4.5 die Abbildung $\overline{p}_{|\mathcal{V}_x^{G_x}} : \mathcal{V}_x^{G_x} \to \mathbb{R}^k$ eine Immersion, folglich auch $x_{|G\backslash(U\cap M_{(G_x)})} = \overline{p} \circ \overline{\varphi}_{|G\backslash(U\cap M_{(G_x)})}$.

Nehmen wir nun an, es gelingt der Nachweis, daß je zwei wie oben definierten singulären Karten $x : G\backslash U \to \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^N$ und $y : G\backslash V \to \mathbb{R}^l \subset \mathbb{R}^N$ kompatibel sind, das heißt daß um jeden Punkt $Gz \in G\backslash(U \cap V)$ eine Umgebung W und ein Diffeomorphismus $H : O \to \tilde{O} \subset \mathbb{R}^N$ mit $O \subset \mathbb{R}^N$ offen existieren, so daß

$$x_{|W} = H \circ y_{|W} \tag{4.4.3}$$

gilt. Dann wären auch die Einschränkungen $x_{G\backslash(U\cap M_{(H)})}$ immersiv. Um dies einzusehen, wähle man die singuläre Karte y um einen Punkt $Gy \in G\backslash U$ mit $G_y \sim H$. Da nach dem bisher Gezeigten $y_{|G\backslash(V\cap M_{(H)})}$ immersiv ist, würde Gl. (4.4.3) auch die Immersivität von $x_{|W\cap(G\backslash M_{(H)})}$ und damit von $x_{|G\backslash(U\cap M_{(H)})}$ nach sich ziehen

Wir müssen also die Kompatibilität der x und y nachweisen. Dazu genügt es den Fall zu betrachten, daß y um einen Punkt $Gy \in G\backslash U$ definiert und durch

$$y : G\backslash V \to \mathbb{R}^l, \quad Gz \mapsto \overline{q} \circ \overline{\psi}\,(Gz)$$

gegeben ist, wobei V eine Scheibenumgebung von y bezeichnet, $\psi : V \to G \times_{G_y} \mathcal{V}_y$ die zugehörige submersive Einbettung und $q = (q_1, \cdots, q_l)$ eine minimale homogene Hilbert-Basis für $\mathcal{P}(\mathcal{V}_y)^{G_y}$. Die Kompatibilität von x und y ist gezeigt, wenn eine glatte Einbettung $H : O \to \mathbb{R}^k$ mit $O \subset \mathbb{R}^l$ offen so konstruiert werden kann, daß Gl. (4.4.3) für eine geeignete Umgebung W von $\mathsf{G}z$ erfüllt ist. Nach dem Satz von SCHWARZ gibt es glatte Funktionen $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^l)$, so daß für alle ν aus einer Nullumgebung in $\mathcal{V}_y$

$$\mathsf{H}_i \circ \overline{\mathsf{q}}\,(\mathsf{G}_y\nu) = \pi_i \circ \mathsf{x} \circ \overline{\psi}^{-1}\,(\mathsf{G}_y\nu), \quad i = 1, \cdots, k,$$

wobei $\pi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Koordinate ist. Es folgt dann für alle $\mathsf{G}z$ aus einer Umgebung W von $\mathsf{G}y$

$$\mathsf{H}_i \circ \mathsf{y}\,(\mathsf{G}z) = \mathsf{H}_i \circ \overline{\mathsf{q}} \circ \overline{\psi}\,(\mathsf{G}z) = \pi_i \circ \mathsf{x}\,(\mathsf{G}z), \quad i = 1, \cdots, k.$$

Nun beachte man, daß die Garben $\overline{\psi}^*\mathcal{C}^\infty_{\mathsf{G}_x\backslash\mathcal{V}_x}$ und $\mathcal{C}^\infty_{\mathsf{G}\backslash V}$ isomorph sind, da ψ ein G-invarianter Diffeomorphismus ist. Nach Lemma 4.4.5 ist folglich $\mathsf{T}^Z_{\mathsf{G}y}\mathsf{x} = \mathsf{T}^Z\overline{\mathsf{p}} \circ \mathsf{T}^Z_{\mathsf{G}y}\overline{\varphi}$ injektiv. Da $\mathsf{T}^Z_{\mathsf{G}y}\mathsf{y}$ ebenfalls nach Lemma 4.4.5 ein Isomorphismus ist und $\mathsf{T}^Z_{\mathsf{y}(\mathsf{G}y)}\mathsf{H} \circ \mathsf{T}^Z_{\mathsf{G}y}\mathsf{y} = \mathsf{T}^Z_{\mathsf{G}y}\mathsf{x}$ gilt, muß folglich $\mathsf{T}^Z_{\mathsf{y}(\mathsf{G}y)}\mathsf{H}$ injektiv sein, also ist für eine geeignete offene Umgebung $\mathsf{O} \subset \mathbb{R}^l$ von $\mathsf{y}(\mathsf{G}y)$ die Einschränkung $\mathsf{H} := (\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_l)_{|\mathsf{O}}$ eine Einbettung. Das war der letzte Baustein in der Konstruktion eines singulären Atlanten $\mathcal{U}$ für $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$. Zieht man jetzt noch die sich aus dem Satz von SCHWARZ ergebende Gleichungskette

$$\mathsf{x}^*\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k) = \overline{\varphi}^*\overline{\mathsf{p}}^*\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k) = \overline{\varphi}^*\left(\mathcal{C}^\infty(\mathsf{G}_x\backslash\mathcal{V}_x)^{\mathsf{G}_x}\right) = \mathcal{C}^\infty(\mathsf{G}\backslash\mathsf{U})^\mathsf{G}$$

heran, so folgt auch die letzte Behauptung, daß nämlich $\mathcal{C}^\infty_{\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}}$ mit der Garbe der durch $\mathcal{U}$ definierten glatte Funktionen übereinstimmt. Es gilt sogar noch mehr

4.4.6 Satz *Sei der Orbitraum* $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ *einer eigentlichen* G-*Wirkung versehen mit der natürlichen Stratifizierung durch Orbittypen. Der Orbitraum* $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ *trägt dann eine kanonische glatte Struktur, deren glatte Funktionen durch* $\mathcal{C}^\infty_{\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}}(\mathsf{U}) = \mathcal{C}^\infty(\pi^{-1}(\mathsf{U}))^\mathsf{G}$ *für* $\mathsf{U} \subset \mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ *offen gegeben sind. Der Orbitraum wird damit zu einem topologisch lokal trivialen und Whitney-stratifizierten Raum. Überdies ist die Stratifizierung durch Orbittypen minimal unter allen Whitney-Stratifizierungen von* $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$.

4.4.7 Bemerkung Der Nachweis der Whitney-Stratifizierbarkeit des Orbitraums einer linearen G-Wirkung stammt von BIERSTONE [10], siehe auch [11, Thm. 2.5] vom gleichen Autor.

Um den Beweis der noch nicht nachgewiesenen Behauptungen führen zu können, benötigen wir folgendes

4.4.8 Lemma (BIERSTONE [11, Lem. 2.12]) *Es sei* $\mathcal{V}^\mathsf{H} = \{0\}$ *und* $\mathsf{p} = (\mathsf{p}_1, \cdots, \mathsf{p}_k)$ *eine Hilbert-Basis. Ist dann* $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^k$ *eine* $\mathcal{C}^1$*-Kurve in* $\mathsf{X} = \mathsf{p}(\mathsf{V})$ *mit* $\gamma(0) = 0$, *so gilt* $\gamma'(0) = 0$.

BEWEIS: Man versehe $\mathcal{V}$ mit einem H-invarianten Skalarprodukt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß p_1 das Quadrat des Abstands vom Ursprung darstellt. Sei $\mathsf{C} > 0$ eine Konstante, so daß $|\mathsf{p}_i(\nu)| \leq \mathsf{C}$ gilt für jedes i und jeden Einheitsvektor ν aus $\mathcal{V}$. Sei $\mathsf{d}_i = \deg \mathsf{p}_i$. Dann gilt

$$\mathsf{X} \subset \left\{(\mathsf{u}_1, \cdots, \mathsf{u}_k) \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, \mathsf{u}_1 \geq 0,\ |\mathsf{u}_i| \leq \mathsf{C}|\mathsf{u}_1|^{\mathsf{d}_i/2},\ i = 2, \cdots, k\right\}.$$

Offensichtlich gilt $(\pi_1 \circ \gamma)'(0) = 0$. Aus $\mathcal{V}^\mathsf{H} = \{0\}$ folgt $\mathsf{d}_i \geq 2$, also $(\pi_i \circ \gamma)'(0) = 0$ für $i = 2, \cdots, k$. Somit ist $\gamma'(0) = 0$. $\square$

Beweis des Satzes: Es muß nur noch die lokale Trivialität und das Erfülltsein der Whitney-Bedingung (B) nachgewiesen werden. Da es sich in beiden Fällen um lokale Eigenschaften handelt, genügt es der Nachweis für den Fall zu führen, daß M ein linearer G-Modul $\mathcal{V}$ und G kompakt ist. Man versehe $\mathcal{V}$ mit einem G-invarianten Skalarprodukt μ und einer Hilbert-Basis $\mathsf{p} = (\mathsf{p}_1, \cdots, \mathsf{p}_k)$. Der Orbitraum $\mathsf{G}\backslash\mathcal{V}$ wird dann via $\overline{\mathsf{p}}$ als stratifizierter Unterraum des $\mathbb{R}^k$ aufgefaßt. Wir wollen zuerst zeigen, daß jedes Paar $\mathsf{R} < \mathsf{S}$ von Strata von $\mathsf{G}\backslash\mathcal{V}$ an jeder Stelle $\mathsf{G}v \in \mathsf{R} \subset \mathsf{G}\backslash\mathcal{V}$ (A)-regulär ist. Sei $\mathcal{W}$ der Orthogonalraum zu $\mathsf{T}_v(\mathsf{G}v)$, und $\mathcal{W}'$ der Orthogonalraum von $\mathcal{W}^\mathsf{H}$ in $\mathcal{W}$, wobei $\mathsf{H} = \mathsf{G}_v$ die Isotropiegruppe von v bezeichnet. Sei $\varphi : \mathsf{U} \to (\mathsf{G} \times_\mathsf{H} \mathcal{W}') \times \mathcal{W}^\mathsf{H}$ eine submersive G-invariante Einbettung gemäß dem Scheibensatz. Zuletzt wähle man sich eine minimale homogene Hilbert-Basis $\mathsf{q} = (\mathsf{q}_1, \cdots, \mathsf{q}_l)$ von $\mathcal{P}(\mathcal{W}')^\mathsf{H}$. Dann hat man zwei Einbettungen

$$\mathsf{G}\backslash\mathsf{U} \longrightarrow \mathsf{G}\backslash\mathcal{V} \xrightarrow{\overline{\mathsf{p}}} \mathbb{R}^k \qquad \text{und} \qquad \mathsf{G}\backslash\mathsf{U} \xrightarrow{\overline{\varphi}} \mathsf{H}\backslash\mathcal{W}' \times \mathcal{W}^\mathsf{H} \xrightarrow{\overline{\mathsf{q}}\times\mathrm{id}} \mathbb{R}^l \times \mathcal{W}^\mathsf{H}.$$

Daraus ergibt sich durch Verknüpfung eine weitere Einbettung

$$\mathsf{i} := \overline{\mathsf{p}} \circ \overline{\varphi}^{-1} \circ (\overline{\mathsf{q}} \times \mathrm{id})^{-1} : \mathsf{Y} \to \mathbb{R}^k, \qquad \mathsf{Y} := \mathsf{q}(\mathcal{W}') \times \mathcal{W}^\mathsf{H}$$

Aufgrund von Lemma 4.4.5 ist die Zariski-Ableitung $\mathsf{T}_0^\mathsf{Z}\mathsf{i} : \mathsf{T}_0^\mathsf{Z}\mathsf{Y} \to \mathsf{T}^\mathsf{Z}_{\mathsf{p}(v)}\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k$ injektiv, folglich gibt es Nullumgebungen W' und W in $\mathbb{R}^l$ bzw. $\mathcal{W}^\mathsf{H}$ und eine glatte Einbettung $\iota : W' \times W \to \mathbb{R}^k$, so daß $\iota_{|\mathsf{Y}\cap(W'\times W)} = \mathsf{i}_{|\mathsf{Y}\cap(W'\times W)}$. Der Raum $\mathsf{Y} \subset \mathbb{R}^l \times \mathcal{W}^\mathsf{H}$ erhält eine Stratifizierung durch die Stücke $\mathsf{S}_{(\mathsf{K})} = \mathsf{q}(\mathcal{W}'_{(\mathsf{K})}) \times \mathcal{W}^\mathsf{H}$, wobei $\mathsf{K} \subset \mathsf{H}$ die abgeschlossenen Untergruppen von H durchläuft. Der Ursprung von $\mathbb{R}^l \times \mathcal{W}^\mathsf{H}$ liegt dann im Stratum $\mathsf{S}_{(\mathsf{H})} = \{0\} \times \mathcal{W}^\mathsf{H}$. Folglich gilt für jede gegen ein $w \in \mathsf{S}_{(\mathsf{H})}$ konvergente Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus $\mathsf{S}_{(\mathsf{K})} > \mathsf{S}_{(\mathsf{H})}$ die Beziehung

$$\mathsf{T}_w \mathsf{S}_{(\mathsf{H})} = \{0\} \times \mathcal{W}^\mathsf{H} \subset \lim_{k\to\infty} \mathsf{T}_{w_k} \mathsf{S}_{(\mathsf{K})}.$$

Folglich erfüllt das Paar $(\mathsf{S}_{(\mathsf{H})}, \mathsf{S}_{(\mathsf{K})})$ die Whitney-Bedingung (A), insbesondere also auch im Ursprung. Da die Einschränkung $\mathsf{i} = \iota_{|\mathsf{Y}} : \mathsf{Y} \to \mathsf{G}\backslash\mathcal{V}$ einen Isomorphismus stratifizierter Räume darstellt und gleichzeitig ι eine glatte Einbettung ist, muß für jedes Stratum $\mathsf{S} > \mathsf{R}$ Whitney (A) an der Stelle $\mathsf{G}v \in \mathsf{R}$ erfüllt sein. Da $\mathsf{G}v \in \mathsf{G}\backslash\mathcal{V}$ beliebig war, ist somit die Stratifizierung von $\mathsf{G}\backslash\mathcal{V}$ (A)-regulär.

Als nächstes soll nachgewiesen werden, daß $\mathsf{G}\backslash\mathcal{V}$ sogar (B)-regulär ist. Da p aus Polynomen besteht, ist nach dem Satz von Tarski–Seidenberg $\mathsf{p}(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^k$ eine semialgebraische und damit semianalytische Menge. Eine semianalytische Menge $\mathsf{Z} \subset \mathbb{R}^k$ besitzt nach Łojasiewicz [108] oder Mather [114] eine minimale (A)-reguläre Stratifizierung durch semianalytische glatte Mannigfaltigkeiten. Nach Mather [114] ist diese Stratifizierung auch minimal unter allen (A)-Stratifizierungen von Z durch glatte Mannigfaltigkeiten. Aufgrund von Lemma 4.4.8 ist die Stratifizierung von $\mathsf{G}\backslash\mathcal{V}$ durch Orbittypen minimal unter allen $\mathcal{C}^1$-Stratifizierungen, nach dem schon Bewiesenen ist die Stratifizierung des Orbitraums durch Orbittypen also minimal unter allen (A)-regulären Stratifizierungen von $\mathsf{G}\backslash\mathcal{V}$. Folglich sind die entsprechenden Strata von $\mathsf{G}\backslash\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^k$ sowie von $\mathsf{H}\backslash\mathcal{W}' \subset \mathbb{R}^l$ semianalytisch. (Sie sind sogar semialgebraisch, das wird aber an dieser Stelle nicht benötigt.) Nach Łojasiewicz [108, p. 103] ist jede glatte semianalytische Mannigfaltigkeit (B)-regulär über einem Punkt in ihrem Abschluß. Folglich ist jedes der Strata $\mathsf{q}(\mathcal{W}'_{(\mathsf{K})})$ mit $\mathsf{K} \leq \mathsf{H}$ (B)-regulär über $\{0\}$. Das wiederum impliziert, daß jedes

Stratum $S_{(K)}$ (B)-regulär über $S_{(H)}$ ist. Nach Lemma 1.4.4 muß dann auch $S = \iota(S_{(K)})$ (B)-regulär über $R = \iota(S_{(H)})$ sein. Durchläuft nun K alle abgeschlossenen Untergruppen von H, so durchläuft S alle Strata $> R$, folglich ist $G\backslash\mathcal{V}$ ein Whitney-stratifizierter Raum.

Zum Schluß zeigen wir direkt noch die topologisch lokale Trivialität von $G\backslash\mathcal{V}$, obwohl dies jetzt natürlich auch sofort aus Korollar 3.9.3 folgt. Aufgrund des Scheibensatzes genügt es, die lokale Trivialität nur um den Ursprung nachzuweisen. Sei $S \subset \mathcal{V}$ die zu μ gehörige Einheitssphäre. Dann ist S wegen der G-Invarianz von μ selbst wieder eine G-Mannigfaltigkeit und zudem kompakt. In der Kategorie topologischer Räume gilt die Isomorphie $\mathcal{V} \cong CS$. Desweiteren vertauscht die G-Wirkung mit der kanonischen $\mathbb{R}^{>0}$-Aktion auf $\mathcal{V}$ bzw. CS. Folglich sind $G\backslash\mathcal{V}$ und $C(G\backslash S)$ als stratifizierte Räume isomorph, das heißt $G\backslash\mathcal{V}$ ist um $G0$ topologisch lokal trivial, wobei der Link durch $G\backslash S$ gegeben ist. Das war zu zeigen. □

Eine weitere Konsequenz aus dem Lemma auf Seite 172 ist die folgende Aussage über Derivationen und Vektorfelder auf einem Orbitraum.

4.4.9 Proposition (Bierstone [11, Prop. 3.9]) *Die Lie-Gruppe G wirke eigentlich auf M, und $\delta \in \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(G\backslash M),(G\backslash M))$ sei eine Derivation auf dem Raum der glatten Funktionen von $G\backslash M$. Dann gilt $\delta \in \mathcal{X}^\infty(G\backslash M)$ genau dann, wenn δ tangential zu jedem Stratum S der Kodimension 1 ist, wenn also $\delta(f)_{|S} = 0$ für jede über einem solchen Stratum S verschwindende glatte Funktion f ist. Insbesondere ist die Beziehung $\mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(G\backslash M),(G\backslash M)) = \mathcal{X}^\infty(G\backslash M)$ genau dann erfüllt, wenn $G\backslash M$ kein Stratum der Kodimension 1 besitzt.*

Beweis: Wir halten uns an die Argumentation aus [11]. Aufgrund des Scheibensatzes genügt es, die Behauptung für den Fall kompakten G's und für eine lineare G-Aktion auf einem endlichdimensionalen Vektorraum $\mathcal{V}$ nachzuweisen. Es genügt dann wiederum wegen des Scheibensatzes zu zeigen, daß, falls $\{0\}$ ein Stratum der Kodimension ≥ 2 ist, jede Derivation $\delta \in \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(G\backslash\mathcal{V}), \mathcal{C}^\infty(G\backslash\mathcal{V}))$, die tangential zu den Strata der Kodimension 1 ist, im Ursprung verschwindet. Aufgrund eines Induktionsarguments können wir annehmen, daß δ tangential zu allen Strata mit Kodimension kleiner als der von $\{0\}$ ist.

Sei $p = (p_1, \cdots, p_k)$ eine Hilbert-Basis für $\mathcal{P}(\mathcal{V})^G$ und $\overline{p} : G\backslash\mathcal{V} \to X := p(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^k$ der induzierte Diffeomorphismus. Es gibt dann ein glattes Vektorfeld V auf $\mathbb{R}^k$, so daß die Einschränkung von V auf X gleich der Derivation $\overline{p}_*(\delta)$ ist. Das Vektorfeld V erzeugt eine lokale Gruppe von Diffeomorphismen ϕ_t, wobei für t genügend klein ϕ_t auf einer Umgebung von 0 definiert ist.

Falls die Kurve $\gamma(t) = \phi_t(0)$ für genügend kleine t in X liegt, folgt $\gamma'(0) = 0$ nach Lemma 4.4.8. Also ist $V(0) = 0$, was $\overline{p}_*(\delta) \in \mathcal{X}^\infty(X)$ und damit $\delta \in \mathcal{X}^\infty(G\backslash\mathcal{V})$ nach sich zieht.

Nehmen wir nun auf der anderen Seite an, es gäbe beliebig kleine t mit $\phi_t(0) \notin X$, wobei wir dann nach eventuellem Übergang zu $-\phi_t$ offensichtlich erreichen können, daß diese t positiv sind. Da X abgeschlossen ist, gibt es eine Umgebung U von 0 und ein $t > 0$, so daß $\phi_t(U) = \emptyset$. Sei $x \in U \cap X$. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung liegt die Kurve $\gamma(s) = \phi_s(x)$ für genügend kleine $s < t$ in X. Sei s_0 das größte $s < t$, so daß $\gamma([0, s_0]) \subset X$. Da V tangential zu den Strata von $X \setminus \{0\}$ ist, muß $\phi_{s_0}(x) = 0$ gelten. Folglich ist $U \cap X$ in der Kurve $\phi_{-s}(0)$, $0 \leq s \leq t$ enthalten, was der Annahme $\dim X \geq 2$ widerspricht.

Zum Schluß müssen wir noch zeigen, daß auf einem Orbitraum mit einem Stratum der Kodimension 1 eine Derivation δ existiert, die nicht durch ein glattes Vektorfeld gegeben ist. Wieder aufgrund des Scheibensatzes können wir uns auf die Situation beschränken, in der das Stratum mit Kodimension 1 durch den Ursprung eines linearen G-Darstellungsraums $\mathcal{V}$ gegeben ist. Dann hat aber $\mathcal{V}$ die Dimension 1, folglich ist entweder $\mathsf{G}/\mathsf{G}_0 = \{\mathsf{e}\}$ oder $\mathsf{G}/\mathsf{G}_0 = \mathbb{Z}_2$. Im ersten Fall ist der Orbitraum $\mathsf{G}\backslash\mathcal{V}$ dann diffeomorph zu $\mathbb{R}$, im zweiten zu $\mathbb{R}^{\geq 0}$. In beiden Fällen ist $\frac{\partial}{\partial x}$ eine Derivation, die nicht durch ein glattes Vektorfeld auf $\mathsf{G}\backslash\mathcal{V}$ induziert ist, denn dieses müßte in $\mathsf{G}0$ ja verschwinden. $\square$

4.4.10 Zum Ende dieses Abschnitts wollen wir eine weitere bedeutsame Klasse von stratifizierten Räumen mit glatter Struktur vorstellen, die sogenannten Orbifolds. Diese wurden von Satake [135] in die mathematische Literatur unter dem Namen *V-manifolds* eingeführt. Orbifolds stellen in natürlicher Weise stratifizierte Räume mit sehr milden Singularitäten dar. Gerade deshalb gestatten Orbifolds oft Resultate und Konstruktionen, die man ansonsten nur für Mannigfaltigkeiten kennt. Beispielsweise gelang es Kawasaki [92, 93] ein Signaturtheorem sowie einen Indexsatz für Orbifolds zu beweisen.

In der mathematischen Literatur ist die genaue Definition von Orbifolds sehr technisch (siehe [135] oder auch [43, B.2.3.]), in unserer Sprache der stratifizierten Räume gelingt sie jedoch mit den in diesem Abschnitt bereitgestellten Orbiträumen sehr leicht.

Ein Whitney (A)-Raum $(\mathsf{X}, \mathcal{C}^\infty)$ heißt *Orbifold*, wenn es eine Überdeckung $\mathcal{U} = (\mathsf{U}_j)_{j\in J}$ von X durch offene Mengen derart gibt, daß jeder Flecken U_j diffeomorph zu einem Orbitraum der Form $\mathsf{G}_j\backslash\mathsf{M}_j$ ist, wobei G_j eine endliche Gruppe ist und M_j eine differenzierbare G_j-Mannigfaltigkeit. Die zugehörigen Projektionen $\pi_j : \mathsf{M}_j \to \mathsf{U}_j$ heißen *Orbifold-Karten*. Offensichtlich kann man nach dem Scheibensatz die Mannigfaltigkeiten M_j als offene Nullumgebungen in einem linearen G_j-Darstellungsraum wählen.

Kapitel 5

DeRham-Kohomologie

5.1 Der deRham-Komplex auf singulären Räumen

Untersuchungen zur deRham-Kohomologie auf singulären Räumen haben eine lange Tradition. Schon in den frühen Jahren der komplexen Analysis war man an der Frage interessiert, wie über einer singulären analytischen Varietät die Beziehung zwischen der (glatten) deRham-Kohomologie und der klassischen Kohomologie aussieht (siehe zum Beispiel Norguet [125], 1959). Im Jahre 1967 konnte dann Herrera [76] mittels eines Beispiels nachweisen, daß, anders als im regulären Fall, die deRham-Kohomologie auf einer singulären analytischen Varietät nicht mit der singulären Kohomologie des zugrunde liegenden topologischen Raums übereinstimmen muß. In einer weiteren Arbeiten haben dann Bloom–Herrera [15] gezeigt, daß für einen analytischen Raum $(\mathsf{X}, \mathcal{O})$ ein kanonisches splitting

$$\mathbf{H}^\bullet(\mathsf{X}; \Omega^\bullet_\mathsf{X}) \cong \mathsf{H}^\bullet(\mathsf{X}; \mathbb{C}) \oplus \mathsf{A}^\bullet$$

existiert, wobei $\mathbf{H}^\bullet(\mathsf{X}; \Omega^\bullet_\mathsf{X})$ die Hyperkohomologie der Garbe $\Omega^\bullet_\mathsf{X}$ der Kähler-Differentiale von $\mathcal{O}$ bezeichnet, und $\mathsf{H}^\bullet(\mathsf{X}; \mathbb{C})$ die "klassische" komplexe Kohomologie von X. Das Komplement $\mathsf{A}^\bullet$ zur klassischen Kohomologie verschwindet für reguläres X, falls X jedoch Singularitäten besitzt, so gilt im allgemeinen $\mathsf{A}^\bullet \neq 0$. Der Grund hierfür liegt letztlich darin, daß im singulären Fall die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_\mathsf{X} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \Omega^1_\mathsf{X} \longrightarrow \Omega^2_\mathsf{X} \longrightarrow \cdots$$

keine Auflösung der lokalkonstanten Garbe $\mathbb{C}_\mathsf{X}$ sein muß, und das liegt wiederum daran, daß im singulären Fall X nicht unbedingt holomorph kontrahierbar ist (siehe Reiffen [134]), mit anderen Worten also das Poincaré-Lemma für holomorphe Differentialformen auf X nicht gültig ist.

Betrachten wir nun einen stratifizierten Raum X mit glatter Struktur $\mathcal{C}^\infty$. Dann wirft sich natürlich die Frage auf, in welcher Beziehung die (noch zu definierende) deRham-Kohomologie von X mit der singulären Kohomologie steht, unter welchen Bedingungen ein deRham-Theorem gilt und so weiter. In diesem Abschnitt definieren wir die deRham-Kohomologie von X, die Berechnung derselben für verschiedene Klassen stratifizierter Räume erfolgt in den nächsten Abschnitten. Anschließend an die Definition des deRham-Komplexes geben wir noch einen historischen Überblick über verschiedene weitere Ansätze und Wege, eine sinnvolle Kohomologietheorie für stratifizierte Räume zu definieren.

5.1.1 Sei X ein stratifizierter Raum mit glatter Struktur $\mathcal{C}^\infty$. Die Garbe $\mathcal{C}^\infty$ der glatten Funktionen auf X erzeugt gemäß Abschnitt B.3 im Anhang B einen Komplex

$$\left(\Omega^\bullet, \mathrm{d}\right) : \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \Omega^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^k \longrightarrow \cdots$$

von Garben $\Omega^k := \Omega^k_{\mathsf{X},\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$. Nach Anwendung des globalen Schnittfunktors erhält man einen weiteren Komplex

$$\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}) \longrightarrow \Omega^1(\mathsf{X}) \longrightarrow \Omega^2(\mathsf{X}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^k(\mathsf{X}) \longrightarrow \cdots,$$

den sogenannten *deRham-Komplex* von $(\mathsf{X}, \mathcal{C}^\infty)$. Die Kohomologie $\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathsf{X})$ dieses Komplexes heißt *deRham-Kohomologie* von X.

Neben den oben schon erwähnten Untersuchungen von Herrera et al. gibt es auch weitere Ansätze für eine deRham- oder allgemeiner eine sinnvolle Kohomologie-Theorie auf singulären Räumen. Im folgenden stellen wir die wichtigsten davon vor, verweisen den Leser aber auch auf den Artikel [17] von Brasselet für eine ausführliche Darstellung des derzeiten Forschungsstandes über deRham-Theoreme auf singulären Varietäten.

5.1.2 Kontrollierte Differentialformen Verona hat in [156, 159] für jeden kontrollierten Raum X einen Komplex von sogenannten *kontrollierten Differentialformen* eingeführt. Das sind Familien glatter Differentialformen $(\alpha_S)_{S\in\mathcal{S}}$, die ähnlich den kontrollierten Vektorfeldern einer Kontrollbedingung genügen und sich nicht unbedingt zu einer globalen stetigen Differentialform zusammensetzen müssen - wobei im allgemeinen nicht einmal klar wäre, was für einen beliebigen kontrollierten Raum die globale Stetigkeit einer Differentialform überhaupt bedeuten sollte. Interessant ist nun, daß die entsprechenden Garben der kontrollierten Formen eine feine Auflösung der Garbe der lokalkonstanten reellen Funktionen auf X liefern, somit also ein deRham-Theorem für kontrollierte Differentialformen gilt. Ferrarotti [51] hat die Methode von Verona verfeinert und einen Komplex infinitesimal kontrollierter Formen vorgestellt, der ebenfalls ein deRham-Theorem liefert.

5.1.3 Schnitthomologie Wohl schon Poincaré wußte, daß Singularitäten die heute unter seinem Namen bekannte Dualität auf der Homologie von Mannigfaltigkeiten zerstören können. Man suchte deshalb nach einer (Ko)Homologietheorie für singuläre Räume, die einer Poincaré-Dualität genügt. Mit der in den 80-iger Jahren aufkommenden Schnitthomologie-Theorie von Goresky–McPherson [57, 58] ist genau das erreicht worden. In der Schnitthomologie betrachtet man die Homologie von Komplexen aus singuläre Ketten, die ein Stratum nur in einer durch eine sogenannte *Perversität* vorgegebenen Dimension schneiden. Eine Perversität ist somit nichts anderes als eine spezielle Funktion auf der Menge der Strata mit Werten in den ganzen Zahlen. Besonders elegant ist die garbentheoretische Beschreibung der Schnitthomologie, genauer mit sogenannten *perversen Garben*, die eigentlich Komplexe von Garben oder präziser Objekte in einer abgeleiteten Kategorie von Garben darstellen. Die Poincaré-Dualität in der Schnitthomologie ist in der Sprache perverser Garben dann eine unmittelbare Konsequenz aus der Verdier-Dualität für abgeleitete Kategorien (zu abgeleiteten Kategorien und zur Verdier-Dualität siehe zum Beispiel Kashiwara-Schapira [91]).

Ein deRham-Theorem für die Schnitthomologie stammt von BRASSELET–HECTOR–SARALEGI [19]. Genauer gesagt wird darin eine weitere spezielle Klasse von Formen, nämlich die der *Schnittformen* eingeführt, und gezeigt, daß die Integration von Schnittformen über Ketten einen Isomorphismus zwischen der Kohomologie von Schnittformen und der Schnitthomologie führt.

5.1.4 L^2**-Kohomologie** Ebenfalls Anfang der 80-iger Jahre wurde mit den Arbeiten von CHEEGER [35] und ZUCKER [174, 173] die Bedeutung der L^2-Kohomologie für das Studium singulärer Räume offenbar. Man versieht dabei einen stratifizierten Raum, oder besser das Top-Stratum desselben, mit einer Riemannschen Metrik und studiert die Kohomologie des Komplexes, der aus L^2-integrierbaren Differentialformen besteht. Aufgrund des Resultats [35, Thm. 6.1] von CHEEGER weiß man, daß für eine Riemannsche Pseudomannigfaltigkeit mit konischen Singularitäten die L^2-Kohomologie mit der Schnitthomologie zur mittleren Perversität übereinstimmt. CHEEGER–GORESKY–MACPHERSON [38] haben dieses Resultat auf analytisch lokal konische Varietäten ausgedehnt und gleichzeitig in der genannten Arbeit ihre berühmte Vermutung aufgestellt, die besagt, daß für eine projektiv-algebraische Varietät mit der Einschränkung der Fubini-Study-Metrik als Riemannscher Metrik die L^2-Kohomologie mit der Schnitthomologie mittlerer Perversität übereinstimmt. Für den Fall isolierter Singularitäten ist die Cheeger–Goresky–MacPherson-Vermutung von OHSAWA [126] gezeigt worden. Nach SJAMAAR [143] haben auch Orbiträume einer Riemannschen G-Mannigfaltigkeit die Eigenschaft, daß ihre L^2-Kohomologie mit der Schnitthomologie mittlerer Perversität übereinstimmt. Ein wesentliches Werkzeug bei vielen dieser Untersuchungen stellt dabei der garbentheoretische Zugang zur L^2-Kohomologie von NAGASE [122, 123] dar.

Ein weiteres sehr hilfreiches und intuitives Mittel zum Verständnis von Schnitthomologie und der Verbindung zur L^2- oder allgemeiner zur L^q-Kohomologie bildet das Konzept der *Schattenformen* von BRASSELET–GORESKY–MACPHERSON [18], das auch in [17] näher erläutert wird, auf das aber an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden kann.

5.2 DeRham-Kohomologie auf $\mathcal{C}^\infty$-Kegelräumen

Bevor wir mit der Berechnung der deRham-Kohomologie für einen $\mathcal{C}^\infty$-Kegelraum beginnen, erinnern wir erst einmal an das folgende klassische Resultat, das im wesentlichen das Poincaré-Lemma auf Mannigfaltigkeiten nach sich zieht.

5.2.1 Lemma *Sei* M *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und* $\iota_t : \mathsf{M} \to \mathsf{M} \times [0,\infty[$ *mit* $t \in [0,\infty[$ *die Einbettung* $x \mapsto (x,t)$. *Definiert man* $\mathsf{K}_{\mathsf{M},t} : \Omega^{l+1}(\mathsf{M} \times [0,t]) \to \Omega^l(\mathsf{M})$ *durch*

$$\mathsf{K}_{\mathsf{M},t}(\omega)(y)\,(v_1,\cdots,v_l) = \int_0^t \omega(y,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}, v_1,\cdots,v_l\right) ds,$$
$$\omega \in \Omega^{l+1}(\mathsf{M} \times [0,t]),\ y \in \mathsf{M},\ v_1,\cdots,v_l \in \mathsf{T}_y\mathsf{M},$$

so erfüllt der Operator $\mathsf{K}_{\mathsf{M},t}$ *die Beziehung* $d\mathsf{K}_{\mathsf{M},t} + \mathsf{K}_{\mathsf{M},t}d = \iota_t^* - \iota_0^*$. *Für jede glatte Homotopie* $\mathsf{H} : \mathsf{M} \times [0,t] \to \mathsf{M}$ *folgt daraus*

$$d\mathsf{K}_{\mathsf{M},t}\mathsf{H}^* + \mathsf{K}_{\mathsf{M},t}\mathsf{H}^*d = \mathsf{H}_t^* - \mathsf{H}_0^*, \tag{5.2.1}$$

wobei $H_s = H(\cdot, s)$ *für* $s \in [0, t]$.

Beweis: Die Behauptung folgt nach einfacher Rechnung aus Cartan's magic formula $di_V + i_V d = \mathcal{L}_V$, wobei $\mathcal{L}_V$ die Lie-Ableitung bezüglich des Vektorfelds V ist und i_V die Einfügung von V. Dabei lasse man V das durch $V(x, s) = \frac{\partial}{\partial s}$ gegebene Vektorfeld auf $M \times [0, t]$ sein. Für einen weiteren Beweis des Lemmas siehe auch Holmann–Rummler [83, §13]. □

5.2.2 Satz *Sei* $(X, \mathcal{C}^\infty)$ *ein* $\mathcal{C}^\infty$*-Kegelraum. Dann stellt die Garbensequenz*

$$\mathbb{R}_X \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \xrightarrow{d_1} \Omega^2 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} \Omega^k \xrightarrow{d_k} \cdots . \tag{5.2.2}$$

eine feine Auflösung der Garbe der lokalkonstanten Funktionen auf X *dar.*

Beweis: Wegen Proposition 2.3.2 wissen wir schon, daß alle Ω^k fein sind. Zudem gilt bekanntlich $d \circ d = 0$, es bleibt also nur zu zeigen, daß die Garbensequenz 5.2.2 exakt ist. Mit anderen Worten muß also nachgewiesen werden, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$ eine Basis von Umgebungen W von x existiert, so daß $\mathcal{H}^k(W) = 0$ für $k > 0$. Dabei bezeichnet $\mathcal{H}^k$ die Kohomologiegarbe von $\big(\Omega^\bullet, d\big)$, also die Quotientengarbe $\ker d_k / \operatorname{im} d_{k-1}$.

Nach Voraussetzung an X gibt es eine glatte Kegelkarte $k : U \to (S \cap U) \times CL \subset (S \cap U) \times \mathbb{R}^{l+1}$ um x derart, daß S das Stratum ist, in dem x liegt, und so daß S niedrigste Dimension unter den Strata von U hat. Die zu L gehörende Linkkarte sei $l : L \hookrightarrow S^l$. Da die zu beweisende Aussage lokal ist, können wir jetzt sogar annehmen, daß k und l jeweils identische Einbettungen sind, und daß gilt

$$X = U = \big\{ y = (y_S, y_{\mathrm{rad}} \cdot y_L) \in S \times \mathbb{R}^{l+1} \,\big|\, y_{\mathrm{rad}} \in [0, 1[\text{ und } y_L \in L \big\}.$$

Der Punkt x hat in dieser Darstellung die Koordinaten $(x, 0)$. Sei nun $V \subset S$ eine glatt zusammenziehbare Umgebung von x, $r \in]0, 1[$, und

$$W_{V,r} = \big\{ y \in X \big| y_S \in V \text{ und } y_{\mathrm{rad}} < r \big\}.$$

Nach Voraussetzung an V existiert ein glatte Homotopie $H_S : V \times [0, 1] \to V$, so daß $H_S(y_S, 1) = y_S$ und $H_S(y_S, 0) = x$ für alle $y_S \in V$. Wir können H_S dann zu einer glatten Homotopie

$$H : V \times B_r(0) \times [0, 1] \to V \times B_r(0), \quad (y_S, y_B, t) \mapsto (H_S(y_S), t \cdot y_B)$$

erweitern, wobei $B_r(0)$ die offene Kugel um den Ursprung in $\mathbb{R}^{l+1}$ vom Radius r ist. Es gilt dann $H_1 = \mathrm{id}_{W_{V,r}}$ und $H_0(y) = x$ für alle $y \in W_{V,r}$. Wichtig für das Folgende ist die Tatsache, daß H ein Homotopie relativ $W_{V,r}$ darstellt, also $H_t(W_{V,r}) \subset W_{V,r}$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt. Zudem ist $H_t(R) \subset R$ für jedes Stratum R und jedes $t \in]0, 1]$, da die Strata $\neq S$ durch $S \times]0, 1[\cdot \tilde{R}$ gegeben sind, wobei $\tilde{R}$ die Strata des Links L durchläuft. Sei nun $\alpha \in \Omega^k(W_{V,r})$ eine geschlossene k-Form. Nach Proposition 2.3.7 existiert dann eine glatte Form $\omega \in \Omega^k(V \times B_r(0)$ mit $k^*\omega = \alpha$. Da $d\alpha = 0$, gilt für Tangentialvektoren $v_0, \cdots, v_k \in T_y R$ eines Stratums $R \subset X$ die Beziehung $d\omega(v_0 \otimes \cdots \otimes v_k) = 0$. Wir definieren die Form $\eta \in \Omega^{k-1}(V \times B_r(0))$ durch $\eta = KH^*\omega$, wobei $K := K_{V \times B_r(0), 1}$ der

Operator aus dem obigen Lemma ist, und setzen $\beta = \mathsf{k}^*\eta \in \Omega^{k-1}(W_{V,r})$. Wir behaupten nun, daß

$$d\beta = \alpha \tag{5.2.3}$$

gilt, woraus sich die Exaktheit der Garbensequenz (5.2.2) ergibt, da die $W_{V,r}$ eine Umgebungsbasis von x ausschöpfen. Zum Nachweis von (5.2.3) schreiben wir auf, wie die Form $KH^*d\omega$ explizit aussieht:

$$(KH^*d\omega)(y)\big(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k\big) = \int_0^1 (d\omega)(H(y,t))\big(\dot{H}(y,t) \otimes TH.v_1 \otimes \cdots \otimes TH.v_k\big)\, dt,$$
$$y \in V \times B_r(0),\ v_1, \cdots, v_k \in T_y(V \times B_r(0)).$$

Dabei ist $\dot{H}$ die partielle Ableitung von $H(y,t)$ nach der Variablen t, und TH die Tangentialabbildung von H. Sei R das Stratum, in dem y liegt, und die v_l Tangentialvektoren von R an der Stelle y. Wegen $H(y,t) \in R$ für $t \in]0,1]$ muß dann nach den obigen Überlegungen $(KH^*d\omega)(y)\big(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k\big) = 0$ sein, es gilt also $k^*(KH^*d\omega) = 0$. Die Beziehung (5.2.1) aus dem Lemma 5.2.1 ergibt nun wegen $H_0^*\omega = 0$

$$d\beta = dk^*\eta = k^*dKH^*\omega = k^*(dKH^*\omega + KH^*d\omega) = k^*H_1^*\omega = \alpha.$$

Das war zu zeigen. □

5.2.3 Korollar *Die deRham-Kohomologie eines $\mathcal{C}^\infty$-Kegelraums X stimmt in kanonischer Weise mit der singulären Kohomologie überein.*

Beweis: Für einen beliebigen topologischen Raum Y und jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $S_k(Y)$ die freie Abelsche Gruppe über den k-Simplizes in Y, das heißt über den stetigen Abbildungen $\sigma : s_k \to Y$, wobei s_k das k-te Standardsimplex ist (siehe 1.1.14). Zusammen mit dem Randoperator $\partial : S_k(Y) \to S_k(Y)$ erhält man somit den wohlbekannten singulären Komplex $(S_\bullet(Y), \partial)$ von Y. Unter $S^k(Y;\mathbb{R})$ verstehen wir den Vektorraum aller Homomorphismen von $S_k(Y)$ nach $\mathbb{R}$. Zusammen mit dem zu ∂ dualen Korandoperator δ ergibt sich daraus der singuläre Koketten-Komplex $(S^\bullet(Y;\mathbb{R}), \delta)$, dessen Kohomologie bekanntlich die singuläre Kohomologie von Y ist. Wir wollen die singuläre Kohomologie des Kegelraums X nun garbentheoretisch beschreiben. Dabei benutzen wir die in Godement [54, Ex. 3.9.1] angegebenen Konstruktionen. Falls $V \subset U \subset X$ offen sind, so hat man einen kanonischen Einschränkungsmorphismus $S^k(U;\mathbb{R}) \to S^k(V;\mathbb{R})$, der zudem mit dem Korandoperator vertauscht. Damit wird $S^k(\,\cdot\,;\mathbb{R})$ zu einer Prägarbe auf X. Sei $\mathcal{S}^k(\,\cdot\,;\mathbb{R})$ die dazu assoziierte Garbe, und $(\mathcal{S}^\bullet(\,\cdot\,;\mathbb{R}), \delta)$ der zugehörige Garbenkomplex. Da X parakompakt ist, ist der kanonische Morphismus $S^k(X;\mathbb{R}) \to \mathcal{S}^k(X;\mathbb{R})$ surjektiv (siehe [54]), und die Kohomologie von $(\mathcal{S}^\bullet(X;\mathbb{R}), \delta)$ stimmt mit der singulären Kohomologie überein. Nun beachte man, daß $\mathcal{S}^k(\,\cdot\,;\mathbb{R})$ für jedes k nach [54] eine weiche Garbe ist, insbesondere also azyklisch bezüglich der Rechtsableitung des globalen Schnittfunktors $\Gamma(X;\,\cdot\,)$. Da X lokal bogenzusammenhängend und lokal kontrahierbar ist, erhalten wir somit eine $\Gamma(X;\,\cdot\,)$-azyklische Auflösung der Garbe der lokalkonstanten reellen Funktionen auf X:

$$\mathbb{R}_X \longrightarrow \mathcal{S}^0(\,\cdot\,;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}^1(\,\cdot\,;\mathbb{R}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{S}^k(\,\cdot\,;\mathbb{R}) \longrightarrow \cdots .$$

Nach dem vorangehenden Satz stellt aber auch (5.2.2) eine $\Gamma(X;\cdot)$-azyklische Auflösung von $\mathbb{R}_X$ dar, folglich stimmen die singuläre Kohomologie, also die Kohomologie von $(\mathcal{S}^\bullet(X;\mathbb{R}),\delta)$, und die deRham-Kohomologie, also die von $(\Omega^\bullet(X),d)$, überein. Den kanonischen Morphismus von $(\Omega^\bullet(X),d)$ nach $(\mathcal{S}^\bullet(X;\mathbb{R}),\delta)$ erhält man wie auf Mannigfaltigkeiten durch Integration einer k-Form α über jeder Kette $\sigma \in S_k(X)$. $\square$

5.3 DeRham-Theoreme auf Orbiträumen

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß die Kohomologie des Komplex der basischen Formen auf einem Orbitraum einer eigentlichen G-Wirkung in kanonischer Weise die singuläre Kohomologie des Orbitraums widerspiegelt. Zudem zeigen wir, daß unter gewissen Voraussetzungen an die Dimensionen der Strata des Orbitraums der Garbenkomplex der Differentialformen quasi-isomorph zum Komplex der basischen Formen ist.

Für den Fall einer kompakten Lie-Gruppe G ist schon von Koszul [97] die Behauptung aufgestellt und bewiesen worden, daß die Kohomologie des basischen Komplexes mit der Kohomologie des Orbitraums übereinstimmt, allerdings erfolgte der Beweis mit anderen Methoden.

Wir beginnen mit einigen einfachen Erläuterungen zum basischen Komplex.

5.3.1 Sei M eine G-Mannigfaltigkeit, auf der die Liegruppe G eigentlich operiert, sei $\pi : M \to G\backslash M$ die kanonische Projektion und für jedes offene $U \subset G\backslash M$ sei $\Omega^k_{\mathrm{basic}}(U)$ der Raum der basischen k-Formen auf $\pi^{-1}(U)$. Dadurch erhält man eine Garbe $\Omega^k_{\mathrm{basic}}$ auf $G\backslash M$. Sei nun $\alpha \in \Omega^k_{\mathrm{basic}}(U)$ basisch. Insbesondere ist dann α eine Differentialform auf $\pi^{-1}(U)$, also kann man das Differential $d\alpha$ bilden. Da für jedes $g \in G$ die Beziehung ${\Phi_g}^* d\alpha = d{\Phi_g}^*\alpha$ gilt und für jedes $\xi \in \mathfrak{g}$ nach Cartan $i_{\xi_M} d\alpha = -d i_{\xi_M}\alpha + \mathcal{L}_{\xi_M}\alpha = 0$, ist die Ableitung einer basischen Form wieder basisch. Somit erhalten wir neben dem Garbenkomplex der Differentialformen einen weiteren Garbenkomplex auf $G\backslash M$:

$$\big(\Omega^\bullet_{\mathrm{basic}}, d\big) : \mathcal{C}^\infty_{G\backslash M} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{basic}} \longrightarrow \Omega^2_{\mathrm{basic}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^k_{\mathrm{basic}} \longrightarrow \cdots . \tag{5.3.1}$$

Dabei wird $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash M}$ kanonisch mit der Garbe identifiziert, deren Schnitträume durch $\mathcal{C}^\infty(\pi^{-1}(U))^G$ für $U \subset X$ offen gegeben sind. Nach Anwendung des globalen Schnittfunktors erhalten wir den sogenannten *basischen Komplex* $\big(\Omega^\bullet_{\mathrm{basic}}(G\backslash M), d\big)$. Dessen Kohomologie $H^\bullet_{\mathrm{basic}}(G\backslash M)$ wollen wir bestimmen und nennen sie die *basischen Kohomologie* von $G\backslash M$.

Aufgrund der universellen Eigenschaft (KÄ) der Kähler-Differentiale aus Anhang B existiert ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(G\backslash M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"'] & \Omega^1_{\mathrm{basic}}(G\backslash M) \\ \Omega^1(G\backslash M) . \arrow[ur, "h^1"'] & \end{tikzcd}$$

Der Morphismus h^1 induziert dann auf funktorielle Weise einen Morphismus von Garbenkomplexen $h^\bullet : \big(\Omega^\bullet_{G\backslash M}, d\big) \to \big(\Omega^\bullet_{\mathrm{basic}}, d\big)$. Ziel der folgenden Überlegungen ist es nachzuweisen, daß unter gewissen Voraussetzungen an $G\backslash M$ der Morphismus $h^\bullet$ auf Kohomologie-Ebene zu einem Isomorphismus führt.

5.3.2 Äquivariantes Lemma von Poincaré (*vgl.* [165, S. 23], [4, Thm. 6], [69, 2.9]) *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, auf der eine Liegruppe G eigentlich operiert, und $\iota : N \hookrightarrow M$ eine G-invariante abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M. Dann existiert eine invariante Umgebung U von N derart, daß es zu jeder G-invarianten geschlossene k-Form α, deren Pullback $\iota^*\alpha$ verschwindet, eine $(k-1)$-Form β über U gibt, so daß*

$$d\beta = \alpha_{|U} \text{ und } \beta_{|N} = 0.$$

Falls α basisch ist, kann auch β basisch gewählt werden.

Beweis: Als abgeschlossene invariante Untermannigfaltigkeit von M ist N die Vereinigung (lokalendlich vieler) Orbits, folglich genügt es, die Existenz von β mit den geforderten eigenschaften auf einer invarianten Umgebung eines jeden Orbits $\subset N$ nachzuweisen. Mittels einer invarianten glatten Teilung der Eins lassen sich diese Formen dann verkleben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man also annehmen, daß N ein Orbit Gx ist, und identifiziert N mit dem Nullschnitt im Bündel $G \times_{G_x} \mathcal{V}_x$, wobei G_x die Isotropiegruppe eines Punktes $x \in N$ ist und $\mathcal{V}_x$ die Scheibe an x. Man betrachte nun zu diesem Bündel die folgende Homotopie:

$$H : G \times_{G_x} \mathcal{V}_x \times [0,1] \to G \times_{G_x} \mathcal{V}_x, \quad ([(g,v)],t) \mapsto [(g,(1-t)v)].$$

Offensichtlich kommutiert dann H mit der G-Aktion, ebenso der Operator $K := K_{G\times_{G_x}\mathcal{V}_x,1}$ aus Lemma 5.2.1. Folglich ist $\beta := KH^*\alpha$ eine G-invariante $k-1$-Form und genügt der Beziehung

$$d\beta = -KH^*d\alpha + \alpha - \iota^*\alpha = \alpha.$$

Da $\dot{H}(y,t) = 0$ für alle $y \in N$ folgt desweiteren $\beta_{|N} = 0$. Falls α basisch ist, ergibt sich für jedes $\xi \in \mathfrak{g}$

$$i_{\xi_M}\beta = -KH^* i_{\xi_M}\alpha = 0,$$

da, wie schon erwähnt, H und K mit der G-Aktion vertauschen. Das war zu zeigen. □

5.3.3 Korollar *Der Garbenkomplex der basischen Differentialformen liefert eine feine Auflösung*

$$\mathbb{R}_{G\backslash M} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{G\backslash M} \longrightarrow \Omega^1_{\text{basic}} \longrightarrow \Omega^2_{\text{basic}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^k_{\text{basic}} \longrightarrow \cdots .$$

Insbesondere stimmt die basische Kohomologie mit der singulären Kohomologie von $G\backslash M$ in kanonischer Weise überein.

Beweis: Die Feinheit aller Garben Ω^k_{basic} ist eine Konsequenz daraus, daß $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash M}$ fein ist und jedes der Ω^k_{basic} eine $\mathcal{C}^\infty_{G\backslash M}$-Modulgarbe. Das äquivariante Lemma von Poincaré impliziert die Exaktheit der Garbensequenz $\Omega^\bullet_{\text{basic}}$. Der Rest der Behauptung ergibt sich dann aus einem Standardargument der homologischen Algebra analog wie Korollar 5.2.3. □

5.3.4 Korollar *Sei* $\mathsf{G}x \in \mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ *ein Punkt des Orbitraums und* x *die von einer Hilbert-Basis* $p = (p_1, \cdots, p_l)$ *für* $\mathcal{P}(\mathcal{V}_x)^{\mathsf{G}_x}$ *induzierte singuläre Karte um* $\mathsf{G}x$*. Es gibt dann eine kontrahierbare Umgebung* $\mathsf{G}\backslash\mathsf{U}$ *im Definitionsbereich von* x*, eine offene Menge* $\mathsf{O} \subset \mathbb{R}^l$*, in der* $x(\mathsf{G}\backslash\mathsf{U})$ *abgeschlossen liegt und eine glatte Homotopie* $\overline{\mathsf{H}} : \mathsf{O} \times [0,1] \to \mathbb{R}^l$ *relativ* $\mathsf{X} := x(\mathsf{G}\backslash\mathsf{U})$*, so daß* $\overline{\mathsf{H}}_{0|\mathsf{X}} = \mathrm{id}_{\mathsf{X}}$ *und* $\overline{\mathsf{H}}_{1|\mathsf{X}} = x(\mathsf{G}x) = 0$.

Beweis: Die im Beweis des äquivarianten Lemmas von Poincaré konstruierte glatte Homotopie $\mathsf{H} : \mathsf{G} \times_{\mathsf{G}_x} \mathcal{V}_x \times [0,1] \to \mathsf{G} \times_{\mathsf{G}_x} \mathcal{V}_x$ liefert via ihrer G-Äquivarianz unter Anwendung des Satzes von Schwarz sofort die gesuchte Homotopie $\overline{\mathsf{H}}$. □

5.3.5 Satz *Sei* M *eine* G*-Mannigfaltigkeit, auf der* G *eigentlich wirkt, und der Orbitraum* $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ *besitze keine Strata der Kodimension* 1*. Dann liefert der Garbenkomplex der Differentialformen auf* $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ *eine feine Auflösung*

$$\mathbb{R}_{\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}} \longrightarrow \Omega^1_{\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}} \longrightarrow \Omega^2_{\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^k_{\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}} \longrightarrow \cdots .$$

Desweiteren stellt $h^\bullet : \left(\Omega^\bullet_{\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}}, d\right) \to \left(\Omega^\bullet_{\mathrm{basic}}, d\right)$ *einen Quasi-Isomorphismus dar, folglich stimmen die basische Kohomologie* $\mathsf{H}^\bullet_{\mathrm{basic}}(\mathsf{G}\backslash\mathsf{M})$ *und die deRham-Kohomologie von* $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ *überein. Zudem sind beide Kohomologien kanonisch isomorph zur singulären Kohomologie von* $\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$.

Beweis: Die Feinheit der Garbensequenz ist klar. Könnten wir also noch ihre Exaktheit beweisen, so würde die Sequenz wie behauptet eine feine Auflösung von $\mathbb{R}_{\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}}$ darstellen. Da das aber schon für den basischen Komplex gilt und $h^\bullet$ ein Morphismus von Komplexen von Garben ist, müßte $h^\bullet$ dann ein Quasi-Isomorphismus sein. Mit Korollar 5.3.3 ergäbe sich dann auch der Rest der Behauptung. Es bleibt also nur die Exaktheit von $\left(\Omega^\bullet_{\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}}, d\right)$ zu zeigen. Zuerst erinnern wir daran, daß aufgrund der Voraussetzung über die Dimensionen der Strata nach Proposition 4.4.9 die Beziehung

$$\mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}), \mathcal{C}^\infty(\mathsf{G}\backslash\mathsf{M})) = \mathcal{X}^\infty(\mathsf{G}\backslash\mathsf{M}) \tag{5.3.2}$$

gilt. Sei nun ein Punkt $\mathsf{G}x \in \mathsf{G}\backslash\mathsf{M}$ gewählt, $\mathsf{G}\backslash\mathsf{U}$ eine Umgebung wie in Korollar 5.3.4, $x : \mathsf{G}\backslash\mathsf{U} \to \mathbb{R}^l$ eine aus einer minimalen Hilbert-Basis p für $\mathcal{P}(\mathcal{V}_x)^{\mathsf{G}_x}$ entstehende singuläre Karte wie in 5.3.4 und $\mathsf{O} \subset \mathbb{R}^l$ eine offene Nullumgebung, so daß $\mathsf{X} := x(\mathsf{G}\backslash\mathsf{U})$ abgeschlossen in O liegt. Bezeichnet $\mathcal{J} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathsf{O})$ das Verschwindungsideal von X, so induzieren wegen Proposition 2.2.8 zwei Formen $\omega, \eta \in \Omega^k(\mathsf{O})$ genau dann die gleiche Form $\in \Omega^k(\mathsf{X}) \cong \Omega^k(\mathsf{G}\backslash\mathsf{U})$, wenn für alle $V_1, \cdots, V_k \in \mathcal{X}^\infty_{\mathcal{J}}(\mathsf{O})$

$$\omega(V_1, \cdots, V_k) = \eta(V_1, \cdots, V_k).$$

Wegen (5.3.2) ist jedoch $\mathcal{X}^\infty_{\mathcal{J}}(\mathsf{O})$ gleich dem Raum $\mathcal{X}^\infty_{\mathsf{X}}(\mathsf{O})$ aller glatten Vektorfelder auf O, die über jedem Stratum S von X tangential zu S sind. Dieses Resultat halten wir für das folgende fest.

Sei nun $\alpha \in \Omega^k(\mathsf{G}\backslash\mathsf{U})$ geschlossen. Wir wollen ein $\beta \in \Omega^{k-1}(\mathsf{G}\backslash\mathsf{U})$ konstruieren, so daß $d\beta = \alpha$. Daraus ergibt sich dann sofort die behauptete Exaktheit der obigen Garbensequenz. Sei $\overline{\mathsf{H}} : \mathsf{O} \times [0,1] \to \mathbb{R}^l$ die Homotopie relativ $\mathsf{X} := x(\mathsf{G}\backslash\mathsf{U})$ aus Korollar 5.3.4. Dann gilt mit dem Operator $\mathsf{K} := \mathsf{K}_{\mathsf{O},1}$ aus Lemma 5.2.1

$$d\mathsf{K}\overline{\mathsf{H}}^* + \mathsf{K}\overline{\mathsf{H}}^* d = \overline{\mathsf{H}}_1^* - \overline{\mathsf{H}}_0^*. \tag{5.3.3}$$

Man wähle sich nun eine k-Form $\omega \in \Omega^k(\mathsf{O})$ mit $\mathsf{x}^*\omega = \alpha$. Da p als minimale Hilbert-Basis gewählt war gilt wegen Lemma 4.4.5 und $\mathsf{d}\alpha = 0$ auch $\mathsf{d}\omega(0) = 0$. Folglich gibt es eine Form $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathsf{O})$ mit $\mathsf{d}\eta(0) = \omega(0)$. Wir setzen nun $\tilde{\omega} = \omega - \mathsf{d}\eta$. Da $\overline{\mathsf{H}}$ eine Homotopie relativ $\mathsf{X} := \mathsf{x}(\mathsf{G}\backslash\mathsf{U})$ ist und $\mathsf{d}\tilde{\omega}_{|\mathsf{X}} = 0$ gilt, folgt aus Gl. (5.3.3) für jedes $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ und alle $\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_k \in \mathfrak{X}^\infty_{\mathsf{X}}(\mathsf{O})$ die Beziehung

$$
\begin{aligned}
(-\mathsf{d}\mathsf{K}\overline{\mathsf{H}}^*\tilde{\omega}).(\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_k)(\mathsf{x}) &= \big(\overline{\mathsf{H}}_0^*\tilde{\omega} - \overline{\mathsf{H}}_1^*\tilde{\omega} + (\mathsf{K}\overline{\mathsf{H}}^*\mathsf{d}\tilde{\omega})\big).(\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_k)(\mathsf{x}) \\
&= \tilde{\omega}.(\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_k)(\mathsf{x}) - \tilde{\omega}.(\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_k)(0) - (-1)^k \mathsf{K}\big((\overline{\mathsf{H}}^*\mathsf{d}\tilde{\omega}).(\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_k)\big)(\mathsf{x}) \\
&= \tilde{\omega}.(\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_k)(\mathsf{x}),
\end{aligned}
$$

wobei ausgenützt wurde, daß $\overline{\mathsf{H}}_*\mathsf{V}_i \in \mathfrak{X}^\infty_{\mathsf{X}}(\mathsf{O})$ und folglich $\overline{\mathsf{H}}^*\mathsf{d}\omega.(\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_k)(\mathsf{x}) = 0$. Definieren wir nun $\beta := \mathsf{x}^*(\eta - \mathsf{K}\overline{\mathsf{H}}^*\tilde{\omega}) \in \Omega^{k-1}(\mathsf{G}\backslash\mathsf{U})$, so ergibt sich also $\mathsf{d}\beta = \alpha$. Das war zu zeigen. □

5.4 DeRham-Kohomologie von Whitney-Funktionen

In den beiden vorangehenden Abschnitten konnte zwar gezeigt werden, daß die deRham-Kohomologie auf Kegel- und auf Orbiträumen mit der singulären übereinstimmt, für beliebige Whitney-Räume ist das jedoch nicht der Fall. Dieses Faktum folgt aus dem schon erwähnten Resultat von Herrera, der in [76] ein Beispiel für eine analytische Varietät X angegeben hat, deren deRham-Kohomologie in Bezug auf die analytischen Funktionen echt größer ist als die singuläre Kohomologie von X. Andererseits weiß man aufgrund der Arbeiten von Grothendieck [65] und Hartshorne [74] zur algebraischen Kohomologie (siehe auch Herrera–Lieberman [77]), daß man die Kohomologie einer algebraischen oder komplex-analytischen Varietät $(\mathsf{Y}, \mathcal{O}_\mathsf{Y})$ durch die deRham-Kohomologie der formalen Vervollständigung der Strukturgarbe $\mathcal{O}_\mathsf{Y}$ berechnen kann. Gemeint ist damit folgendes. Die Varietät Y liegt ja eingebettet in einem $\mathbb{C}^n$ und erbt von ihm die Strukturgarbe $\mathcal{O}_\mathsf{Y} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/\mathcal{J}$ durch Ausmodulieren der Verschwindungsgarbe $\mathcal{J}$. Anstelle von $\mathcal{O}_\mathsf{Y}$ betrachtet man für natürliche k die Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/\mathcal{J}^k$ und geht zum induktiven Limes $\hat{\mathcal{O}}_\mathsf{Y} := \varinjlim \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/\mathcal{J}^k$ über, den man die *formale Vervollständigung* von $\mathcal{O}_\mathsf{Y}$ nennt. Ausgehend von $\hat{\mathcal{O}}_\mathsf{Y}$ bildet man dann den Garbenkomplex $\hat{\Omega}^\bullet_\mathsf{Y} := \Omega^\bullet(\hat{\mathcal{O}}_\mathsf{Y})$, wendet darauf den globalen Schnittfunktor an und geht anschließend zur Kohomologie des dadurch erhaltenen Komplexes über. Die so erhaltene Kohomologie heißt *algebraische deRham-Kohomologie* und stimmt nach [65] und [74] mit der Kohomologie von Y überein.

Der Leser möge jetzt das Konzept der formalen Vervollständigung im algebraischen Fall mit der Konstruktion der Whitney-Funktionen in Abschnitt 1.5 vergleichen. Dabei wird ihm sicher sofort die Analogie der beiden Konstruktionen auffallen, was unmittelbar die Vermutung nahelegt, daß die deRham-Kohomologie der Whitney-Funktionen auf einem Whitney-Raum X die singuläre Kohomologie von X liefert. Für jeden krümmungsmoderaten Whitney-Raum X ist dies auch tatsächlich der Fall, wie wir im folgenden zeigen werden. Zu bemerken ist dabei noch, daß in dem Beweis dieses Resultats überwiegend analytische sowie einige geometrische Methoden verwendet werden.

5.4.1 Zuerst müssen wir genauer festlegen, was unter der deRham-Kohomologie von Whitney-Funktionen auf einem stratifizierten Raum X mit glatter Struktur $\mathcal{C}^\infty$ zu verstehen ist. Dazu wählen wir eine Kartenüberdeckung $\mathcal{U} = \big(\mathsf{U}_j, \mathsf{x}_j\big)$ von X, betrachten die zugehörige Garbe $\mathcal{E}^\infty := \mathcal{E}^\infty_{\mathsf{X},\mathcal{U}}$ der Whitney-Funktionen der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ und bilden gemäß Abschnitt B.3 die Garbe $\Omega^1_{\mathcal{E}^\infty/\mathbb{R}}$ der Kähler-Differentiale. Diese bezeichnen wir im folgenden mit $\widehat{\Omega}^1_{\mathsf{X},\mathcal{U}}$ oder auch kürzer nur mit $\widehat{\Omega}^1$. Aus $\widehat{\Omega}^1$ ergeben sich nun für $k \in \mathbb{N}$ weitere Garben $\widehat{\Omega}^k = \widehat{\Omega}^k_{\mathsf{X},\mathcal{U}} := \Lambda^k \widehat{\Omega}^1$, deren Schnitte wir als *Whitney k-Formen* auf X bezeichnen. Zusammen mit der Kähler-Ableitung $\mathsf{d} : \widehat{\Omega}^k_{\mathsf{X},\mathcal{U}} \to \widehat{\Omega}^k_{\mathsf{X},\mathcal{U}}$ erhalten wir schließlich einen Garbenkomplex $\big(\widehat{\Omega}^\bullet, \mathsf{d}\big)$ aus dem nach Anwendung des globalen Schnittfunktors der *Whitney–deRham-Komplex* von $(\mathsf{X}, \mathcal{C}^\infty)$ hervorgeht:

$$\mathcal{E}^\infty(\mathsf{X}) \longrightarrow \widehat{\Omega}^1(\mathsf{X}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \widehat{\Omega}^k(\mathsf{X}) \longrightarrow \cdots .$$

Die Kohomologie $\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{WdR}}(\mathsf{X})$ dieses Komplexes nennen wir *Whitney–deRham-Kohomologie* von X.

Zur Berechnung von $\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{WdR}}(\mathsf{X})$ zeigen wir zuerst

5.4.2 Lemma *Unter der Voraussetzung, daß der stratifizierte Raum X mittels einer globalen singulären Karte x in den Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ eingebettet werden kann, und daß die Überdeckung $\mathcal{U}$ gleich (X, x) ist, kann die Garbe $\widehat{\Omega}^k$ kanonisch mit $\mathcal{E}^\infty \otimes_{\mathcal{C}^\infty} \Omega^k_{\mathsf{x}}$. identifiziert werden. Dabei bezeichnet Ω^k_{x} die mittels der Karte x zurückgezogene Garbe $\Omega^1_{\mathsf{x}} = \mathsf{x}^*(\Omega^1_{\mathbb{R}^n})$.*

Beweis: Zur Vereinfachung der Notation können wir für das Folgende ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X ein lokal abgeschlossener stratifizierter Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist, und x die identische Abbildung. Es genügt, die Behauptung für $k = 1$ zu zeigen. Sei $\mathcal{J}$ die Garbe auf X, die aus den Keimen derjenigen glatten Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ besteht, deren partielle Ableitungen beliebiger Ordnung auf X verschwinden. Nach dem Fortsetzungssatz von Whitney ist dann $\mathcal{E}^\infty = \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n|\mathsf{X}} / \mathcal{J}$. Aufgrund der zweiten exakten Fundamentalsequenz B.1.5 erhält man eine exakte Garbensequenz

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow \mathcal{E}^\infty \otimes_{\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n|\mathsf{X}}} \Omega^k_{\mathbb{R}^n|\mathsf{X}} \longrightarrow \widehat{\Omega}^1 \longrightarrow 0.$$

Da aber $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}$ nach Lemma C.3.3, folgt die Behauptung. □

5.4.3 Satz *Sei X ein (A)-stratifizierter Raum, auf dem für jedes $\mathsf{m} \in \mathbb{N}^{>0}$ ein von der Ordnung m krümmungsmoderates Kontrolldatum existiert und der lokal von der Klasse $\mathcal{C}^{\mathsf{m}}$ temperierte Auflösungen besitzt. Sei $\mathcal{U}$ eine lokalendliche Kartenüberdeckung von X. Dann stellt die Garbensequenz*

$$\mathbb{R}_{\mathsf{X}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty_{\mathsf{X},\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathrm{d}_0} \widehat{\Omega}^1_{\mathsf{X},\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathrm{d}_1} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_{k-1}} \widehat{\Omega}^k_{\mathsf{X},\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathrm{d}_k} \cdots \tag{5.4.1}$$

eine feine Auflösung der Garbe der lokalkonstanten Funktionen auf X dar.

Beweis: Daß alle $\widehat{\Omega}^k_{\mathsf{X},\mathcal{U}}$ fein sind, ist eine Konsequenz aus der Tatsache, daß $\mathcal{E}^\infty_{\mathsf{X},\mathcal{U}}$ nach Proposition 1.5.4 fein ist, und die $\widehat{\Omega}^k_{\mathsf{X},\mathcal{U}}$ alle $\mathcal{E}^\infty_{\mathsf{X},\mathcal{U}}$-Modulgarben darstellen. Da $\mathsf{d} \circ \mathsf{d} = 0$, muß also nur noch die Exaktheit an jeder Stelle $\xrightarrow{\mathrm{d}_{k-1}} \widehat{\Omega}^k_{\mathsf{X},\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathrm{d}_k}$ gezeigt werden. Diese ergibt sich jedoch sofort aus dem nachstehenden Lemma. □

5.4.4 Poincaré-Lemma für Whitney-Formen *Sei* $\mathsf{X} \subset \mathbb{R}^n$ *ein* (A)*-stratifizierter Unterraum, auf dem für jedes* $\mathsf{m} \in \mathbb{N}^{>0}$ *ein von der Ordnung* m *krümmungsmoderates Kontrolldatum* $(\mathsf{T}^{\mathsf{m}}_{\mathsf{S}})_{\mathsf{S}\in\mathcal{S}}$ *existiert und der für jedes* m *lokal von der Klasse* $\mathcal{C}^{\mathsf{m}}$ *temperierte Auflösungen besitzt. Sei* $\mathcal{E}^\infty$ *die Garbe der Whitney-Funktionen bezüglich der Einbettung* $\mathsf{X} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. *Ist dann* x *ein Punkt von* X *und* W *eine kontrahierbare offene Umgebung von* x*, so gibt es für jede geschlossene Whitney-Form* $\alpha \in \widehat{\Omega}^k(W)$ *ein* $\beta \in \widehat{\Omega}^{k-1}(W)$ *mit* $\mathsf{d}\beta = \alpha$.

Beweis: Zuerst erinnern wir - vor allem zur Festlegung der Notation - an den Operator $\mathsf{K}_{\mathsf{M},\mathsf{t}}$ aus dem Lemma 5.2.1, den wir im folgenden häufiger benötigen werden. Dann fixieren wir ein $\mathsf{m} \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ und $\tilde{\mathsf{m}} = \mathsf{m} + 2$. Zudem schreiben wir zur Verkürzung der Schreibweisen im folgenden T, π, ρ, ε anstelle von $\mathsf{T}^{\tilde{\mathsf{m}}}_{\mathsf{S}}$, $\pi^{\tilde{\mathsf{m}}}_{\mathsf{S}}$, $\rho^{\tilde{\mathsf{m}}}_{\mathsf{S}}$, $\varepsilon^{\tilde{\mathsf{m}}}_{\mathsf{S}}$, sowie T_{R} anstelle von $\mathsf{T}^{\tilde{\mathsf{m}}}_{\mathsf{R}}$ und so weiter. Schließlich sei $\mathsf{U}_\mathsf{x} \subset \mathsf{S}$ eine kontrahierbare, relativ kompakte offene Umgebung von x und δ eine positive reelle Zahl mit $\delta < \varepsilon(\mathsf{y})$ für alle $\mathsf{y} \in \mathsf{U}_\mathsf{x}$. Nach dieser Vorbemerkung setzen wir $\mathsf{O} := \pi^{-1}(\mathsf{U}_\mathsf{x}) \cap \rho^{-1}([0,\delta[)$ sowie $W := W_{\mathsf{U}_\mathsf{x},\delta} := \mathsf{O} \cap \mathsf{X}$ und bemerken, daß die $W_{\mathsf{U}_\mathsf{x},\delta}$ kontrahierbar sind und eine Umgebungsbasis von x durchlaufen, wenn die $(\mathsf{U}_\mathsf{x},\delta)$ alle zulässigen $(\mathsf{U}_\mathsf{x},\delta)$ durchlaufen. Der Beweis wird nun in mehrere Schritte zerlegt.

1. Schritt Sei Ω^k_{m} die über O definierte Garbe der k-Formen ω, so daß ω und $\mathsf{d}\omega$ von der Klasse $\mathcal{C}^{\mathsf{m}}$ sind, und sei $\widehat{\Omega}^k_{\mathsf{m}}$ die Bildgarbe von Ω^k_{m} unter dem kanonischen Epimorphismus $\Omega^k_{\mathcal{C}^{\mathsf{m}}_{\mathsf{O}}/\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi^k_{\mathsf{m}}} \Omega^k_{\mathcal{E}^{\mathsf{m}}_W/\mathbb{R}} = \mathcal{E}^{\mathsf{m}}_W \otimes_{\mathcal{E}^\infty_{\mathsf{O}}} \Omega^k_{\mathsf{O}}$. Ziel im 1. Schritt ist der Nachweis, daß es zu jeder geschlossenen Whitney-Form $\alpha \in \widehat{\Omega}^k_{\mathsf{m}}(W)$ eine Whitney-Form $\beta \in \widehat{\Omega}^k_{\mathsf{m}}(W)$ gibt, so daß $\mathsf{d}\beta = \omega$. Dazu lassen wir erst einmal ω eine k-Form aus $\Omega^k_{\mathsf{m}}(\mathsf{O})$ sein, so daß das Bild von ω unter dem kanonischen Epimorphismus π^k_{m} gleich α ist. Um die Notation weiter zu vereinfachen, können wir ohne Einschränkung während des 1. Schritts annehmen, daß $\mathsf{X} \subset \mathsf{O}$ und somit $\mathsf{S} = \mathsf{U}$ gilt, daß X nur endlich viele Strata besitzt, und daß diese alle mit S vergleichbar sind. Schließlich können wir aufgrund der Voraussetzung nach eventueller Verkleinerung von X annehmen, daß jedes der Strata R von X eine von der Klasse $\mathcal{C}^{\mathsf{m}}$ temperierte Auflösung $\mathsf{f}_\mathsf{R} : \mathsf{M}_\mathsf{R} \to \overline{\mathsf{R}}$ besitzt. Sei unter diesen Vereinfachungen $0 \leq \mathsf{d}_0 < \mathsf{d}_1 < \cdots < \mathsf{d}_d$ die Folge der Dimensionen der Strata von X, insbesondere gelte also $\dim \mathsf{S} = \mathsf{d}_0$. Wir konstruieren jetzt zuerst eine Form $\omega_0 \in \Omega^{k-1}_{\mathcal{C}^{\mathsf{m}}}(\mathsf{O})$ derart, daß

$$\omega - \mathsf{d}\omega_0 \in \mathcal{J}^{\mathsf{m}}(\mathsf{S};\mathsf{O}) \cdot \Omega^k_{\mathsf{m}}(\mathsf{O}). \tag{5.4.2}$$

Da U kontrahierbar ist, und O eine tubulare Umgebung von U in $\mathbb{R}^n$, existiert eine $\mathcal{C}^{\tilde{\mathsf{m}}}$-Homotopie $\mathsf{H} : \mathsf{O} \times [0,1] \to \mathsf{O}$ derart, daß $\mathsf{H}(\mathsf{U} \times [0,1]) \subset \mathsf{U}$, $\mathsf{H}_1 = \mathrm{id}_\mathsf{O}$ und $\mathsf{H}_0(\mathsf{y}) = \mathsf{x}$ für alle $\mathsf{y} \in \mathsf{O}$. Wir setzen $\omega_0 := \mathsf{K}_{\mathsf{O},1}\mathsf{H}^*\omega \in \mathcal{C}^k_{\mathcal{C}^{\mathsf{m}}_{\mathsf{O}}/\mathbb{R}}(\mathsf{O})$. Für dieses ω_0 ist die Beziehung (5.4.2) erfüllt, denn aufgrund der Voraussetzungen über ω und H gilt $(\mathsf{K}_{\mathsf{O},1}\mathsf{H}^*\mathsf{d}\omega)_{|\mathsf{S}} = 0$, also wegen (5.2.1) $(\omega - \mathsf{d}\omega_0)_{|\mathsf{S}} = 0$. Da wegen der Voraussetzung $\mathsf{d}\alpha = 0$ die Beziehung $\mathsf{d}\omega \in \mathcal{J}^{\mathsf{m}}(\mathsf{S};\mathsf{O})$ und damit $\mathsf{K}_{\mathsf{O},1}\mathsf{H}^*\mathsf{d}\omega \in \mathcal{J}^{\mathsf{m}}(\mathsf{S};\mathsf{O})$ gilt, folgt wie behauptet (5.4.2).

Als nächstes nehmen wir an, wir hätten Formen $\omega_0, \cdots, \omega_i \in \Omega^{k-1}_{\mathsf{m}}(\mathsf{O})$, $i \leq d$ derart gefunden, daß

$$\omega' := \omega - (\mathsf{d}\omega_0 + \cdots + \mathsf{d}\omega_i) \in \mathcal{J}^{\mathsf{m}}(\mathsf{X}^{\mathsf{d}_i};\mathsf{O}) \cdot \Omega^k_{\mathsf{m}}(\mathsf{O}). \tag{5.4.3}$$

Wir suchen dann nach einer Form $\omega_{i+1} \in \Omega^{k-1}_{\mathsf{m}}(\mathsf{O})$, so daß

$$\omega' - \mathsf{d}\omega_{i+1} \in \mathcal{J}^{\mathsf{m}}(\mathsf{X}^{\mathsf{d}_{i+1}};\mathsf{O}) \cdot \Omega^k_{\mathsf{m}}(\mathsf{O}). \tag{5.4.4}$$

Da die folgenden Konstruktionen für jede Zusammenhangskomponente eines d_{i+1}-dimensionalen Stratums R von X getrennt durchgeführt werden können, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $X^{d_{i+1}} \setminus X^{d_i}$ nur aus einem zusammenhängenden Stratum R besteht.

Zur Konstruktion von ω_{i+1} müssen wir jetzt einige Vorbereitungen treffen und Hilfsmittel bereitstellen. Nach Voraussetzung an das Kontrolldatum existiert eine T_R induzierende (von der Ordnung $\tilde{m}$ krümmungsmoderate) tubulare Umgebung $T_{R\subset\mathbb{R}^n} = (E, \varepsilon, \varphi)$ von R in $\mathbb{R}^n$. Wir identifizieren deshalb im folgenden T_R mit $T_{R\subset\mathbb{R}^n}$. Da T_R krümmungsmoderat ist, muß T_R insbesondere eine regulär situierte Umgebung von R sein, es gibt also nach Lemma 1.7.10 eine Funktion $\phi \in \mathcal{M}^\infty(\partial R; \mathbb{R}^n)$, so daß $\phi = 1$ über $T_R^{\varepsilon_R/2}$ ist und so daß ϕ auf einer Umgebung von $\mathbb{R}^n \setminus (T_R \cup \partial R)$ verschwindet. Für jede Form $\tilde{\omega} \in \mathcal{J}^m(X^{d_i}; O) \cdot \Omega^l_m(O)$ liegt dann $\phi \cdot \tilde{\omega}$ ebenfalls in $\mathcal{J}^m(X^{d_i}; O) \cdot \Omega^l_m(O)$, hat Träger in $T_R \cup \partial R$ und stimmt auf einer Umgebung von R mit $\tilde{\omega}$ überein. Nach Korollar 3.7.4 existiert unser zweites Hilfsmittel, nämlich ein bezüglich S radiales Vektorfeld $V : X \to \mathbb{R}^n$. Es gilt also

$$(\pi, \rho)_* V = -\frac{\partial}{\partial t}. \tag{5.4.5}$$

Als drittes wählen wir uns einen Kragen $k = (k_1, k_2) : M_R \to N_R \times [0, 1[$, und eine monoton fallende glatte Funktion $\psi : \mathbb{R} \to [0, 1]$, die auf $]-\infty, 1/2]$ gleich 1 ist und auf $[3/4, \infty[$ verschwindet. Mit $R_{]0,t]}$, $0 < t < 1$ bezeichnen wir dann die offene Menge $f_R k^{-1}(N_R \times]0, t]) \subset R$. Diese genannten Daten induzieren eine Homotopie $H : \overline{R} \times [0, 1] \to \overline{R}$ durch die Vorschrift

$$(x, t) \mapsto f_R k^{-1}\Big(k_1 f_R^{-1}(x), \big(t\psi(k_2 f_R^{-1}(x)) + (1 - \psi(k_2 f_R^{-1}(x))\big)\, k_2 f_R^{-1}(x)\Big).$$

Zudem kann H zu einer Abbildung $H : T_R \cup \overline{R} \times [0, 1] \to \overline{R}$ fortgesetzt werden, indem man $H(x, t) = H(\pi_R(x), t)$ für $x \in T_R$ fordert. Da $f_R \circ \pi_R$ temperiert relativ ∂R von der Klasse $\mathcal{C}^{\tilde{m}}$ ist, muß $H : T_R \times]0, 1] \to \overline{R}$ ebenfalls temperiert relativ ∂R von der Klasse $\mathcal{C}^{\tilde{m}}$ sein. Wegen $\omega' \in \mathcal{J}^m(X^{d_i}; O) \cdot \Omega^k_m(O)$ bedeutet das aber, daß die Form $\omega'_{i+1} = \phi \cdot (K_{T_R,1} H^* \omega')$ in $\mathcal{J}^m(X^{d_i}; O) \cdot \Omega^{k-1}_m(O)$ liegt. Aufgrund der Definition von H gilt $H_0(R_{]0,1/2]}) \subset \partial R$ und $H_1 = \pi_R$, also folgt aus Gleichung (5.2.1) und $d\omega'_{|R} = 0$

$$d\omega'_{i+1|R_{]0,1/2]}} = \pi_R^* \omega'_{|R_{]0,1/2]}}, \tag{5.4.6}$$

und sogar $d\omega'_{i+1} - \pi_R^* \omega' \in \mathcal{J}^m(X^{d_i} \cup R_{]0,1/2]}; O) \cdot \Omega^k_m(O)$. Als nächstes betrachten wir die Homotopie $F : T_R \times [0, 1] \to T_R$, $(x, t) \mapsto \varphi_R(t\varphi_R^{-1}(x))$. Dann ist $F_0 = \pi_R$ und $F_1 = \mathrm{id}_{T_R}$. Verwendet man wieder Gleichung (5.2.1), so folgt für $\breve{\omega}_{i+1} := \phi \cdot (K_{T_R,1} F^* \omega')$

$$d\breve{\omega}_{i+1|R} = \omega'_{|R} - \pi_R^* \omega'_{|R}. \tag{5.4.7}$$

Da F temperiert relativ ∂R von der Klasse $\mathcal{C}^{\tilde{m}}$ ist, liegt $\breve{\omega}_{i+1}$ auch in $\mathcal{J}^m(X^{d_i}; O) \cdot \Omega^{k-1}_m(O)$, und es gilt $d\breve{\omega}_{i+1} - \omega + \pi_R^* \omega' \in \mathcal{J}^m(X^{d_{i+1}}; O) \cdot \Omega^k_m(O)$. Ein dritte Homotopie $G : T_R \times [0, 1] \to R$ ergibt sich aus dem Integralfluß $\gamma : J \to X$ des radialen Vektorfelds V. Wegen (5.4.5) und da V auf $X \setminus S$ kontrolliert ist, gilt $J_x \supset [0, \rho(x)[$, und γ_x kann durch $\gamma_x(\rho(x)) = \pi(x)$ stetig auf $J_x \cup \{\rho(x)\}$ fortgesetzt werden. Zur genauen Definition von G wähle man sich an dieser Stelle eine glatte Funktion $\kappa : R \to [0, 1[$, so daß $\gamma(x, \kappa(x)\rho(x)) \in R_{]0,1/2[}$, wobei

$\kappa(x) = 0$ für $x \in R_{]0,1/4]}$ gelten soll. Wir setzen dann $G(x,t) = \gamma(\pi_R(x), t\kappa(x)\rho(x))$ für $(x,t) \in T_R \times [0,1]$. Folglich gilt $G_0 = \pi_R$ sowie $G_1(T_R) \subset R_{]0,1/2[}$ und $G_{t|R_{]0,1/4]}} = \mathrm{id}_{R_{]0,1/4]}}$. Also ist $\omega''_{i+1} := \phi \cdot (K_{T_R,1} G^*(\pi_R^* \omega' - d\omega'_{i+1}))$ auch eine Form aus $\mathcal{J}^m(X^{d_i}; O) \cdot \Omega_m^{k-1}(O)$, und genügt wegen Gl. (5.4.6) der Relation

$$d\omega''_{i+1|R} = G_1^*(\pi_R\omega' - d\omega'_{i+1})_{|R} - (\pi_R\omega' - d\omega'_{i+1})_{|R} = d\omega'_{i+1|R} - \pi_R\omega'_{|R}, \qquad (5.4.8)$$

sowie $d\omega''_{i+1} - d\omega'_{i+1} + \pi_R\omega' \in \mathcal{J}^m(X^{d_{i+1}}; O) \cdot \Omega_m^k(O)$. Setzt man jetzt

$$\omega_{i+1} := \check{\omega}_{i+1} + \omega'_{i+1} - \omega''_{i+1},$$

so folgt aus den bisherigen Überlegungen, insbesondere den Gleichungen (5.4.6) bis (5.4.8), die Beziehung $d\omega_{i+1|R} = \omega'_{|R}$ sowie zusätzlich (5.4.4). Somit ist der Induktionsschluß vollzogen, und es gilt

$$\omega - d(\omega_0 + \cdots + \omega_d) \in \mathcal{J}^m(W; O) \cdot \Omega_m^k(O).$$

Sei $\beta := \pi_m^{k-1}(\omega_0 + \cdots + \omega_d)$ die induzierte Whitney-Form. Dann ergibt sich $\beta \in \Omega_m^{k-1}(W)$ und $d\beta = \alpha$, was zu zeigen war.

2. Schritt Nachdem die Garben $\widehat{\Omega}_m^k$ jeweils $\mathcal{E}^\infty$-Modulgarben, insbesondere also fein sind, erhalten wir aufgrund des 1. Schritts eine feine Auflösung

$$\mathbb{R}_X \longrightarrow \widehat{\Omega}_m^0 \longrightarrow \widehat{\Omega}_m^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \widehat{\Omega}_m^k \longrightarrow \cdots .$$

Folglich stimmt nach den Überlegungen im Beweis von Korollar 5.2.3 die Kohomologie des Komplexes

$$\widehat{\Omega}_m^0(X) \longrightarrow \widehat{\Omega}_m^1(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \widehat{\Omega}_m^k(X) \longrightarrow \cdots$$

mit der singulären Kohomologie von X überein. Über einer offenen kontrahierbaren Menge $W \subset X$ gibt es also zu jeder geschlossenen Whitney-Form $\alpha \in \widehat{\Omega}_m^k(W)$ eine Whitney-Form $\beta \in \widehat{\Omega}_m^{k-1}(W)$ mit $d\beta = \alpha$.

4. Schritt Wir führen nun den Nachweis der Behauptung. Sei $\alpha \in \widehat{\Omega}^k(W)$ eine geschlossene Whitney-Form der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ über $W \subset X$ offen und kontrahierbar. Nach dem 3. Schritt gibt es für jedes natürliche $m \geq 2$ eine Whitney-Form β_m der Klasse $\mathcal{C}^m$ mit $d\beta_m = \alpha$. Aus dem gleichen Grund existieren dann Whitney-Formen ν'_m der Klasse $\mathcal{C}^{m-1}$ mit $d\nu'_m = \beta_m - \beta_{m-1}$. Als nächstes wähle man eine kompakte Ausschöpfung $\mathcal{K} = (K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von W und übertrage in kanonischer Weise die auf $\mathcal{E}^m(W)$ definierten Seminormen $\|\cdot\|_{K_j,m}$ aus Abschnitt 1.5 auf die Räume $\widehat{\Omega}_{\mathcal{C}^m}^k(W)$ (siehe hierzu auch Anhang C.1). Da $\mathcal{E}^\infty(W)$ dicht in jedem $\mathcal{E}^m(W)$ ist (siehe z.B. [111]), ergibt sich die Dichtheit von $\widehat{\Omega}^k(W)$ in $\widehat{\Omega}_m^k(W)$. Also existiert für jedes m ein $\nu_m \in \widehat{\Omega}^k(W)$ mit

$$\|\beta_m - \beta_{m-1} - d\nu_m\|_{K_m,m-2} < \frac{1}{2^m}.$$

Man setze nun

$$\beta := \beta_2 + \sum_{m\geq 3} (\beta_m - \beta_{m-1} - d\nu_m).$$

Da $\widehat{\Omega}^k(W)$ zusammen mit den Seminormen $\|\cdot\|_{K_m,m}$ einen Fréchet-Raum darstellt, ist dieses β wohldefiniert, liegt in $\widehat{\Omega}^{k-1}(W)$ und erfüllt die Beziehung $d\beta = \alpha$. Das war zu zeigen. $\square$

5.4.5 Korollar *Die Whitney–deRham-Kohomologie eines* (A)*-stratifizierten Raums* X*, der in jeder Ordnung* $m \in \mathbb{N}^{>0}$ *ein krümmungsmoderates Kontrolldatum sowie lokal von der Klasse* $\mathcal{C}^m$ *temperierte Auflösungen besitzt, stimmt in kanonischer Weise mit der singulären Kohomologie überein.*

Beweis: Dieser erfolgt genauso wie der Beweis von Korollar 5.2.3. □

5.4.6 Bemerkung Da insbesondere subanalytische Mengen die Voraussetzungen der Resultate in diesem Abschnitt erfüllen, gilt das Poincaré-Lemma für Whitney-Formen auf subanalytischen Mengen, und die Whitney–deRham-Kohomologie auf subanalytischen Mengen stimmt mit der singulären Kohomologie überein.

Kapitel 6

Homologie von Algebren glatter Funktionen

Die Hochschild Homologie und Kohomologie sowie die eng damit verbundene und von Alain Connes [41] eingeführte zyklische (Ko)Homologie von Algebren haben sich als äußerst nützlich für die Strukturtheorie von Algebren erwiesen (siehe Loday [105]). Insbesondere im Rahmen der nichtkommutativen Geometrie von Alain Connes spielen die genannten Homologietheorien eine entscheidende Rolle, um auch für (nichtkommutative) Algebren, die nicht als Funktionsalgebren zugrundeliegender topologischer Räume aufgefaßt werden können, geometrische Begriffe wie Formen, Zusammenhang, deRham-Kohomologie, usw. einführen zu können. Aber auch für die "kommutative Geometrie" wird die Hochschild (Ko)Homologie immer wichtiger, da man mit ihr tiefliegende Theoreme der geometrischen Analysis wie den Indexsatz von Atiyah–Singer beweisen kann (vgl. Nest–Tsygan [124]). Zudem erscheint es aussichtsreich, geeignete Indexsätze auch für singuläre Mannigfaltigkeiten mit Hilfe Hochschild homologischer Methoden formulieren und nachweisen zu können (vgl. Melrose–Nistor [119]). In diesem Kapitel werden wir deshalb die Hochschild (Ko)Homologie der Algebra der glatten Funktionen auf einem stratifizierten Raum studieren.

In vielen Fällen, unter anderem auch beim Studium von Funktionsalgebren, hat es sich nun herausgestellt, daß die topologische oder mit anderen Worten lokale Version der Hochschild (Ko)Homologie noch besser geeignet ist als die gewöhnliche, um geometrische Information im Sinne von Alain Connes über die betrachteten Algebren zu erhalten. Für die Algebra der glatten Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit kann man zum Beispiel die topologische Hochschild (Ko)Homologie sehr gut berechnen (vgl. [41, 133, 95, 145]), über die allgemeine Hochschild (Ko)Homologie dieser Algebren ist jedoch wenig bekannt. Im folgenden werden wir deshalb zuerst die topologische Hochschild (Ko)Homologie als eine relative Homologietheorie einführen, und einige nützliche Eigenschaften dieser topologischen Homologietheorie ableiten.

6.1 Topologische Algebren und ihre Moduln

6.1.1 Sei $\mathbb{k}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Eine $\mathbb{k}$-Algebra $\mathcal{A}$ versehen mit der Struktur eines topologischen $\mathbb{k}$-Vektorraums heißt dann *topologische* $\mathbb{k}$*-Algebra*, falls die Multiplikation $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine stetige Abbildung ist. Im Falle, daß die unterliegende topologische Vektorraumstruktur lokalkonvex ist, und für jede stetige Seminorm $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{A}$ eine stetige Seminorm $\|\cdot\|'$ existiert, so daß

$$\|\mathsf{a}\mathsf{b}\| \leq \|\mathsf{a}\|' \, \|\mathsf{b}\|' \qquad \text{für alle } \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathcal{A},$$

gilt, so heißt $\mathcal{A}$ *lokalkonvexe (topologische)* $\mathbb{k}$*-Algebra*. Ist $\mathcal{A}$ zudem ein Fréchet-Raum, so nennt man $\mathcal{A}$ auch eine Fréchet-Algebra. Damit keine Unklarheiten aufkommen können, sei bemerkt, daß wir von einer Algebra immer annehmen, daß sie ein Einselement besitzt.

Einen $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{M}$ einer topologischen $\mathbb{k}$-Algebra $\mathcal{A}$ nennt man *topologischen* $\mathcal{A}$*-Modul*, falls $\mathcal{M}$ die Struktur eines topologischen $\mathbb{k}$-Vektorraum besitzt, und die Strukturabbildung $(\mathsf{a}, \mathsf{m}) \mapsto \mathsf{a}\mathsf{m}$ stetig ist. Im Falle, daß $\mathcal{A}$ eine lokalkonvexe Algebra darstellt, $\mathcal{M}$ ein lokalkonvexer topologischer $\mathbb{k}$-Vektorraum ist, und für jede stetige Seminorm $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{M}$ eine stetige Seminorm $|\cdot|$ auf $\mathcal{M}$ und $\|\cdot\|'$ auf $\mathcal{A}$ existieren, so daß

$$\|\mathsf{a}\mathsf{m}\| \leq \|\mathsf{a}\|' \, |\mathsf{m}| \qquad \text{für alle } \mathsf{a} \in \mathcal{A},\ \mathsf{m} \in \mathcal{M},$$

gilt, so heißt $\mathcal{M}$ ein *lokalkonvexer topologischer* $\mathcal{A}$*-Modul*. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{M}$ zudem Fréchet-Räume, so nennt man $\mathcal{M}$ einen Fréchet-$\mathcal{A}$-Modul.

Für eine topologische Algebra $\mathcal{A}$ und zwei topologische $\mathcal{A}$-Moduln $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ die Menge aller stetigen $\mathcal{A}$-linearen Abbildungen von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$. Damit bilden die topologischen $\mathcal{A}$-Moduln zusammen mit den stetigen $\mathcal{A}$-linearen Abbildungen eine Kategorie $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{top}}$. Dabei ist zu bemerken, daß als Objekte von $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{top}}$ auch nicht-Hausdorffsche topologische $\mathcal{A}$-Moduln zugelassen sind.

Mit $\mathrm{tHom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ bezeichnen wir die Untermenge aller topologischen $\mathcal{A}$-linearen Homomorphismen, das heißt die Menge aller stetigen $\mathcal{A}$-linearen Abbildungen $\mathsf{f} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ derart, daß die induzierte Abbildung $\mathcal{M}/\ker \mathsf{f} \to \mathrm{im}\, \mathsf{f} \subset \mathcal{N}$ ein topologischer Isomorphismus ist. Die Verknüpfung zweier topologischer $\mathcal{A}$-linearer Homomorphismen $\mathsf{f} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ und $\mathsf{g} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ ergibt wieder einen topologischen Homomorphismus $\mathsf{g} \circ \mathsf{f} \in \mathrm{tHom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$, wie folgende Überlegung zeigt. Seien $\overline{\mathsf{f}} : \mathcal{M}/\ker \mathsf{f} \to \mathrm{im}\, \mathsf{f}$ und $\overline{\mathsf{g}} : \mathcal{N}/\ker \mathsf{g} \to \mathrm{im}\, \mathsf{g}$ die durch f und g induzierten topologischen Isomorphismen, und $\mathsf{h} : \mathrm{im}\, \mathsf{f}/\ker \mathsf{g} \to \mathcal{M}/(\ker \mathsf{f} + \mathsf{f}^{-1}(\ker \mathsf{g}))$ die durch $\overline{\mathsf{f}}^{-1} : \mathrm{im}\, \mathsf{f} \to \mathcal{M}/\ker \mathsf{f}$ definierte stetige Quotientenabbildung. Dann stellt $\mathsf{h} \circ \overline{\mathsf{g}}_{|\mathrm{im}\,(\mathsf{g} \circ \mathsf{f})}$ das stetige $\mathcal{A}$-lineare Inverse von $\overline{\mathsf{g} \circ \mathsf{f}} : \mathcal{M}/\ker(\mathsf{g} \circ \mathsf{f}) \to \mathrm{im}\,(\mathsf{g} \circ \mathsf{f})$ dar. Damit bilden auch die topologischen $\mathcal{A}$-Moduln zusammen mit den topologischen $\mathcal{A}$-linearen Homomorphismen eine Kategorie.

6.1.2 Proposition *Sei $\mathcal{A}$ eine topologische $\mathbb{k}$-Algebra. Dann ist die Kategorie $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{top}}$ der topologischen $\mathcal{A}$-Moduln und stetigen $\mathcal{A}$-linearen Abbildungen additiv.*

Im Falle, daß $\mathcal{A}$ eine lokalkonvexe Algebra (bzw. eine Fréchet-Algebra) ist, bilden die lokalkonvexen (bzw. vollständigen lokalkonvexen bzw. Fréchet-) $\mathcal{A}$-Moduln eine volle additive Unterkategorie $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{lc}}$ (bzw. $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ bzw. $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{F}}$) von $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{top}}$.

Beweis: Die Additivität von $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{top}}$ ist klar, da der nulldimensionale Vektorraum ein Nullobjekt in $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{top}}$ darstellt, und stetige $\mathcal{A}$-lineare Morphismen addiert sowie mit Skalaren multipliziert werden können. Die weiteren Aussagen folgen dann unmittelbar.
□

6.1.3 Bemerkung Man könnte vermuten, daß die Kategorie bestehend aus allen Fréchet-$\mathcal{A}$-Moduln und den topologischen $\mathcal{A}$-linearen Homomorphismen eine Abelsche Kategorie darstellt. Dies ist jedoch in der Regel nicht der Fall, wie folgendes Beispiel zeigt. Man nehme $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ und betrachte einen unendlichdimensionalen separablen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Anschließend wähle man sich einen kompakten Operator $\mathsf{k} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ der Norm < 1 mit nichtabgeschlossenem Bild. Dann sind $\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ und $\mathsf{f} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} + \mathsf{k}$ bijektiv und stetig, also beides topologische Homomorphismen. Für die Differenz $\mathsf{k} = \mathsf{f} - \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ gilt dies jedoch nicht, da $\mathrm{im}\,\mathsf{f}$ nach Voraussetzung nicht abgeschlossen ist.

6.1.4 Um homologische Algebra in $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathsf{top}}$ betreiben zu können, müssen für alle Morphismen $\mathsf{f} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ in $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathsf{top}}$ sowohl der Kern als auch der Kokern von f existieren. Faßt man f als Morphismus in der Kategorie $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}$ auf, so hat man bereits einen Kern $\ker \mathsf{f} \xrightarrow{\mathsf{k}} \mathcal{M}$ und einen Kokern $\mathcal{N} \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathrm{coker}\,\mathsf{f}$. Wir versehen $\ker \mathsf{f}$ nun mit der Initialtopologie bzgl. k und $\mathrm{coker}\,\mathsf{f}$ mit der Finaltopologie bzgl. c. Dann sind $\ker \mathsf{f}$ und $\mathrm{coker}\,\mathsf{f}$ topologische $\mathcal{A}$-Moduln, und erweisen sich als der gesuchte Kern bzw. Kokern von f in $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathsf{top}}$. Zudem erhält man das Bild $\mathrm{im}\,\mathsf{f} \xrightarrow{\mathsf{i}} \mathcal{N}$ von f als den Kern von c. Damit erfüllen die so topologisierten Räume $\ker \mathsf{f}$, $\mathrm{coker}\,\mathsf{f}$ und $\mathrm{im}\,\mathsf{f}$ auch in der additiven Kategorie $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathsf{t}}$ die universellen Eigenschaften von Kern, Kokern und Bild. Im folgenden werden $\ker \mathsf{f}$, $\mathrm{coker}\,\mathsf{f}$ und $\mathrm{im}\,\mathsf{f}$ deshalb auch als *topologischer Kern, topologischer Kokern* und *topologisches Bild* von f bezeichnet. Der Morphismus f kann nun aufgrund der universellen Eigenschaften von $\mathrm{im}\,\mathsf{f}$ in der Form $\mathsf{f} = \mathsf{i} \circ \mathsf{m}$ mit einem eindeutig bestimmten Morphismus $\mathsf{m} : \mathcal{M} \to \mathrm{im}\,\mathsf{f}$ faktorisiert werden. Die Faktorisierung $\mathsf{f} = \mathsf{i} \circ \mathsf{m}$ bezeichnen wir als die *kanonische Zerlegung* von f, und erhalten insgesamt die folgende *kanonische Sequenz* von f

$$0 \longrightarrow \ker \mathsf{f} \xrightarrow{\mathsf{k}} \mathcal{M} \xrightarrow{\mathsf{m}} \mathrm{im}\,\mathsf{f} \xrightarrow{\mathsf{i}} \mathcal{N} \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathrm{coker}\,\mathsf{f} \longrightarrow 0\,.$$

Falls $\mathcal{A}$ eine lokalkonvexe Algebra ist, und f eine stetige $\mathcal{A}$-lineare Abbildungen zwischen lokalkonvexen $\mathcal{A}$-Moduln, so sind in natürlicher Weise $\ker \mathsf{f}$, $\mathrm{coker}\,\mathsf{f}$ und $\mathrm{im}\,\mathsf{f}$ wieder lokalkonvexe $\mathcal{A}$-Moduln, und stellen auch in der Kategorie $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathsf{top}}$ Kern, Kokern bzw. das Bild von f dar. Ist $\mathcal{A}$ dagegen eine vollständige lokalkonvexe oder sogar eine Fréchet-Algebra, und f eine stetige $\mathcal{A}$-lineare Abbildung zwischen vollständigen lokalkonvexen (bzw. Fréchet-) Moduln, so ist zwar $\ker \mathsf{f}$ wieder vollständig (bzw. Fréchet), jedoch nicht notwendigerweise $\mathrm{coker}\,\mathsf{f}$ und $\mathrm{im}\,\mathsf{f}$. Bezeichnet man nun für einen lokalkonvexen $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{M}$ mit $\overline{\mathcal{M}}$ seine Vervollständigung und definiert den *vollständigen Kokern* durch $\overline{\mathrm{coker}}\,\mathsf{f} := \mathcal{N}/\overline{\mathrm{im}\,\mathsf{f}}$ und das *vollständige Bild* durch $\overline{\mathrm{im}}\,\mathsf{f} := \overline{\mathrm{im}\,\mathsf{f}}$, so sind $\overline{\mathrm{coker}}\,\mathsf{f}$ und $\overline{\mathrm{im}}\,\mathsf{f}$ beides vollständige lokalkonvexe (bzw. Fréchet-) $\mathcal{A}$-Moduln. Zudem erfüllen $\ker \mathsf{f}$, $\overline{\mathrm{coker}}\,\mathsf{f}$ und $\overline{\mathrm{im}}\,\mathsf{f}$ die universellen Eigenschaften von Kern, Kokern und Bild von f in der additiven Kategorie $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathsf{clc}}$ (bzw. $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{F}}$). Schließlich sei noch erwähnt, daß aufgrund des Satzes von der offenen Abbildung im Fréchet-Fall $\mathrm{im}\,\mathsf{f} = \overline{\mathrm{im}}\,\mathsf{f}$ genau dann gilt, wenn f ein topologischer Homomorphismus zwischen Fréchet-$\mathcal{A}$-Moduln ist.

Da $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathsf{top}}$, $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathsf{lc}}$ und $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{F}}$ alle additiv sind sowie Kerne und Kokerne besitzen, ist der Begriff der Exaktheit einer Sequenz von topologischen Moduln wohldefiniert. Genauer gesagt heißt eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{M}_{k-1} \xrightarrow{\mathsf{f}_{k-1}} \mathcal{M}_k \xrightarrow{\mathsf{f}_k} \mathcal{M}_{k+1} \longrightarrow \cdots$$

von topologischen (bzw. lokalkonvexen) $\mathcal{A}$-Moduln und stetigen $\mathcal{A}$-linearen Abbildungen an der Stelle $\mathcal{M}_k$ *exakt* in $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{top}}$ (bzw. $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{lc}}$) oder in anderen Worten *topologisch exakt*, falls $\ker \mathsf{f}_k$ und $\operatorname{im} \mathsf{f}_{k-1}$ als topologische $\mathcal{A}$-Moduln übereinstimmen. Sind die Moduln $\mathcal{M}_k$ jedoch alle vollständig lokalkonvex oder Fréchet, so sagen wir, die obige Sequenz sei an der Stelle M_k *exakt* in $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ (bzw. $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{F}}$) oder kürzer die Sequenz sei an der Stelle M_n *schwach exakt*, falls $\ker \mathsf{f}_n = \overline{\operatorname{im}} \, \mathsf{f}_{n-1}$. Der Begriff der topologischen Exaktheit macht natürlich auch in $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ und $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{F}}$ Sinn, wobei aufgrund der Vollständigkeit des Kerns $\ker \mathsf{f}_n$ jede bei $\mathcal{M}_k$ topologisch exakte Sequenz dort auch schwach exakt ist. Schließlich bezeichnen wir eine Sequenz topologischer Vektorräume als *topologisch* bzw. *schwach exakt*, wenn sie an jeder Stelle topologisch bzw. schwach exakt ist.

6.2 Homologische Algebra für topologische Moduln

6.2.1 Wir betrachten nun die Kategorie $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ genauer, wobei angenommen wird, daß $\mathcal{A}$ eine vollständige lokalkonvexe $\mathbb{k}$-Algebra ist, und wollen im folgenden eine relative Homologietheorie in $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ einführen. Gemäß der Überlegungen in Hilton–Stammbach [79, Chap. IX] benötigt man zur Definition einer relativen Homologietheorie in einer additiven Kategorie $\mathfrak{A}$ eine Klasse $\mathcal{E}$ von Epimorphismen in dieser Kategorie, bezüglich der dann die projektive Objekte, die sogenannten $\mathcal{E}$-projektiven Objekte, festzulegen sind. Anschließend kann man dann genauso wie in der gewöhnlichen Homologietheorie $\mathcal{E}$-projektive Auflösungen und $\mathcal{E}$-abgeleitete Funktoren definieren, woraus sich dann in natürlicher Weise die gewünschten relativen (Ko)Homologieobjekte ergeben.

Als Epimorphismenklasse, die die gewünschte topologische relative Homologietheorie in $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ festlegt, nehmen wir die Klasse $\mathfrak{T}$ aller surjektiven stetigen $\mathcal{A}$-linearen und $\mathbb{k}$-zerfällenden Abbildungen $\mathsf{e} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Dabei bedeutet $\mathbb{k}$*-zerfällend*, daß eine stetige $\mathbb{k}$-lineare Abbildung $\mathsf{s} : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ existiert, die $\mathsf{e} \circ \mathsf{s} = \mathrm{id}_{\mathcal{N}}$ erfüllt und die man manchmal auch einen *stetigen* $\mathbb{k}$*-Schnitt* oder auch ein *stetiges* $\mathbb{k}$*-Splitting* von e nennt. Sei $\mathsf{Proj}(\mathfrak{T}) \subset \mathsf{Ob}(\mathcal{A})$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}})$ die Klasse aller $\mathfrak{T}$*-projektiven* oder auch *topologisch projektiven* Objekte, also die Klasse aller Objekte $\mathcal{P}$ derart, daß für alle Morphismen $\mathsf{e} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ aus $\mathfrak{T}$ die Sequenz

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{P}, \mathcal{M}) \xrightarrow{e^*} \mathrm{Hom}(\mathcal{P}, \mathcal{N}) \longrightarrow 0 \tag{6.2.1}$$

exakt ist. Mit $\mathsf{C}\mathfrak{T}$ bezeichnen wir die Vervollständigung von $\mathfrak{T}$, also die Klasse aller Epimorphismen $\mathsf{e} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ in $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$, so daß für alle topologisch projektiven Objekte P die Sequenz (6.2.1) exakt ist.

Als nächstes erinnern wir daran (siehe Anhang A.3), daß die Kategorie $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ durch den Funktor $\hat{\otimes}_\pi$ des vervollständigten π-Tensorprodukts die Struktur einer Tensorkategorie erhält.

6.2.2 Proposition *Für jede vollständig lokalkonvexe $\mathbb{k}$-Algebra $\mathcal{A}$ sind die folgenden vollständig lokalkonvexen $\mathcal{A}$-Moduln topologisch projektiv:*

(1) *jeder topologisch direkte Summand $\mathcal{P}$ eines topologisch projektiven $\mathcal{A}$-Moduls,*

(2) *jeder vollständig lokalkonvexe $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{P}$ der Form $\mathcal{P} = \mathcal{A} \hat{\otimes}_\pi \mathcal{V}$, wobei $\mathcal{V}$ einen vollständigen lokalkonvexen topologischen Vektorraum bezeichne,*

(3) *für den Fall, daß $\mathcal{A}$ eine Fréchet-Algebra ist, jeder endlich erzeugte projektive $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{P}$, der mit der Struktur eines Fréchet-$\mathcal{A}$-Moduls versehen ist,*

Ist umgekehrt $\mathcal{P}$ ein topologisch projektiver $\mathcal{A}$-Modul, so ist $\mathcal{P}$ topologisch direkter Summand in einem vollständig lokalkonvexen $\mathcal{A}$-Modul der Form $\mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{V}$, wobei $\mathcal{V}$ vollständig lokalkonvex ist.

Beweis: (1) ist offensichtlich. Wir zeigen zuerst (2). Sei $\mathsf{e} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Morphismus aus $\mathfrak{T}$, also stetig $\mathcal{A}$-linear und $\mathbb{k}$-zerfällend. Sei $\mathsf{s} : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ ein stetiger Schnitt von e, und $\iota : \mathcal{V} \to \mathcal{P} = \mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{V}$ die kanonische Injektion $\mathsf{v} \mapsto 1 \otimes \mathsf{v}$. Jeder stetigen $\mathcal{A}$-linearen Abbildung $\mathsf{f} : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ ordnet man nun die Abbildung $\mathsf{f}' = \mathsf{f} \circ \iota$ zu und setzt $\mathsf{g}' := \mathsf{s} \circ \mathsf{f}'$. Aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts $\hat{\otimes}_\pi$ existiert eine eindeutig bestimmte stetige $\mathcal{A}$-lineare Abbildung $\mathsf{g} : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$, so daß $\mathsf{g}' = \mathsf{g} \circ \iota$. Da $\mathsf{e} \circ \mathsf{g}$ stetig $\mathcal{A}$-linear ist und

$$\mathsf{e} \circ \mathsf{g} \circ \iota = \mathsf{e} \circ \mathsf{g}' = \mathsf{e} \circ \mathsf{s} \circ \mathsf{f}' = \mathsf{f} \circ \iota$$

gilt, folgt $\mathsf{e} \circ \mathsf{g} = \mathsf{f}$. Also ist $\mathcal{P}$ topologisch projektiv.

Nun zu (3). Sei $(\mathsf{v}_1, \cdots, \mathsf{v}_k)$ ein Erzeugendsystem von $\mathcal{P}$, und $\mathcal{V}$ der freie $\mathbb{k}$-Vektorraum über $(\mathsf{v}_1, \cdots, \mathsf{v}_k)$. Dann ist die Abbildung

$$\mathsf{f} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{V} = \mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{V} \to \mathcal{P}, \quad \mathsf{a} \otimes \mathsf{v}_j \mapsto \mathsf{a}\mathsf{v}_j, \quad j = 1, \cdots, k$$

stetig, surjektiv und $\mathcal{A}$-linear. Der Kern $\mathcal{Q} := \ker \mathsf{f}$ ist zudem ein abgeschlossener Unterraum des Fréchet-$\mathcal{A}$-Moduls $\mathcal{A} \otimes \mathcal{V}$ und besitzt wegen der Projektivität von $\mathcal{P}$ ein zu $\mathcal{P}$ linear isomorphes Komplement $\mathcal{P}'$. Da $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{V}$ abgeschlossen, erbt $\mathcal{P}'$ die Struktur eines Fréchet-$\mathcal{A}$-Moduls von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{V}$. Aufgrund des Satzes von der offenen Abbildung ist $\mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ ein topologischer Isomorphismus, das heißt $\mathcal{P}$ ist abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{V}$. Wegen (1) und (2) folgt somit die topologische Projektivität von $\mathcal{P}$.

Es bleibt noch nachzuweisen, daß jeder topologisch projektive $\mathcal{A}$-Modul topologisch direkter Summand in einem $\mathcal{A}$-Modul der Form $\mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{V}$ ist mit $\mathcal{V}$ vollständig lokalkonvex. Setzt man $\mathcal{V} := \mathcal{P}$ und definiert $\mathsf{e} : \mathcal{V} \to \mathcal{P}$ durch $\mathcal{A} \otimes \mathsf{v} \mapsto \mathsf{a}\mathsf{v}$, so ist e stetig, $\mathcal{A}$-linear, surjektiv und besitzt das $\mathbb{k}$-lineare stetige Splitting $\mathsf{s} : \mathcal{P} \to \mathcal{V}$, $\mathsf{v} \mapsto 1 \otimes \mathsf{v}$. Aufgrund der topologischen Projektivität von $\mathcal{P}$ existiert ein Morphismus $\mathsf{f} : \mathcal{M} \to \mathcal{V}$ aus $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$, so daß $\mathsf{e} \circ \mathsf{f} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$. Setzen wir $\mathcal{P}' := \operatorname{im} \mathsf{e}$, so $\mathcal{P}'$ Komplement von $\ker \mathsf{f}$ und folglich ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{V}$. Zudem liefert $\mathsf{f}_{\mathcal{P}'}$ einen topologischen Isomorphismus von $\mathcal{P}'$ nach $\mathcal{P}$ mit stetigem Inversen $\mathsf{e} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$. Das war zu zeigen. □

6.2.3 Korollar *Die Klasse $\mathfrak{T}$ ist projektiv, das heißt zu jedem Objekt $\mathcal{M}$ von $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ gibt es einen Epimorphismus $\mathsf{e} : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ aus $\mathfrak{T}$ mit $\mathcal{P}$ topologisch projektiv.*

Beweis: Definiert man $\mathcal{P} := \mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{M}$, so ist $\mathcal{P}$ topologisch projektiv, und $\mathsf{e} : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$, $\mathsf{a} \otimes \mathsf{v} \to \mathsf{a}\mathsf{v}$ ein Epimorphismus. □

Im nächsten Schritt legen wir eine Klasse von Sequenzen in $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ fest, nämlich die Klasse der sogenannten $\mathfrak{T}$-exakten Sequenzen, und konstruieren damit geeignete Auflösungen von Objekten.

6.2.4 Definition ([79, IX.1.Def]) Ein Morphismus f in $\mathcal{A}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ heißt $\mathfrak{T}$-*zulässig*, falls er ein topologischer Isomorphismus mit abgeschlossenem Bild ist, und in der kanonischen

Zerlegung $\mathsf{f} = \mathfrak{i} \circ \mathfrak{m}$ von f die Abbildung $\mathcal{M}$ in $\mathfrak{T}$ liegt. Eine exakte Sequenz in $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ heißt $\mathfrak{T}$-*exakt*, falls alle seine Morphismen $\mathfrak{T}$-zulässig sind. Ein Komplex in $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$

$$\mathbf{C} : \cdots \longrightarrow \mathsf{C}_n \longrightarrow \mathsf{C}_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathsf{C}_0$$

wird $\mathfrak{T}$-*projektiv* oder auch *topologisch projektiv* genannt, wenn jeder $\mathcal{A}$-Modul C_n topologisch projektiv ist. Zudem bezeichnen wir den Komplex $\mathbf{C}$ als $\mathfrak{T}$-*azyklisch*, falls der augmentierte Komplex

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{C}_k \longrightarrow \mathsf{C}_{k-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} \mathsf{C}_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathrm{H}_0(\mathbf{C}) := \overline{\mathrm{coker}}\, \partial_1 \longrightarrow 0$$

$\mathfrak{T}$-exakt ist. Eine $\mathfrak{T}$-*projektive* oder auch *topologisch projektive Auflösung* eines Objekts $\mathcal{M}$ ist dann ein topologisch projektiver und $\mathfrak{T}$-azyklische Komplex $\mathbf{C}$ mit $\mathrm{H}_0(\mathbf{C}) \cong \mathcal{M}$.

6.2.5 Vergleichstheorem *Seien*

$$\mathbf{C} : \cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} \mathsf{C}_k \xrightarrow{\partial_k} \mathsf{C}_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} \mathsf{C}_0$$

und

$$\mathbf{D} : \cdots \xrightarrow{\delta_{k+1}} \mathsf{D}_k \xrightarrow{\delta_k} \mathsf{D}_{k-1} \xrightarrow{\delta_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_1} \mathsf{D}_0$$

zwei Komplexe in $\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$*, wobei* $\mathbf{C}$ *als topologisch projektiv und* $\mathbf{D}$ *als* $\mathfrak{T}$*-azyklisch angenommen wird. Zu jeder stetigen* $\mathcal{A}$*-linearen Abbildung* $\mathsf{f} : \mathrm{H}_0(\mathbf{C}) \to \mathrm{H}_0(\mathbf{D})$ *gibt es dann einen Morphismus topologischer Komplexe* $\mathbf{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$*, der* f *induziert, das heißt alle Komponenten* $\mathsf{f}_k : \mathsf{C}_k \to \mathsf{D}_k$ *von* $\mathbf{f}$ *sind stetig, und es gilt* $\mathrm{H}_0(\mathbf{f}) = \mathsf{f}$*. Die Homotopieklasse von* $\mathbf{f}$ *ist dabei eindeutig durch* f *bestimmt.*

Beweis: Wir konstruieren die Kettenabbildung $\mathbf{f}$ rekursiv. Dazu setzen wir zuerst $\mathsf{C}_{-1} := \mathrm{H}_0(\mathbf{C})$, $\mathsf{D}_{-1} := \mathrm{H}_0(\mathbf{D})$ und $\mathsf{f}_{-1} := \mathsf{f}$ sowie $\mathsf{C}_{-2} := \mathsf{D}_{-2} := 0$ und $\mathsf{f}_{-2} := 0$. Nehmen wir nun an, es seien $\mathsf{f}_{-1}, \cdots, \mathsf{f}_{k-1}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ schon definiert, so daß für $l = -1, \cdots, k-1$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}_l \arrow[r, "\partial_l"] \arrow[d, "\mathsf{f}_k"] & \mathsf{C}_{l-1} \arrow[d, "\mathsf{f}_{l-1}"] \\ \mathsf{D}_l \arrow[r, "\delta_l"] & \mathsf{D}_{l-1} \end{tikzcd} \tag{6.2.2}$$

kommutiert. Da dann $\mathrm{im}\,(\mathsf{f}_{k-1}\partial_k) \subset \ker \delta_{k-1} = \mathrm{im}\,\delta_k$, ergibt sich aus der $\mathfrak{T}$-Projektivität von C_k die Existenz eines $\mathsf{f}_k : \mathsf{C}_k \to \mathsf{D}_k$, so daß das Diagramm (6.2.2) auch für $l = k$ kommutiert. Da die Induktionsannahme für $k = 0$ sicher richtig ist, erhalten wir somit rekursiv eine f induzierende Kettenabbildung $\mathbf{f}$.

Seien $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$ zwei f induzierende Kettenabbildungen von $\mathbf{C}$ nach $\mathbf{D}$. Wir konstruieren rekursiv eine Homotopie $\mathbf{s} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathsf{s}_k$, $\mathsf{s}_k : \mathsf{C}_k \to \mathsf{D}_{k+1}$ von $\mathbf{f}$ nach $\mathbf{g}$. Dazu setzen wir $\mathsf{s}_{-1} := \mathsf{s}_{-2} := 0$ und nehmen an, wir hätten für ein $k \in \mathbb{N}$ schon $\mathsf{s}_{-1}, \cdots, \mathsf{s}_{k-1}$ definiert, so daß für $l = -1, \cdots, k-1$ die Gleichung

$$\mathsf{f}_l - \mathsf{g}_l - \mathsf{s}_{l-1}\partial_l = \delta_{l+1}\mathsf{s}_l \tag{6.2.3}$$

erfüllt ist. Wegen

$$\delta_k(\mathsf{f}_k - \mathsf{g}_k - \mathsf{s}_{k-1}\partial_k) = (\mathsf{f}_{k-1} - \mathsf{g}_{k-1} - \delta_k \mathsf{s}_{k-1})\partial_k = \mathsf{s}_{k-2}\partial_{k-1}\partial_k = 0$$

ist $\operatorname{im}(\delta_k(f_k - g_k - s_{k-1}\partial_k)) \subset \ker \delta_k = \operatorname{im} \delta_{k+1}$. Da C_k topologisch projektiv und δ_{k+1} ein $\mathfrak{T}$-zulässig Morphismus ist, existiert also eine stetige $\mathcal{A}$-lineare Abbildung $s_n : C_n \to D_{k+1}$, so daß (6.2.3) auch für $l = k$ gilt. Für $k = 0$ ist die Induktionsannahme sicher richtig, also erhalten wir rekursiv die gewünschte Homotopie $\mathbf{s}$. □

6.2.6 Nun haben wir genügend Werkzeuge, um topologisch abgeleitete Funktoren einführen zu können. Sei dazu $\mathfrak{A}$ eine Abelsche Kategorie und $T : \mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}} \to \mathfrak{A}$ ein (kovarianter) additiver Funktor. Zu jedem Objekt $\mathcal{M}$ wählen man sich eine topologisch projektive Auflösung $\mathbf{C}_{\mathcal{M}}$. Da aufgrund des Vergleichstheorems die Homologiegruppen $H_k(T\mathbf{C}_{\mathcal{M}})$ des Komplexes $T\mathbf{C}_{\mathcal{M}}$ in $\mathcal{A}$ nicht von der speziellen Wahl der Auflösung $\mathbf{C}_{\mathcal{M}}$ abhängen, erhalten wir somit für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen additiven Funktor $L_k T : \mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}} \to \mathcal{A}$, $\mathcal{M} \to H_k(T\mathbf{C}_{\mathcal{M}})$, der der *$k$-te links topologisch abgeleitete Funktor* von T genannt wird. Falls $S : \mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}} \to \mathcal{A}$ einen kontravarianten additiven Funktor darstellt, so definieren wir in analoger Weise den *k-ten rechts topologisch abgeleiteten Funktor* $R^n S$ durch $R^k S(\mathcal{M}) = H^k(S\mathbf{C}_{\mathcal{M}})$.

Für den speziellen Fall, daß $T = \mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}-$ der Funktor des vervollständigten Tensorprodukts und $S = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{M})$ der der stetigen $\mathcal{A}$-linearen Abbildungen ist, haben die entsprechenden abgeleiteten Funktoren eigene Bezeichnungen erhalten, nämlich

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_k^{\mathcal{A}}(\mathcal{N}, \mathcal{M}) &:= L_k T(\mathcal{N}), \\ \operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{N}, \mathcal{M}) &:= R^k S(\mathcal{N}), \quad \mathcal{N} \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}). \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

6.3 Stetige Hochschild-Homologie

6.3.1 Sei $\mathcal{A}$ eine vollständige lokalkonvexe Algebra, und $\mathcal{A}^e$ ihre Einhüllende, das heißt $\mathcal{A}^e = \mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A}^\circ$. Dabei ist $\mathcal{A}^\circ$ die zu $\mathcal{A}$ entgegengesetzte Algebra, die vollständig lokalkonvexe Algebra, die den gleichen zugrundeliegenden topologischen Vektorraum wie $\mathcal{A}$ hat, jedoch die entgegengesetzt Multiplikation $(a, b) \mapsto b \cdot a$, wobei $\cdot$ die Multiplikation in $\mathcal{A}$ bezeichne. Offensichtlich ist $\mathcal{A}$ ein Objekt in der Kategorie $\mathcal{A}^e\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$, wobei die $\mathcal{A}^e$-Modulstruktur von $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{A}^e \times \mathcal{A} \ni (a \otimes \tilde{a}, b) \mapsto a\, b\, \tilde{a} \in \mathcal{A}$ gegeben ist. Sei nun $\mathcal{M}$ ein Objekt in $\mathcal{A}^e\text{-}\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$ oder in anderen Worten ein *vollständig lokalkonvexer $\mathcal{A}$-Bimodul.* Dann definiert man die *stetige Hochschild-Homologie* von $\mathcal{A}$ mit Werten in $\mathcal{M}$ durch

$$H_n(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \operatorname{Tor}_n^{\mathcal{A}^e}(\mathcal{A}, \mathcal{M}),$$

und die *stetige Hochschild-Kohomologie* von $\mathcal{A}$ mit Werten in $\mathcal{M}$ durch

$$H^n(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \operatorname{Ext}_{\mathcal{A}^e}^n(\mathcal{A}, \mathcal{M}).$$

Anstelle von $H_n(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ bzw. $H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ schreiben wir oft auch $HH_n(\mathcal{A})$ bzw. $HH^n(\mathcal{A})$ und nennen diese Vektorräume die *stetige Hochschild-Homologie* bzw. *stetige Hochschild-Kohomologie* von $\mathcal{A}$.

6.3.2 Zur Berechnung der stetigen Hochschild-(Ko-)Homologie erweist sich die *topologische Bar-Auflösung* als sehr nützlich. Für eine vollständig lokalkonvexe Algebra $\mathcal{A}$ ist sie gegeben durch die Sequenz

$$\mathbf{C}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Bar}} : \cdots \xrightarrow{\delta_{k+1}} \mathcal{A}^e\hat{\otimes}_\pi \underbrace{\mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi\mathcal{A}}_{k-\text{times}} \xrightarrow{\delta_k} \cdots \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{A}^e\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{A}^e \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

wobei $\delta_k((\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b})\otimes\mathfrak{a}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{a}_k)$

$$\begin{aligned}&=(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b})\otimes(\mathfrak{a}_2\otimes\cdots\otimes\mathfrak{a}_k)+\\&+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j(\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b})\otimes(\mathfrak{a}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{a}_j\,\mathfrak{a}_{j+1}\otimes\cdots\otimes\mathfrak{a}_k)+\\&+(-1)^k(\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b}\mathfrak{a}_k)\otimes(\mathfrak{a}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{a}_{k-1}),\qquad\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_k\in\mathcal{A}.\end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüft (siehe zum Beispiel [105, Sec. 1.1]), gilt $\delta_{k-1}\circ\delta_k=0$. Zudem sind die Abbildungen

$$\mathsf{s}_k:\mathrm{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{A},k}\to\mathrm{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{A},k+1},\quad(\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b})\otimes\mathfrak{a}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{a}_k\mapsto(1\otimes\mathfrak{b})\otimes\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{a}_k$$

und $\mathsf{s}_{-1}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{\mathrm{e}}$, $\mathfrak{a}\mapsto(1\otimes\mathfrak{a})$ stetig $\Bbbk$-linear und induzieren eine Nullhomotopie für $\mathbf{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{A}}$, das heißt für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt

$$\delta_{k+1}\circ\mathsf{s}_k+\mathsf{s}_{k-1}\circ\delta_k=\mathrm{id}.$$

Daraus ergibt sich einerseits, daß alle δ_k $\mathfrak{T}$-zulässig sind, andererseits aber auch, daß $\mathbf{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{A}}$ azyklisch ist. Damit wäre $\mathbf{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{A}}$ dann eine topologisch projektive Auflösung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^{\mathrm{e}}$-$\mathfrak{Mod}_{\mathfrak{clc}}$, wenn noch nachgewiesen werden kann, daß alle Komponenten $\mathrm{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{A},k}=\mathcal{A}^{\mathrm{e}}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\cdots\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A}$ topologisch projektive $\mathcal{A}^{\mathrm{e}}$-Moduln sind. Dies folgt jedoch sofort aus der Aussage (2) in Proposition 6.2.2. Ist nun $\mathcal{M}$ ein vollständig lokalkonvexer $\mathcal{A}^{\mathrm{e}}$-Modul, so wendet man die Funktoren $\mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}^{\mathrm{e}}}-$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathrm{e}}}(-,\mathcal{M})$ auf den Bar-Komplex an, und erhält den *topologischen Hochschild-Komplex*

$$\mathbf{C}_\bullet(\mathcal{A},\mathcal{M}):=\mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}^{\mathrm{e}}}\mathbf{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{A}}:\cdots\xrightarrow{\mathsf{b}_{k+1}}\mathcal{M}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\cdots\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A}\xrightarrow{\mathsf{b}_k}\cdots\xrightarrow{\mathsf{b}_2}\mathcal{M}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A}\xrightarrow{\mathsf{b}_1}\mathcal{M}\xrightarrow{\mathsf{b}_0}0$$

sowie den *topologischen Hochschild-Kokomplex*

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^\bullet(\mathcal{A},\mathcal{M}):=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathrm{e}}}(\mathbf{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{A}},\mathcal{M}):\ 0\longrightarrow\mathcal{M}\xrightarrow{\beta^0}\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{M})\xrightarrow{\beta^1}\cdots\\\xrightarrow{\beta^{k-1}}\mathrm{Hom}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\cdots\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A},\mathcal{M})\xrightarrow{\beta^k}\cdots\ .\end{aligned}$$

Die Homologie von $(\mathbf{C}_\bullet(\mathcal{A},\mathcal{M}),\mathsf{b}_\bullet)$ bzw. $(\mathbf{C}^\bullet(\mathcal{A},\mathcal{M}),\beta^\bullet)$ ergibt wie gewünscht die stetige Hochschild-(Ko)Homologie von $\mathcal{A}$ mit Werten in $\mathcal{M}$. In Analogie zur gewöhnlichen Hochschild-Homologie nennen wir die Elemente von $\mathcal{Z}_k=\ker\mathsf{b}_k$ (bzw. $\mathcal{Z}^k=\ker\beta^k$) *stetige Hochschild-(Ko)Zyklen*, und die Elemente von $\mathcal{B}_k=\operatorname{im}\mathsf{b}_{k+1}$ (bzw. $\mathcal{B}^k=\ker\beta^{k-1}$) *stetige Hochschild-(Ko)Ränder.*

6.3.3 Proposition *Sei $\mathcal{A}$ eine vollständig lokalkonvexe Algebra und $\mathcal{M}$ ein vollständig lokalkonvexer $\mathcal{A}^{\mathrm{e}}$-Modul. Dann berechnen sich die niedrigdimensionalsten stetigen Hochschild-Homologiegruppen folgendermaßen:*

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_0(\mathcal{A},\mathcal{M})=\mathcal{M}_{\mathcal{A}}:=\mathcal{M}\Big/\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathfrak{a}_j\mathfrak{m}_j-\mathfrak{m}_j\mathfrak{a}_j\Big|\ \sum\mathfrak{a}_j\otimes\mathfrak{m}_j\in\mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{M}\Big\},\\&\mathrm{H}^0(\mathcal{A},\mathcal{M})=\mathcal{M}^{\mathcal{A}}:=\big\{\mathfrak{m}\in M\big|\ \mathfrak{a}\mathfrak{m}=\mathfrak{m}\mathfrak{a}\ \textit{für alle}\ \mathfrak{a}\in\mathcal{A}\big\},\\&\mathrm{H}^1(\mathcal{A},\mathcal{M})=\mathrm{Der}_{\mathrm{c}}(\mathcal{A},\mathcal{M})/\,\mathrm{Der}_{\mathrm{i}}(\mathcal{A},\mathcal{M}).\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{Der_c}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ *den Raum der stetigen Derivationen auf* $\mathcal{A}$ *mit Werten in* $\mathcal{M}$*, und* $\mathrm{Der_i}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ *die aus allen inneren Derivationen, das heißt aus allen Derivationen der Form* $a \mapsto \mathrm{ad}(m)(a) = [m,a]$ *mit* $m \in \mathcal{M}$*, bestehende Menge. Falls* $\mathcal{A}$ *zudem kommutativ ist, und* $\mathcal{M}$ *ein symmetrischer* $\mathcal{A}^{\mathrm{a}}$*-Modul, also* $am = ma$ *für alle* $a \in \mathcal{A}$ *und* $m \in \mathcal{M}$ *erfüllt ist, so gilt*

$$\mathrm{HH}_1(\mathcal{A}) = \overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk} \quad \textit{und} \quad \mathrm{H}_1(\mathcal{A},\mathcal{M}) = \mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk},$$

wobei $\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk}$ *der Raum der topologischen Kähler-Differentiale ist.*

Zur Erläuterung: Der in Abschnitt B.2 definierte Raum der topologischen Kähler-Differentiale $\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk}$ trägt eine kanonische vollständig lokalkonvexe Topologie, wie in B.2 gezeigt. Versieht man den Raum der stetigen Derivationen $\mathrm{Der_c}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ mit der starken Operatortopologie, also mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen, so wird $\mathrm{Der_c}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ ebenfalls zu einem vollständig lokalkonvexen Vektorraum.

Beweis: Nach Definition ist $\beta^0(m)(a) = am - ma$ und $\beta^1(f)(a\otimes b) = f(ab) - af(b) - f(a)b$ für jede stetige $\Bbbk$-lineare Abbildung $f : \mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A} \to \mathcal{M}$. Daraus ergeben sich die Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^0(\mathcal{A},\mathcal{M})$ und $\mathrm{H}^1(\mathcal{A},\mathcal{M})$. Da $b_1(a\otimes m) = am - ma$, erhält man zudem die Homologiegruppe $\mathrm{H}_0(\mathcal{A},\mathcal{M})$.

Nun zum Fall, daß $\mathcal{A}$ kommutativ ist, und $\mathcal{M}$ ein symmetrischer $\mathcal{A}$-Bimodul. Dann ist $b_1 : \mathcal{M}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A} \to \mathcal{M}$ trivial, also ist $\mathrm{H}_1(\mathcal{A},\mathcal{M})$ der Quotient $(\mathcal{M}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A})/\mathrm{im}\, b_2$. Damit ist die Abbildung $\Theta : \mathrm{H}_1(\mathcal{A},\mathcal{M}) \to \mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk}$, $m\otimes a \mapsto m\otimes da$ wohldefiniert und stetig. Mit dem abgeschlossenen Ideal $\overline{\mathcal{J}}$ aus Abschnitt B.2 erhält man eine weitere stetige Abbildung

$$\Upsilon : \mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\overline{\mathcal{J}} \to \mathrm{H}_1(\mathcal{A},\mathcal{M}), \quad m\otimes\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j\otimes c_j \mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j m\otimes c_j + \mathrm{im}\, b_2.$$

Da für zwei Elemente $\sum a_i\otimes c_i \in \overline{\mathcal{J}}$ und $\sum \tilde{a}_j\otimes\tilde{c}_j \in \overline{\mathcal{J}}$ die Beziehung

$$\sum_{i,j} a_i\tilde{a}_j m\otimes c_i\tilde{c}_j + \mathrm{im}\, b_2 = \sum_{i,j}\left(a_i m\otimes c_i\tilde{a}_j\tilde{c}_j - a_i c_i\tilde{c}_j m\otimes\tilde{a}_j\right) + \mathrm{im}\, b_2 = 0$$

erfüllt ist, faktorisiert Υ mit $\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk} = \overline{\mathcal{J}}/\overline{\mathcal{J}^2}$ zu einem stetig $\mathcal{A}$-linearen Morphismus $\overline{\Upsilon} : \mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk} \to \mathrm{H}_1(\mathcal{A},\mathcal{M})$. Die beiden so definierten Abbildungen $\overline{\Upsilon}$ und Θ sind invers zueinander, wie man durch kurze Rechnung überprüft. □

6.3.4 Proposition *Sei* $\mathcal{A}$ *eine kommutative, vollständig lokalkonvexe Algebra und* $\mathcal{M}$ *ein vollständig lokalkonvexer* $\mathcal{A}$*-Modul. Dann ist die Antisymmetrisierung* $\varepsilon_k : \mathrm{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{A},k} \to \mathrm{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{A},k}$,

$$(a\otimes b)\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_k \mapsto \sum_{\sigma\in S_k} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\left((a\otimes b)\otimes a_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes a_{\sigma(k)}\right)$$

stetig $\mathcal{A}^{\mathrm{e}}$*-linear und induziert Morphismen*

$$\varepsilon_k : \mathrm{C}_k(\mathcal{A},\mathcal{M}) \to \mathrm{C}_k(\mathcal{A},\mathcal{M}) \quad \textit{und} \quad \varepsilon^k : \mathrm{C}^k(\mathcal{A},\mathcal{M}) \to \mathrm{C}^k(\mathcal{A},\mathcal{M})$$

auf dem stetigen Hochschild-(Ko)Ketten derart, daß

$$b_k\circ\varepsilon_k = 0 \quad \textit{und} \quad \varepsilon^k\circ\beta^{k-1} = 0.$$

Beweis: Die Stetigkeit von ε_k ist klar nach Definition. Wir zeigen nun $\mathsf{b}_k \circ \varepsilon_k = 0$; die Gleichung $\varepsilon_k \circ \beta^{k-1} = 0$ ergibt sich dann in analoger Weise. Wir bezeichnen mit $\tau_l \in \mathsf{S}_k$, $1 \le l < k$ die Transposition von l und $l+1$, sowie mit $\mathsf{S}_{k,l}$ die Menge aller Permutationen σ mit $\sigma(l) < \sigma(l+1)$. Für alle $l < k$ ist dann S_k die disjunkte Vereinigung der Mengen $\mathsf{S}_{k,l}$ und $\mathsf{S}_{k,l}\tau_l$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} &\mathsf{b}\varepsilon_k(\mathsf{m}\otimes \mathsf{a}_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_k) = \\ &\qquad \sum_{\sigma\in \mathsf{S}_k} \Big(\mathsf{a}_{\sigma(1)}\mathsf{m} \otimes \mathsf{a}_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_{\sigma(k)} - \mathsf{a}_{\sigma(k)}\mathsf{m} \otimes \mathsf{a}_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_{\sigma(k-1)} \otimes \mathsf{a}_{\sigma(1)}\Big) \\ &\qquad + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{\sigma\in \mathsf{S}_{k,l}} (-1)^l \operatorname{sgn}(\sigma) \Big(\mathsf{m} \otimes \mathsf{a}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_{\sigma(l)}\mathsf{a}_{\sigma(l+1)} \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_{\sigma(k)} \\ &\qquad\qquad - \mathsf{m} \otimes \mathsf{a}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_{\sigma(\tau_l(l))}\mathsf{a}_{\sigma(\tau_l(l+1))} \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_{\sigma(k)}\Big) = 0, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

6.3.5 Proposition *Unter den Voraussetzungen der vorangehenden Proposition induzieren die Antisymmetrisierungsoperatoren die folgenden stetigen Abbildungen:*

$$\begin{aligned} [\varepsilon]_k :\ & \mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\overline{\Omega}^k_{\mathsf{A}/\Bbbk} \to \mathrm{H}_k(\mathcal{A},\mathcal{M}),\ \mathsf{m}\otimes \mathsf{d}\mathsf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}\mathsf{a}_k \mapsto [\varepsilon_k(\mathsf{m}\otimes \mathsf{a}_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_k)], \\ [\varepsilon]^k :\ & \overline{\Lambda}^k_{\mathcal{A}} \operatorname{Der}_c(\mathcal{A},\mathcal{M}) \to \mathrm{H}^k(\mathcal{A},\mathcal{M}),\ \mathsf{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{f}_k \mapsto [\varepsilon^k(\mathsf{f}_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{f}_k)], \\ [\pi]_k :\ & \mathsf{H}_k(\mathcal{A},\mathcal{M}) \to \mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\overline{\Omega}^k_{\mathsf{A}/\Bbbk}, \\ & \qquad \Big[\sum \mathsf{m}_{(0)} \otimes \mathsf{a}_{(1)} \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_{(k)}\Big] \mapsto \sum \mathsf{m}_{(0)} \otimes \mathsf{d}\mathsf{a}_{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}\mathsf{a}_{(k)}. \end{aligned}$$

Falls $\mathcal{A}$ als topologische Algebra endlich erzeugt ist, und $\mathcal{M}$ ein endlich erzeugter topologisch projektiver $\mathcal{A}$-Modul, so existiert eine weitere stetige Abbildung

$$[\pi]^k : \mathrm{H}^k(\mathcal{A},\mathcal{M}) \to \overline{\Lambda}^k_{\mathcal{A}} \operatorname{Der}_c(\mathcal{A},\mathcal{M}),\ \Big[\sum \mathsf{f}_{(1)} \otimes \cdots \otimes \mathsf{f}_{(k)}\Big] \mapsto \sum \mathsf{f}_{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{f}_{(k)}.$$

Zur Erläuterung der Symbole $\overline{\Omega}^k_{\mathsf{A}/\Bbbk}$ und $\overline{\Lambda}^k$ sei der Leser auf den Abschnitt B.2 im Anhang verwiesen. Zudem bezeichnet $[\,\cdot\,]$ die (Ko)Homologieklasse eines stetigen Hochschild-(Ko)Zyklusses.

Beweis: Der Antisymmetrisierungsoperator induziert wegen der Relation $\mathsf{b}_k \circ \varepsilon_k = 0$ aus Proposition 6.3.4 erst einmal eine stetige Abbildung $\varepsilon_k : \mathcal{M}\hat{\otimes}_k\overline{\Lambda}^k\mathcal{A} \to \mathrm{H}_k(\mathcal{A},\mathcal{M})$. Um zu zeigen, daß dieses ε_k durch $\mathcal{M}\hat{\otimes}_k\overline{\Omega}^k_{\mathsf{A}/\Bbbk}$ zu $[\varepsilon]_k$ faktorisiert, muß gezeigt werden, daß die stetigen Abbildungen

$$\mathcal{A} \ni \mathsf{a}_l \mapsto [\varepsilon_k(\mathsf{m}\otimes \mathsf{a}_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_l \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_k)] \in \mathrm{H}_k(\mathcal{A},\mathcal{M}).$$

Derivationen sind. Dazu genügt es nachzuweisen (vgl. [105, Prop. 1.3.12]), daß

$$\varepsilon_k(\mathsf{m}\mathsf{b} \otimes \mathsf{c} \otimes \mathsf{a}_2 \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_k) + \varepsilon_k(\mathsf{m}\mathsf{c} \otimes \mathsf{b} \otimes \mathsf{a}_2 \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_k) - \varepsilon_k(\mathsf{m} \otimes \mathsf{b}\mathsf{c} \otimes \mathsf{a}_2 \otimes \cdots \otimes \mathsf{a}_k)$$

ein (stetiger) Hochschild-Rand ist. Dies ist tatsächlich der Fall, denn mit $a_0 = b$, $a_1 = c$ und $T_{k+1} = \{\sigma \in S_{k+1} \,|\, \sigma^{-1}(0) < \sigma^{-1}(1)\}$ gilt

$$
\begin{aligned}
& b_{k+1}\Big(\sum_{\sigma\in T_{k+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) m \otimes a_{\sigma(0)} \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(k)} \Big) = \\
& = \sum_{\sigma\in T_{k+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \Big(m a_{\sigma(0)} \otimes a_{\sigma(1)} \otimes a_{\sigma(k)} + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{l+1}\, m \otimes a_{\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(l)} \otimes a_{\sigma(k)} \\
& \qquad\qquad + (-1)^{k+1} m a_{\sigma(1)} \otimes a_{\sigma(0)} \otimes a_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(k)} \Big) \\
& = \varepsilon_k(mb \otimes c \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k) + \sum_{\substack{\sigma\in S_{k+1} \\ 0<\sigma^{-1}(0)<\sigma^{-1}(1)}} \operatorname{sgn}(\sigma) m \otimes a_{\sigma(0)} \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(k)} \\
& \quad + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{l+1} \sum_{\substack{\sigma\in S_{k+1} \\ \sigma^{-1}(0)=l,\, \sigma^{-1}(1)=l+1}} m \otimes a_{\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(l)} a_{\sigma(l+1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(k)} \\
& \quad + \varepsilon_k(mc \otimes b \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k) + (-1)^{k+1} \sum_{\substack{\sigma\in S_{k+1} \\ \sigma^{-1}(0)<\sigma^{-1}(1)<k}} \operatorname{sgn}(\sigma) m \otimes a_{\sigma(k)} \otimes a_{\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(k-1)} \\
& = \varepsilon_k(mb \otimes c \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k) + \varepsilon_k(mc \otimes b \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k) \\
& \quad - \varepsilon_k(m \otimes bc \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k)
\end{aligned}
\tag{6.3.1}
$$

Zum Nachweis, daß $[\varepsilon]^k$ wohldefiniert ist, genügt es zu zeigen, daß für alle $f_1, \cdots, f_k \in \operatorname{Der}_c(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ die stetige Abbildung $\Lambda f := \varepsilon^k(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k) : \mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ ein Hochschild-Kozyklus ist. Wir berechnen $\beta^k \varepsilon^k(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k)$ unter Verwendung der Tatsache, daß alle f_l Derivationen sind:

$$
\begin{aligned}
& \beta^k \varepsilon^k(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k+1}) = \\
& \quad = a_1 \Lambda f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{k+1}) + \sum_{l=1}^{k} (-1)^l a_l \Lambda f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l-1} \otimes a_{l+1} \otimes \cdots \otimes a_{k+1}) \\
& \qquad + \sum_{l=1}^{k} (-1)^l a_{l+1} \Lambda f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_l \otimes a_{l+2} \otimes \cdots \otimes a_{k+1}) + a_{k+1} \Lambda f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) \\
& \quad = 0.
\end{aligned}
$$

Aufgrund einer ähnlichen Argumentation ergibt sich, daß der Morphismus $[\pi]_k$ wohldefiniert ist (vgl. dazu [105, Lem. 1.3.14]).

Zum Nachweis des letzten Teils der Behauptung nehmen wir an, $\mathcal{A}$ sei als topologische Algebra endlich erzeugt, und $\mathcal{M}$ ein topologisch projektiver endlich erzeugter $\mathcal{A}$-Modul. Dann ist $\mathcal{M}$ ein topologisch direkter Summand in einem topologischen $\mathcal{A}$-Modul der Form $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathbb{R}^n$, folglich genügt es, die Behauptung für den Fall zu zeigen, daß $\mathcal{M} = \mathcal{A}$. Es gilt nun

6.3.6 Lemma *Für jede topologisch endlich erzeugte vollständig lokalkonvexe Algebra $\mathcal{A}$ ist der Raum $\operatorname{Der}_c(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ der stetigen Derivationen als $\mathcal{A}$-Modul endlich erzeugt.*

Beweis des Lemmas: Aufgrund der Voraussetzung an $\mathcal{A}$ existiert ein endliches System $(\mathsf{e}_1, \cdots, \mathsf{e}_n)$ von Elementen aus $\mathcal{A}$ derart, daß der von den Polynomen in den e_l erzeugte Unterraum dicht in $\mathcal{A}$ liegt. Falls eine Derivation $\delta \in \mathrm{Der_c}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ mit $\delta(\mathsf{e}_1) \neq 0$ existiert, so setze man

$$\delta_1 = \frac{1}{\delta(\mathsf{e}_1)}\delta, \quad \text{ansonsten} \quad \delta_1 = 0.$$

Nehmen wir an, es konnten $\delta_1, \cdots, \delta_l$ konstruiert werden, so daß $\delta_k(\mathsf{e}_i) = 0$ für $i < k \leq l$, und so daß für jede stetige Derivation δ Koeffizienten $\mathsf{a}_1, \cdots, \mathsf{a}_l$ derart existieren, daß $\delta_\mathrm{r} = \delta - \mathsf{a}_1\delta_1 - \ldots - \mathsf{a}_l\delta_l$ auf allen e_i, $i \leq l$ verschwindet. Gibt es nun ein δ und $\mathsf{a}_1, \cdots, \mathsf{a}_l$ mit $\delta_\mathrm{r}(\mathsf{e}_i) = 0$ für $i \leq l$ aber $\delta_\mathrm{r}(\mathsf{e}_{l+1}) \neq 0$, so setzen wir

$$\delta_{l+1} = \frac{1}{\delta_\mathrm{r}(\mathsf{e}_{l+1})}\delta, \quad \text{ansonsten} \quad \delta_{l+1} = 0.$$

In jedem Fall erkennt man leicht, daß dann das System $\delta_1, \cdots, \delta_{l+1}$ die Induktionsvoraussetzung erfüllt. Da die Polynome in den e_k dicht in $\mathcal{A}$ sind, erzeugt die sich rekursiv ergebende Familie $\delta_1, \cdots, \delta_n$ den $\mathcal{A}$-Modul $\mathrm{Der_c}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.

Beweis von 6.3.5, Fortsetzung: Wegen $\varepsilon^k \circ \beta^{k-1} = 0$ ist

$$\pi^k : \mathrm{H}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \to \mathrm{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{A},k}, \quad \left[\sum \mathsf{f}_{(1)} \otimes \cdots \otimes \mathsf{f}_{(k)}\right] \mapsto \sum \mathsf{f}_{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{f}_{(k)}$$

stetig und wohldefiniert, es muß also nur noch gezeigt werden, daß das Bild von π^k in $\overline{\Lambda}^k_{\mathcal{A}} \mathrm{Der_c}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ liegt. Aufgrund von 6.3.1 ist für jeden Hochschild-Kozyklus $\sum \mathsf{f}_{(1)} \otimes \cdots \otimes \mathsf{f}_{(k)}$ und alle $\mathsf{a}_2, \cdots, \mathsf{a}_k \in \mathcal{A}$ die Abbildung

$$\mathsf{a} \mapsto \sum_{\sigma \in S_k} \sum \mathsf{f}_{(\sigma(1))}(\mathsf{a}) \otimes \mathsf{f}_{(\sigma(2))}(\mathsf{a}_2) \otimes \cdots \otimes \mathsf{f}_{(\sigma(k))}(\mathsf{a}_k)$$

eine stetige Derivation. Wir benötigen als nächstes eine Abzählung der aus allen k-Tupeln $(i_1, \cdots, i_k)$ der Form $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ bestehenden Menge I. Dazu genügt es nach dem Wohlordnungsprinzip eine totale Ordnung auf I anzugeben. Eine solche ist offensichtlich dadurch gegeben, daß man $(i_1, \cdots, i_k)$ genau dann als kleiner $(j_1, \cdots, j_k)$ definiert, wenn $i_1 = j_1, \cdots, i_{l-1} = j_{l-1}$ aber $i_l < j_l$ für ein $l \leq k$. Sei $\alpha(j)$, $j \leq \binom{n}{k}$ das j-te Element von I, und $\mathsf{e}_\alpha = \mathsf{e}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \mathsf{e}_{\alpha_k}$ für $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in I$. Wir definieren nun rekursiv

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Lambda\mathsf{f}(\mathsf{e}_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{e}_k)\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_k, \\ \Delta_{\alpha(j+1)} &= \Delta_{\alpha(j)} + \big(\Lambda\mathsf{f}(\mathsf{e}_{\alpha(j+1)}) - \Delta_{\alpha(j)}(\mathsf{e}_{\alpha(j+1)})\big)\delta_{\alpha_1(j+1)} \wedge \cdots \wedge \delta_{\alpha_k(j+1)}, \end{aligned}$$

wobei $\Lambda\mathsf{f} = \mathsf{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{f}_k$. Mittels eines Induktionsarguments schließt man, daß $\Delta_{\alpha\binom{n}{k}} = \Lambda\mathsf{f}$. Da $\Delta_{\alpha\binom{n}{k}}$ nach Konstruktion in $\overline{\Lambda}^k_{\mathcal{A}} \mathrm{Der_c}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ liegt, ist die Proposition schließlich vollständig bewiesen. $\square$

6.3.7 Korollar *Unter den Voraussetzungen der Proposition ist $\mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\overline{\Omega}^k_{\mathcal{A}/\Bbbk}$ in natürlicher Weise ein topologisch direkter Summand von $\mathrm{H}_k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$. Falls $\mathcal{A}$ als topologische Algebra endlich erzeugt ist, und $\mathcal{M}$ ein topologisch projektiver endlich erzeugter vollständig lokalkonvexer $\mathcal{A}$-Modul, so ist $\overline{\Lambda}^k_{\mathcal{A}} \mathrm{Der_c}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ ein kanonischer topologisch direkter Summand von $\mathrm{H}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$.*

6.4 Hochschild-Homologie von Algebren glatter Funktionen

6.4.1 Zuerst erinnern wir an die natürliche Fréchet-Topologie auf der Algebra $\mathcal{C}^\infty(M)$ der glatten Funktionen über einer Mannigfaltigkeit M und die natürliche Fréchet-Topologie auf dem Raum $\Omega^k(M)$ der k-Formen über M (siehe Anhang C.1).

Nehmen wir nun an, auf M existiere ein globales, nirgends verschwindendes Vektorfeld V, was zum Beispiel der Fall ist, wenn M eine offene Menge des Euklidischen Raums ist, oder wenn M kompakt mit Euler-Charakteristik 0 ist. Unter dieser Voraussetzung an M hat Alain Connes in [41] eine topologisch projektive Auflösung von $\mathcal{C}^\infty(M)$ angegeben, die es ermöglicht, die stetige Hochschild (Ko)Homologie von $\mathcal{C}^\infty(M)$ zu berechnen. Im folgenden wollen wir diese Auflösung nach Connes [41], die letztlich auf den Koszul-Komplex zurückgeht, konstruieren. Dazu wählen wir zuerst auf M einen torsionsfreien affinen Zusammenhang, und bezeichne mit exp die zugehörige Exponentialfunktion. Sei $\chi : M \times M \to [0,1]$ eine glatte Funktion derart, daß $\exp_y^{-1}(x)$ für alle $(x,y) \in \operatorname{supp}\chi$ erklärt ist, und χ auf einer Umgebung der Diagonalen identisch 1 ist. Desweiteren sei $E_k = \mathrm{pr}_2(\Lambda^k T^*_{\mathbb{C}} M)$ das komplexe Vektorbündel über $M \times M$, das durch Rückzug des k-ten äußeren Produkts des komplexifizierten Kotangentialbündels $T^*_{\mathbb{C}}M$ mittels der Projektion $\mathrm{pr}_2 : M \times M \to M$ auf die zweite Koordinate entsteht. Da E_1^* das pull-back Bündel des komplexifizierten Tangentialbündels $T_{\mathbb{C}}M$ via pr_2 ist, definiert

$$Z(x,y) = \chi(x,y)\ \exp_y^{-1}(x) + i\,(1-\chi(x,y))\ V(y) \tag{6.4.1}$$

einen glatten Schnitt Z in E_1^*, der außerhalb der Diagonalen von $M \times M$ nicht verschwindet. Mit diesen Zutaten können wir das Resultat von Connes formulieren.

6.4.2 Proposition (Connes [41], p. 127ff) *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n mit einem nirgends verschwindenden glatten Vektorfeld $V : M \to TM$. Die Bündel E_k und der Schnitt $Z \in \mathcal{C}^\infty(E_1^*)$ seien wie oben definiert. Dann stellt die Sequenz*

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_M^{\mathrm{CK}} :\ 0 \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M \times M, E_n) &\xrightarrow{i_Z} \cdots \\ &\xrightarrow{i_Z} \mathcal{C}^\infty(M \times M, E_1) \xrightarrow{i_Z} \mathcal{C}^\infty(M \times M) \xrightarrow{\Delta^*} \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

eine topologisch projektive Auflösung des Moduls $\mathcal{C}^\infty(M)$ über $\mathcal{C}^\infty(M \times M) \cong \mathcal{C}^\infty(M)\hat{\otimes}_\pi \mathcal{C}^\infty(M)$ dar. Dabei bedeutet i_Z die kanonische Einfügung von Z in die erste Stelle einer Form, und Δ die natürliche Einbettung von M als Diagonale von $M \times M$. Eine stetige Kettenabbildung über der Identität von $\mathbf{C}_M^{\mathrm{CK}}$ nach $\mathbf{C}_M^{\mathrm{Bar}} := \mathbf{C}_{\mathcal{C}^\infty(M)}^{\mathrm{Bar}}$ ist durch die Morphismen $F_k : C_{M,k}^{\mathrm{CK}} \to C_{M,k}^{\mathrm{Bar}}$ mit

$$F_k\omega(x,y,x_1,\cdots,x_k) = \langle Z(x_1,y) \wedge \cdots \wedge Z(x_k,y), \omega(x,y)\rangle \qquad x,y,x_i \in M,\ \omega \in C_{M,k}^{\mathrm{CK}}. \tag{6.4.2}$$

gegeben.

Beweis: Wir führen den Beweis wie in [41]. Jeder der Moduln $\mathcal{M}_k = \mathcal{C}^\infty(M \times M, E_k)$ ist projektiv endlich erzeugt, insbesondere also topologisch projektiv. Da offensichtlich $i_Z^2 = 0$ gilt, muß zum Nachweis, daß $\mathbf{C}_M^{\mathrm{CK}}$ eine topologisch projektive Auflösung darstellt, nur noch ein stetig linearen “Schnitt” $s_\bullet : \mathbf{C}^{\mathrm{CK}}_{M,\bullet} \to \mathbf{C}^{\mathrm{CK}}_{M,\bullet+1}$ von i_Z konstruiert werden. Dazu wählen wir erst einmal glatte Abschneidefunktionen $\chi, \chi' : M \times M \to [0,1]$ derart, daß $\chi' = 1$ auf dem Träger von χ, $\chi' = 1$ auf einer Umgebung der Diagonalen von $M \times M$ und

$$Z(x,y) = \exp_y^{-1}(x) \quad \text{für alle } (x,y) \in \operatorname{supp}\chi'.$$

Es existiert dann ein glatter Schnitt $\omega' \in \mathcal{C}^\infty(M \times M, E_1)$ mit $\langle \omega', Z\rangle_{\operatorname{supp}(1-\chi)} = 1$. Für $\omega \in \mathcal{C}^\infty(M \times M, E_k)$ und $x \in M$ bezeichne man mit ω_x die Form $\in \Omega^k(M, \mathbb{C})$, so daß $\omega_x(y) = \omega_{(x,y)}$ für alle $y \in M$. Wir definieren nun eine Homotopie

$$H : O \times [0,1] \to M \quad \text{durch} \quad H_t(x,y) = H_{x,t}(y) = \exp_x(-t\exp_x^{-1}(y)), \qquad (x,y) \in O.$$

Dabei ist O eine offene Umgebung der Diagonalen von $M \times M$ mit $\operatorname{supp}\chi' \subset O$. Nun können wir definieren

$$s_k(\omega)_x = \chi'_x \int_0^1 H_x^*(d(\chi_x\omega_x))\,\frac{dt}{t} + (1-\chi'_x)\,\omega'_x \wedge \omega_x, \qquad \omega \in \mathcal{C}^\infty(E_k) \tag{6.4.3}$$

Aufgrund von Lemma 5.2.1 ergibt sich dann unter Verwendung von $DH_x(y,t).\frac{\partial}{\partial t} = Z(x,y)$ für alle $\eta \in \mathcal{C}^\infty(E_k)$ mit $\operatorname{supp}\eta \subset O$

$$\int_0^1 H_x^*\, d(i_{Z_x}\eta_x)\,\frac{dt}{t} + i_{Z_x}\int_0^1 H_x^*\, d\eta_x\,\frac{dt}{t} = K_{M,1}\, H_x^*\,\eta_x + H_x^*\, K_{M,1}\,\eta_x = \eta_x.$$

Daraus folgt dann sofort $s_{k-1} i_{Z_x}\omega_x + i_{Z_x} s_k \omega_x = \omega_x$. Also ist $\mathbf{C}^{\mathrm{CK}}_{M,\bullet}$ tatsächlich eine topologisch projektive Auflösung von $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Als nächstes müssen wir zeigen, daß durch $F_\bullet$ eine Kettenabbildung gegeben ist. Dazu rechnen wir für $\omega \in \mathcal{C}^\infty(M \times M, E_k)$ nach:

$$\begin{aligned}
(\delta_k F_k \omega)(x,y,x_1,\cdots,x_{k-1}) &= F\omega(x,y,x,x_1\cdots,x_k) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\, F\omega(x,y,x_1,\cdots,x_i,x_i,\cdots,x_{k-1}) + (-1)^k\, F\omega(x,y,x_1,\cdots,x_{k-1},y) \\
&= \langle Z(x,y) \wedge Z(x_1,y) \wedge \cdots \wedge Z(x_{k-1},y), \omega(x,y)\rangle \\
&= (F\, i_Z\omega)(x,y,x_1,\cdots,x_{k-1}),
\end{aligned}$$

folglich ist F eine Kettenabbildung. □

Wie aus den Arbeiten [145] von Teleman und [162] von Wasserman hervorgeht, ist es möglich, für Algebren glatter Funktionen die “globale” Hochschild-Homologie aus der “lokalen” zu berechnen. Dies wollen wir im folgenden gemäß [145] erläutern. Dazu wähle man sich erst einmal einen in eine geodätisch vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,μ) einbettbaren (A)-stratifizierten Raum X mit der von M geerbten glatten Struktur $\mathcal{C}^\infty$. Sei d_μ der geodätische Abstand auf M und $\chi : \mathbb{R}^{\geq 0} \to [0,1]$ ein glatte Funktion, mit Träger in $[0,1]$ und $\chi = 1$ über $[0,1/2]$. Dann ist die Funktion

$$\delta_k : X^{k+1} \to \mathbb{R}^{\geq 0},\ (x_0,\cdots,x_k) \mapsto d_\mu^2(x_0,x_1) + d_\mu^2(x_1,x_2) + \cdots + d_\mu^2(x_{k-1},x_k) + d_\mu^2(x_k,x_0)$$

glatt und mißt den Abstand zur Diagonalen Δ_{k+1} von X^{k+1}. Für $r > 0$ bezeichne man mit U_r die sogenannte r-*Umgebung* der Diagonalen $\big\{(x_0,x_1,\cdots,x_k)\,\big|\,\delta_k(x_0,\cdots,x_k) < r\big\}$. Die Funktion $\delta_{k,r} := \chi_r \circ \delta_k$ mit $\chi_r(t) = \chi(r/t)$ hat nach Teleman die folgenden Eigenschaften:

(1) Die Multiplikation mit $\delta_{\bullet,r}$ kommutiert mit dem Hochschild-Randoperator, da $\delta_{\bullet,r}$ einen zyklischen Homomorphismus im Sinne von CONNES [41] darstellt.

(2) Der Träger von $\delta_{k,r}$ liegt in U_r.

(3) Über der Umgebung $U_{r/2}$ ist $\delta_{k,r}$ identisch 1.

Jeden Hochschild-Zyklus (oder analog auch jeden Kozyklus) $c \in \mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{C}^\infty(X)}\mathbf{C}^{\mathrm{Bar}}_{X,k}$ kann man nun in der Form $c = \delta_{k,r}c + (1-\delta_{k,r})c$ zerlegen. Der von den zweiten Summanden in dieser Zerlegung aufgespannte Komplex erweist sich azyklisch, trägt also nicht zur Homologie bei. Um dies zu präzisieren definieren wir für einen vollständig lokalkonvexen $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul $\mathcal{M}$ die folgenden Komplexe:

$$\mathbf{C}^r_{X,\mathcal{M},\bullet} := (1-\delta_{\bullet,r})\cdot \mathcal{M}\hat{\otimes}_{\mathcal{C}^\infty(X)}\mathbf{C}^{\mathrm{Bar}}_X \quad \text{und} \quad \mathbf{C}^{X,\mathcal{M},\bullet}_r := (1-\delta_{\bullet,r})\cdot \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(X)}(\mathbf{C}^{\mathrm{Bar}}_X, \mathcal{M}).$$

Die induktiven Limites hiervon für $r \to 0$ werden mit $\mathbf{C}^0_{X,\mathcal{M},\bullet}$ bzw. $\mathbf{C}^{X,\mathcal{M},\bullet}_0$ bezeichnet. Aus Theorem 3.2 von TELEMAN [145] ergibt sich dann unmittelbar folgender

6.4.3 Lokalisierungssatz (*vgl.* [145, Sec. 3]) *Die Komplexe* $\mathbf{C}^0_{X,\mathcal{M},\bullet}$ *und* $\mathbf{C}^{X,\mathcal{M},\bullet}_0$ *sind azyklisch.*

Aus dem Lokalisierungssatz folgt, daß es zu jeder lokalendlichen Überdeckung $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von X und jedem Hochschild-Zyklus $c \in \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)} \mathbf{C}^{\mathrm{Bar}}_{X,k}$ Hochschild-Zyklen c_j mit Träger in U_j^{k+1} gibt, so daß c und $\sum c_j$ homolog sind. Ein analoges Resultat gilt natürlich auch für Hochschild-Kozyklen. Damit kann die Berechnung der Hochschild-(Ko)Homologie von Algebren glatter Funktionen auf die von glatten Funktionen über lokal abgeschlossenen stratifizierten Unterräumen des $\mathbb{R}^n$ reduziert werden.

Als nächstes betrachten wir die Antisymmetrisierungsoperatoren aus Proposition 6.3.4.

6.4.4 Lemma *Sei* M *ein Mannigfaltigkeit und* $\mathcal{M}$ *ein vollständig lokalkonvexer* $\mathcal{C}^\infty(M)$-*Modul. Dann kann jede Hochschild-(Ko)Homologieklasse in* $\mathcal{M}$ *durch einen antisymmetrischen (Ko)Zyklus repräsentiert werden.*

BEWEIS: Aufgrund des Lokalisierungslemmas genügt es, die Behauptung für den Fall zu zeigen, daß M eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$ ist. Dann existiert zu $\mathcal{C}^\infty(M)$ gemäß Proposition 6.4.2 die topologisch projektive Auflösung $C^{\mathrm{CK}}_{M,\bullet}$ und die Kettenabbildung $F : C^{\mathrm{CK}}_{M,\bullet} \to C^{\mathrm{Bar}}_{M,\bullet}$. Sei $[c]$ eine Hochschild-Homologieklasse in $\mathcal{M}$, repräsentiert durch den Zyklus $c \in C^{\mathrm{Bar}}_{M,k}$. Dann gibt es ein Element $\omega \in \mathcal{C}^\infty(M\times M, E_k)$, so daß c und $F\omega$ homolog sind. Nach Definition von F ist aber $F\omega$ antisymmetrisch und repräsentiert $[c]$ nach 6.4.2. Also gilt die Behauptung im Homologie-Fall; analog zeigt man sie für den Kohomologiefall. □

6.4.5 Satz *Sei* M *ein Mannigfaltigkeit und* $\mathcal{M}$ *ein vollständig lokalkonvexer* $\mathcal{C}^\infty$-*Modul. Dann gilt in kanonischer Weise* $H_\bullet(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{M}) = \Omega^\bullet(M)\hat{\otimes}_{\mathcal{C}^\infty(M)}\mathcal{M}$. *Falls überdies* $\mathcal{M}$ *endlich erzeugt projektiv ist, so gilt* $H^\bullet(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\infty(M,\Lambda^\bullet TM)\hat{\otimes}_{\mathcal{C}^\infty(M)}\mathcal{M}$. *Insbesondere gilt also* $H_\bullet(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) = \Omega^\bullet(M)$ *und* $H^\bullet(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) = \mathcal{C}^\infty(M,\Lambda^\bullet TM)$.

BEWEIS: Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem vorangehenden Lemma und Proposition 6.3.5, wobei noch zu beachten ist, daß die Derivationen auf $\mathcal{C}^\infty(M)$ durch die glatten Vektorfelder auf M gegeben sind. □

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, die Ergebnisse zur Hochschild-Homologie glatter Funktionen über Mannigfaltigkeiten auf den Fall bestimmter Kegelräume der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ zu übertragen. Dazu betrachten wir einen kompakten (A)-stratifizierten Unterraum $\mathsf{L} \subset \mathsf{S}^{n-1}$ mit der von S^{n-1} geerbten glatten Struktur und eine Mannigfaltigkeit S, auf der ein nirgends verschwindendes Vektorfeld V existiert. Wir nehmen zusätzlich an, daß der Kegel $\mathsf{CL} \subset \mathbb{R}^n$ konvex ist. Sei X der stratifizierte Raum $\mathsf{S} \times \mathsf{CL} \subset \mathsf{S} \times \mathbb{R}^n$ mit der induzierten glatten Struktur. Wir wollen nun die oben definierte topologisch projektive Auflösung von $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$ auf den jetzt betrachteten Fall übertragen. Dazu definieren wir:

$$\mathsf{C}^{\mathrm{CK}}_{\mathsf{X},k} := \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}) \hat{\otimes} \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}, \Lambda^k \mathsf{T}^*_{\mathbb{C}} \mathbb{R}^n).$$

Jeder der Räume $\mathsf{C}^{\mathrm{CK}}_{\mathsf{X},k}$ ist dann offensichtlich ein projektiv endlich erzeugter $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X} \times \mathsf{X})$-Modul. Das als nächstes benötigte Vektorfeld $\mathsf{Z} : \mathsf{X} \times \mathsf{X} \to \mathsf{T}(\mathsf{S} \times \mathbb{R}^n)$ definieren wir wie oben durch

$$\mathsf{Z}(x, y) = \chi(x, y) \exp_y^{-1}(x) + i(1 - \chi(x, y))\, \mathsf{V}(\pi(y)), \qquad x, y \in \mathsf{X},$$

wobei exp jetzt die Exponentialfunktion des Levi–Civita-Zusammenhangs einer Produktmetrik aus einer Riemannschen Metrik auf S und dem Euklidischen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist, und $\pi : \mathsf{S} \times \mathbb{R}^n \to \mathsf{S}$ die kanonische Projektion. Man kann das Vektorfeld Z in ein Element $\omega \in \mathsf{C}^{\mathrm{CK}}_{\mathsf{X},k}$ einsetzen und erhält ein Element $i_{\mathsf{Z}}\omega \in \mathsf{C}^{\mathrm{CK}}_{\mathsf{X},k-1}$.

6.4.6 Proposition *Seien* L, S *und* X *wie oben. Dann stellt die Sequenz*

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{\mathrm{CK}}_{\mathsf{X}} :\ 0 \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathrm{CK}}_{\mathsf{X},n} &\xrightarrow{i_{\mathsf{Z}}} \cdots \\ &\xrightarrow{i_{\mathsf{Z}}} \mathbb{C}^{\mathrm{CK}}_{\mathsf{X},1} \xrightarrow{i_{\mathsf{Z}}} \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X} \times \mathsf{X}) \xrightarrow{\Delta^*} \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

eine topologisch projektive Auflösung des Moduls $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})$ *über* $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X} \times \mathsf{X})$ *dar.*

Eine stetige Kettenabbildung über der Identität von $\mathbf{C}^{\mathrm{CK}}_{\mathsf{X}}$ *nach* $\mathbf{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathsf{X}} := \mathbf{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})}$ *ist durch die Morphismen* $\mathsf{F}_k : \mathsf{C}^{\mathrm{CK}}_{\mathsf{X},k} \to \mathsf{C}^{\mathrm{Bar}}_{\mathsf{X},k}$ *mit*

$$\mathsf{F}_k\omega(x, y, x_1, \cdots, x_k) = \langle \mathsf{Z}(x_1, x) \wedge \cdots \wedge \mathsf{Z}(x_k, x), \omega(x, y) \rangle \qquad x, y, x_i \in \mathsf{X},\ \omega \in \mathsf{C}^{\mathrm{CK}}_{\mathsf{X},k}. \tag{6.4.4}$$

gegeben.

Beweis: Der Beweis erfolgt nahezu wortwörtlich wie für Proposition 6.4.2. Als einziges ist zu beachten, daß die dort definierte Homotopie H in X verläuft, was wegen der Konvexitätsannahme an $\mathsf{CL} \subset \mathbb{R}^n$ auch tatsächlich erfüllt ist.

□

Genauso wie für Mannigfaltigkeiten ergibt sich jetzt das folgende Resultat.

6.4.7 Satz *Sei* X *ein stratifizierter Raum der Form* $\mathsf{S} \times \mathsf{CL}$, *wobei* $\mathsf{L} \subset \mathsf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ *ein (A)-stratifizierter Raum mit der induzierten glatten Struktur ist und so, daß* $\mathsf{CL} \subset \mathbb{R}^n$ *konvex ist. Dann gilt für jeden vollständig lokalkonvexen topologischen* $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})$*-Modul in kanonischer Weise* $\mathsf{H}_\bullet(\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}), \mathcal{M}) = \Omega^\bullet(\mathsf{X}) \hat{\otimes}_{\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})} \mathcal{M}$. *Falls überdies* $\mathcal{M}$ *endlich erzeugt projektiv ist, so gilt* $\mathsf{H}^\bullet(\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}), \mathcal{M}) = \Lambda^\bullet \operatorname{Der}(\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}), \mathcal{M})$. *Insbesondere gilt also* $\mathsf{H}_\bullet(\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}), \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})) = \Omega^\bullet(\mathsf{X})$ *und* $\mathsf{H}^\bullet(\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}), \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X})) = \Lambda^\bullet \operatorname{Der}(\mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}), \mathcal{C}^\infty(\mathsf{X}))$.

6.4.8 Bemerkung Das letzte Resultat dieses Abschnitts steht im Zusammenhang mit dem von Teleman [145] bewiesenen Satz, daß für stückweise differenzierbare Funktionen über einem simplizialen Komplex die Hochschild-Homologie isomorph zu den stückweise differenzierbaren Formen ist. Anhand dieses und des obigen Resultats läßt sich vermuten, daß ein solches Hochschild–Kostant–Rosenberg-Theorem auch für beliebige Kegelräume der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ gilt. Desweiteren bleibt der Zusammenhang zu der Arbeit Brasselet–Legrand [20] zu klären.

Anhang A

Ergänzungen aus der linearen Algebra und Funktionalanalysis

A.1 Der Vektorraumabstand

In diesem Abschnitt geht es darum, auf der *Graßmannschen Mannigfaltigkeit* $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ der k-dimensionalen linearen Unterräume des $\mathbb{R}^n$ eine natürliche Abstandsfunktion anzugeben. Um die Notation dabei übersichtlich zu halten, werde für diesen Abschnitt vereinbart, daß $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_k, \cdots$ immer Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ bezeichnen.

Der *Vektorraumabstand* von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ ist dann durch

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \sup_{v \in \mathcal{V},\, \|v\|=1} \inf \left\{ \|v - w\| \,\middle|\, w \in \mathcal{W} \right\}$$

definiert. Im allgemeinen ist d_{Gr} nicht symmetrisch in $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$, stellt also keine Metrik auf der Menge aller Unterräume des $\mathbb{R}^n$ dar. Wir werden aber sehen, daß die Einschränkung von d_{Gr} auf jede der Graßmannschen Mannigfaltigkeiten eine Metrik liefert.

Bezeichnet $\mathsf{P}_{\mathcal{V}}$ die Orthogonalprojektion bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{V}$, $\mathsf{P}_{\mathcal{W}}$ die auf $\mathcal{W}$ und $\mathsf{Q}_{\mathcal{W}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - \mathsf{P}_{\mathcal{W}}$ die Orthogonalprojektion auf den Orthogonalraum $\mathcal{W}^{\perp}$, so kann man unter Verwendung der Operatornorm den Vektorraumabstand auch folgendermaßen schreiben:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \left\| \mathsf{Q}_{\mathcal{W}} \mathsf{P}_{\mathcal{V}} \right\|. \tag{A.1.1}$$

A.1.1 Proposition *Der Vektorraumabstand hat folgende Eigenschaften:*

(1) d_{Gr} *nimmt nur Werte von* 0 *bis* 1 *an.*

(2) *Es gilt* $\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 0$ *genau dann, wenn* $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$, *und* $\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 1$ *genau dann, wenn* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}^{\perp} \neq \{0\}$.

(3) *Falls* $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$, *so gilt* $\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \mathrm{d}_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{W}, \mathcal{V})$.

(4) *Für alle* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ *gilt die Dreiecksungleichung*

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_3) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) + \mathrm{d}_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3).$$

(5) *Sind* $\mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_k$ *jeweils paarweise zueinander orthogonal, so gilt*

$$d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k, \mathcal{W}) \leq d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{W}) + \cdots + d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}_k, \mathcal{W}).$$

Beweis: Die Punkte (1), (2) und (5) folgen unmittelbar aus (A.1.1).

Unter der Voraussetzung $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ ist wegen (2) die Beziehung $d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 0$ (bzw. $d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 1$) genau dann erfüllt, wenn $d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = 0$ (bzw. $d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = 1$). Daß (3) auch für $0 < d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) < 1$ richtig ist, ergibt sich aus folgender Überlegung. Falls $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = 1$, also $\mathcal{V} = \operatorname{span} v$ und $\mathcal{W} = \operatorname{span} w$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$, so folgt $d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = |\langle v, w \rangle| = d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{W}, \mathcal{V})$. Falls jedoch $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} > 1$, so wähle man einen Einheitsvektor $v \in \mathcal{V}$ mit $d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \|v - P_{\mathcal{W}} v\|$. Wegen $0 < d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) < 1$ ist dann $P_{\mathcal{W}} v \neq 0$, also ist $w = \frac{P_{\mathcal{W}} v}{\|P_{\mathcal{W}} v\|}$ wohldefiniert, und es gilt $d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = |\langle w, v \rangle|$. Aus dem gleichen Grund ergibt sich $P_{\mathcal{V}} w \neq 0$. Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) &\geq \|w - P_{\mathcal{V}} w\| = \frac{|\langle P_{\mathcal{V}} w, w \rangle|}{\|P_{\mathcal{V}} w\|} = \|P_{\mathcal{V}} w\| = \frac{\|P_{\mathcal{V}} P_{\mathcal{W}} v\|}{\|P_{\mathcal{W}} v\|} \\ &\geq \frac{|\langle P_{\mathcal{V}} P_{\mathcal{W}} v, v \rangle|}{\|P_{\mathcal{W}} v\|} = |\langle w, v \rangle| = d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}). \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt auch $d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \geq d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{W}, \mathcal{V})$, somit erhalten wir (3).

Zum Nachweis der Dreiecksungleichung (4) wähle man sich ein normales $v \in \mathcal{V}_1$ mit $d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_3) = \|v - P_{\mathcal{V}_3} v\|$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_3) &= \|v - P_{\mathcal{V}_3} v\| \leq \|v - P_{\mathcal{V}_3} P_{\mathcal{V}_2} v\| \leq \|v - P_{\mathcal{V}_2} v\| + \|P_{\mathcal{V}_2} v - P_{\mathcal{V}_3} P_{\mathcal{V}_2} v\| \\ &\leq d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) + d_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3). \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

A.2 Polarzerlegung

Aus der linearen Algebra und Funktionalanalysis ist die Polarzerlegung einer linearen Isomorphie wohlbekannt. Wir benötigen dieses Resultat mehrfach, und vor allem, daß die Polarzerlegung eine differenzierbare Abbildung ist. Diese spezielle Eigenschaft wird in der entsprechenden Literatur vielfach nicht gezeigt, deshalb soll dies hier geschehen.

A.2.1 Satz *Sei* $\mathcal{V}$ *ein endlichdimensionaler (reeller oder komplexer) Vektorraum, und* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *ein (Euklidisches oder Hermitesches) Skalarprodukt auf* $\mathcal{V}$. *Dann existieren differenzierbare Abbildungen* $\mathfrak{u} : \mathrm{GL}(\mathcal{V}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ *und* $\mathfrak{s} : \mathrm{GL}(\mathcal{V}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$, *wobei* $\mathfrak{u}$ *nur unitäre Abbildungen als Werte annimmt, und* $\mathfrak{s}$ *nur positiv definite lineare Abbildungen, so daß für alle* $g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ *die Zerlegung*

$$g = \mathfrak{u}_g \, \mathfrak{s}_g$$

gilt. Zudem sind $\mathfrak{u}$ *und* $\mathfrak{s}$ *durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei jedem $N > 0$ die offene Menge $U_N = \{ g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V}) \mid \|g^* g - N \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{V}}\| < N \}$ zugeordnet, wobei $\| \cdot \|$ die zu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gehörige Operatornorm bedeutet und g^* den adjungierten Operator von g. Die U_N liefern dann eine offene Überdeckung von $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$.

Man beachte, daß $\mathfrak{g}^*\mathfrak{g}$ ein selbstadjungierter, positiv definierter Operator auf $\mathcal{V}$ ist. Wir definieren glatte Funktionen $\mathfrak{u}_N : \mathfrak{U}_N \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ und $\mathfrak{s}_N : \mathfrak{U}_N \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ mit den gewünschten Eigenschaften. Dazu bestimmen wir erst einmal die Taylorkoeffizienten der analytischen Funktion $\mathfrak{h}_N : \mathsf{B_indN}(0) \to \mathbb{R}^{>0}$ $z \mapsto \sqrt{z+N}$ um den Ursprung; sie sind durch $\mathfrak{h}_N^k = \left(\prod_{i=1}^k \left(\frac{3}{2} - i\right)\right) N^{1/2-k}$, $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Aufgrund der Definition von $\mathfrak{U}_N$ ist dann

$$\mathfrak{s}_{N,\mathfrak{g}} = \mathfrak{h}_N\big(\mathfrak{g}^*\,\mathfrak{g} - N\,\mathrm{id}_{\mathcal{V}}\big) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{h}_N^k\big(\mathfrak{g}^*\,\mathfrak{g} - N\,\mathrm{id}_{\mathcal{V}}\big)^k$$

für alle $\mathfrak{g} \in \mathfrak{U}_N$ wohldefiniert, und hängt analytisch, insbesondere also auch differenzierbar, von $\mathfrak{g}$ ab. Da $\mathfrak{h}_N$ nur Werte in den positiven reellen Zahlen annimmt, muß $\mathfrak{s}_{N,\mathfrak{g}}$ positiv definit sein. Nach Definition von $\mathfrak{h}_N$ gilt zudem $(\mathfrak{s}_{N,\mathfrak{g}})^2 = \mathfrak{g}^*\,\mathfrak{g}$. Der Operator $\mathfrak{u}_{N,\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}\,\mathfrak{s}_{N,\mathfrak{g}}^{-1}$ hängt nun ebenfalls differenzierbar von $\mathfrak{g}$ ab, und erfüllt

$$\mathfrak{u}_{N,\mathfrak{g}}^*\,\mathfrak{u}_{N,\mathfrak{g}} = (\mathfrak{s}_{N,\mathfrak{g}}^*)^{-1}\,\mathfrak{g}^*\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{s}_{N,\mathfrak{g}}^{-1} = \mathfrak{s}_{N,\mathfrak{g}}^{-1}\,(\mathfrak{s}_{N,\mathfrak{g}})^2\,\mathfrak{s}_{N,\mathfrak{g}}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}},$$

das heißt $\mathfrak{u}_{N,\mathfrak{g}}$ ist unitär. Somit erhalten wir eine Polarzerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_{N,\mathfrak{g}}\,\mathfrak{s}_{N,\mathfrak{g}}$.

Können wir noch die Eindeutigkeit der Polarzerlegung von jedem Element $\mathfrak{g} \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ zeigen, so müssen die Funktionen $\mathfrak{u}_N$ (bzw. $\mathfrak{s}_N$) auf den Durchschnitten ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen, definieren also dann die gesuchten Funktionen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{s}$, und die Behauptung ist gezeigt. Seien also $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}'$ unitär sowie $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ positiv definit derart, daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}\,\mathfrak{s} = \mathfrak{u}'\,\mathfrak{s}'$. Dann ist $\mathfrak{g}^* = (\mathfrak{u}\,\mathfrak{s})^* = \mathfrak{s}\,\mathfrak{u}^{-1}$, also $\mathfrak{s}^2 = \mathfrak{s}\,\mathfrak{u}^{-1}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{s} = \mathfrak{g}^*\,\mathfrak{g} = \mathfrak{s}'^2$. Da ein positiv definiter Operator nur eine positiv definite Wurzel haben kann, folgt $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}'$ und damit $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}'$. □

A.3 Topologische Tensorprodukte

Auf dem Tensorprodukt $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ zweier lokalkonvexer topologischer $\Bbbk$-Vektorräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ (mit $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\Bbbk = \mathbb{C}$) kann man viele verschiedene lokalkonvexe Topologien betrachten, die sich aus den Topologien auf $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ ergeben. Die natürlichste davon ist die π-Topologie, das ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, so daß die natürliche Abbildung $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ stetig ist. $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ versehen mit dieser Topologie wird mit $\mathcal{V} \otimes_\pi \mathcal{W}$ bezeichnet, die Vervollständigung mit $\mathcal{V}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{W}$. Die π-Topologie genügt der folgenden Kompatibilitäts-Eigenschaft:

(TP1) $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ ist stetig.

(TP2) Für jedes Paar $(\mathsf{e}, \mathsf{f}) \in \mathcal{V}' \times \mathcal{W}'$ stetig linearer Formen ist die Abbildung

$$\mathsf{e} \otimes \mathsf{f} : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \Bbbk, \quad \nu \otimes w \mapsto \mathsf{e}(\nu)\,\mathsf{f}(w)$$

stetig.

Die π-Topologie ist dann die stärkste und die hier nicht näher erläuterte ε-Topologie ist die schwächste unter den in dem genannten Sinne mit $\otimes$ kompatiblen Topologien auf $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ (siehe Grothendieck [64] oder Trèves [151] für Einzelheiten).

Zum Schluß dieses Abschnitts sei noch erwähnt, daß die Kategorie der vollständig lokalkonvexen topologischen Vektorräume mit $\hat{\otimes}_\pi$ als Tensorprodukt-Funktor eine Tensorkategorie im Sinne von Deligne [46] bildet.

Anhang B

Kähler-Differentiale

B.1 Der Raum der Kähler-Differentiale

B.1.1 Sei $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring, $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{R}$-Algebra (mit Eins), und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{A}$-Modul. Eine *Derivation* auf $\mathcal{A}$ über $\mathcal{R}$ mit Werten in $\mathcal{M}$ ist dann bekanntlich eine $\mathcal{R}$-lineare Abbildung $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$, so daß $\delta(\mathrm{ab}) = \mathrm{a}\delta(\mathrm{b}) + \delta(\mathrm{a})\mathrm{b}$ für alle $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathcal{A}$. Den Raum aller solcher Derivationen bezeichnen wir mit $\mathrm{Der}_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$.

Als Raum der *Kähler-Differentiale* von $\mathcal{A}$ über $\mathcal{R}$ bezeichnet man einen $\mathcal{A}$-Modul $\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$ zusammen mit einer Derivation $\mathrm{d} : A \to \Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$, genannt *Kähler-Ableitung*, so daß folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

(KÄ) Für jeden $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{M}$ und jede Derivation $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ gibt es genau eine $\mathcal{R}$-lineare Abbildung $\mathrm{i}_\delta : \Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \to \mathrm{M}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{d}"'] & \mathcal{M} \\ \Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \arrow[ur, "\mathrm{i}_\delta"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Aufgrund der universellen Eigenschaft ist das Paar $(\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}, \mathrm{d})$, dessen Existenz in der folgenden Proposition auch gezeigt wird, eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt. Es gilt dann

$$\mathrm{Der}_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}, \mathcal{M}). \tag{B.1.1}$$

B.1.2 Proposition *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative $\mathcal{R}$-Algebra. Dann existiert der Raum $\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$ der Kähler-Differentiale von $\mathcal{A}$, und wird durch die folgenden Räume repräsentiert:*

(1) *Sei Ω der freie $\mathcal{A}$-Modul über den Symbolen da mit $\mathrm{a} \in \mathcal{A}$, und $\mathcal{J}$ der durch die Relationen*

$$\mathrm{d}(\lambda\mathrm{a} + \mu\mathrm{b}) - \lambda\mathrm{da} - \mu\mathrm{db} = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathcal{R},\ \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathcal{A},$$
$$\mathrm{d}(\mathrm{ab}) - \mathrm{adb} - \mathrm{bda} = 0, \quad \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathcal{A},$$

erzeugte $\mathcal{A}$-Untermodul. Dann ist $\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} = \Omega/\mathcal{J}$ und $\mathrm{d} : \mathcal{A} \to \Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$, $\mathrm{a} \mapsto \mathrm{da} + \mathcal{J}$.

(2) *Sei* $\mathcal{B}$ *der Ring* $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{A}$ *versehen mit der durch* $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a} \otimes 1$ *gegebenen Struktur einer* $\mathcal{A}$*-Algebra, und* $\varepsilon : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *der Homomorphismus* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}$*. Bezeichnet* $\mathcal{I}$ *das Ideal* $\mathcal{I} = \ker \varepsilon$*, so stellt der* $\mathcal{A}$*-Modul* $\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ *zusammen mit der Derivation* $\mathrm{d} : \mathcal{A} \to \Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$, $\mathfrak{b} \mapsto (1 \otimes \mathfrak{b} - \mathfrak{b} \otimes 1) + \mathcal{I}^2$ *den Raum der Kähler-Differentiale über* $\mathcal{A}$ *dar. Der einer Derivation* $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ *zugeordnete Morphismus* $\mathfrak{i}_\delta : \Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \to \mathcal{M}$ *hat dann die Gestalt* $\sum \mathfrak{a}_j \otimes \mathfrak{b}_j \mapsto \sum \mathfrak{a}_j\, \delta(\mathfrak{b}_j)$*.*

(3) *Sei* $\mathcal{R} = \Bbbk$ *ein Körper,* $\mathcal{A}$ *eine lokale* $\Bbbk$*-Algebra mit maximalem Ideal* $\mathfrak{m}$*, und* $\mathfrak{j} : \mathcal{A} \to \Bbbk$ *ein Morphismus derart, daß die Sequenz*

$$0 \to \mathfrak{m} \to \mathcal{A} \overset{\mathfrak{j}}{\rightleftarrows} \Bbbk \to 0$$

splittend exakt ist. Dann liefert $\Omega^1_{\mathcal{A}/\Bbbk} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ *zusammen mit der Derivation* $\mathcal{A} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} - \mathfrak{j}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{m}^2$ *einen Modul von Kähler-Differentialen für* $\mathcal{A}$*.*

BEWEIS: MATSUMURA [116] □

B.1.3 Bemerkung Aufgrund von Prop. B.1.2 ist klar, daß sich jedes Element von $\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$ in der Form $\sum_j \mathfrak{a}_j\, \mathrm{d}\mathfrak{b}_j$ mit endlich vielen $\mathfrak{a}_j, \mathfrak{b}_j \in \mathcal{A}$ darstellen läßt.

B.1.4 Erste exakte Fundamentalsequenz *Sei* $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *ein Homomorphismus kommutativer* $\mathcal{R}$*-Algebren. Dann existiert eine exakte Sequenz von* $\mathcal{A}$*-Moduln der Form*

$$\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \xrightarrow{\beta} \Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{B}} \longrightarrow 0,$$

wobei $\alpha(\mathrm{d}\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\mathrm{d}\mathfrak{b}$ *und* $\beta(\mathrm{d}\mathfrak{a}) = \mathrm{d}\mathfrak{a}$*.*

BEWEIS: WEIBEL [163, 9.2.6] □

B.1.5 Zweite exakte Fundamentalsequenz *Sei* $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ *ein Ideal der kommutativen* $\mathcal{R}$*-Algebra* $\mathcal{A}$*. Dann ist die Sequenz*

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}/\mathcal{I} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{(\mathcal{A}/\mathcal{I})/\mathcal{R}} \longrightarrow 0$$

exakt, wobei $\delta : \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}/\mathcal{I}$ *die* $\mathcal{A}$*-Modulabbildung* $\mathfrak{a} \mapsto \mathrm{d}\mathfrak{a} \otimes 1$ *ist.*

BEWEIS: WEIBEL [163, 9.2.7] □

B.1.6 Ausgehend von $\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$ kann man das k-te äußere Produkt $\Omega^k_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} = \Lambda^k \Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$ bilden, wobei natürlich $\Omega^0_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} = \mathcal{A}$ und $\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$ gilt. Die direkte Summe $\Omega^\bullet_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Omega^k_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$ wird dann zu einer $\mathcal{A}$-Algebra, die wir wie üblich als die *äußere Algebra* von $\mathcal{A}$ bezeichnen. Zudem besitzt die Kähler-Ableitung $\mathrm{d} : \mathcal{A} \to \Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$ eine eindeutig bestimmte Erweiterung zu einer $\mathcal{R}$-linearen Abbildung $\mathrm{d} : \Omega^\bullet_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \to \Omega^\bullet_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$, so daß

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k\, \alpha \wedge \mathrm{d}\beta \qquad \alpha \in \Omega^k_{\mathcal{A}/\mathcal{R}},\ \beta \in \Omega^l_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$$

und $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$. Damit erhält man den sogenannten *deRham-Komplex* von $\mathcal{A}$:

$$\left(\Omega^\bullet_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}, \mathrm{d}\right) : \mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \Omega^2_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \xrightarrow{\mathrm{d}^2} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^{k-1}} \Omega^k_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \xrightarrow{\mathrm{d}^k} \cdots .$$

Beweise und Details zur Theorie der äußeren Algebra finden sich in der schon oben angegebenen Literatur.

B.2 Topologische Version

Wir betrachten nun den Fall, daß die $\Bbbk$-Algebra $\mathcal{A}$ über $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ definiert ist, und mit einer vollständig lokalkonvexen Topologie im Sinne von Abschnitt 6.1 versehen ist. Dann existiert zu jedem vollständig lokalkonvexen $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{M}$ der Raum $\mathrm{Der}_c(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ der stetigen Derivation von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{M}$. Auch der Funktor $\mathcal{M} \mapsto \mathrm{Der}_c(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ ist darstellbar, das heißt es existiert ein eindeutig bestimmter vollständig lokalkonvexer $\mathcal{A}$-Modul $\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk}$ zusammen mit einer stetigen Abbildung $\mathrm{d} : \mathcal{A} \to \overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk}$, so daß

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk}, M) \to \mathrm{Der}_c(\mathcal{A}, \mathcal{M}), \quad \mathrm{i} \mapsto \mathrm{i} \circ \mathrm{d}$$

ein Isomorphismus ist. Man beachte dabei, daß $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,-)$ den Raum der stetig $\mathcal{A}$-linearen Morphismen bezeichnet. Mit Proposition B.1.2, Punkt (2) ergibt sich eine einfache Form, in der $\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk}$ repräsentiert werden kann. Man setzt einfach $\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk} = \overline{\mathcal{J}}/\overline{\mathcal{J}^2}$, wobei $\overline{\mathcal{J}}$ und $\overline{\mathcal{J}^2}$ die topologischen Abschlüsse der Ideale $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}^2$ im vervollständigten Tensorprodukt $\mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A}$ sind. Dann wird die Kähler-Ableitung $\mathrm{d} : \mathcal{A} \to \Omega_{\mathcal{A}/\Bbbk} \hookrightarrow \overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk}$ zu einer stetigen Abbildung. Ordnet man nun jeder stetigen Derivation $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ die aufgrund der universellen Eigenschaft des π-Tensorprodukts ebenfalls stetige Abbildung

$$\mathrm{i}_\delta : \mathcal{A}\hat{\otimes}_\pi\mathcal{A} \to \mathcal{M}, \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \otimes b_j \mapsto \sum a_j\, \delta(b_j)$$

zu, so gilt $\delta = \mathrm{i}_\delta \circ \mathrm{d}$, und i_δ ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Mit anderen Worten stellt das so definierte $\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk}$ tatsächlich den Funktor $\mathrm{Der}_c(\mathcal{A}, -)$ dar. Wir nennen $\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk}$ den Raum der *topologischen Kähler-Differentiale*. Die *topologischen Kähler-Differentiale* der *Ordnung* k ergeben sich als Elemente des Raums $\overline{\Omega}^k_{\mathcal{A}/\Bbbk} = \overline{\Lambda}^k\overline{\Omega}_{\mathcal{A}/\Bbbk}$, wobei $\overline{\Lambda}^k V \subset V\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi V$ für einen vollständig lokalkonvexen Vektorraum den topologischen Abschluß von $\Lambda^k V$ im vollständigen k-fachen π-Tensorprodukt bedeutet.

B.3 Anwendung auf lokal geringte Räume

B.3.1 Als nächstes betrachten wir einen kommutativen lokal geringten Raum $(X, \mathcal{O})$ über $\Bbbk = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Für jeden Punkt $x \in X$ bilden wir dann den Modul $\Omega_x := \Omega_{\mathcal{O}_x/\Bbbk} = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ der Kählerdifferentiale über dem Halm $\mathcal{O}_x$, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_x$ ist. Den Raum

$$\acute{\mathrm{E}}\big(\Omega_{X,\Bbbk}\big) := \bigcup_{x\in X} \Omega_{\mathcal{O}_x/\Bbbk}$$

versieht man mit der feinsten Topologie, so daß alle Abbildungen der Form

$$\overline{f} : V \to \acute{\mathrm{E}}\big(\Omega_{X,\Bbbk}\big), \quad x \mapsto \mathrm{d}[f]_x$$

stetig sind. Dabei durchläuft $V \subset X$ alle offenen Mengen in X, und f alle Elemente der Algebra $\mathcal{O}(V)$. Dann wird $\acute{\mathrm{E}}\big(\Omega_{X,\Bbbk}\big)$ zum espace étalé einer Garbe $\Omega_{X/\Bbbk}$ auf X (bezüglich Details zum espace étalé siehe Godement [54, Sec. II.1.2]), die man gewöhnlich als die *Garbe der Kähler-Differentiale* auf $(X, \mathcal{O})$ bezeichnet. Da die Konstruktion des äußeren Produkts und der äußeren Ableitung funktoriell in $\mathcal{A}$ bzw. $\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$ ist, erhält man in kanonischer Weise aus $\Omega_{X/\Bbbk}$ die Garbe $\Omega^k_{X/\Bbbk}$ der k-Formen auf X und die Garbe $\Omega^\bullet_{X/\Bbbk}$. Genauer gesagt definiert man zuerst Prägarben $\widetilde{\Omega}^k_{X/\Bbbk}$ und $\widetilde{\Omega}^\bullet_{X/\Bbbk}$ auf X, indem man für alle $U \subset X$ offen setzt:

$$\Omega^k_{X/\Bbbk}(U) := \Lambda^k(\Omega_{X/\Bbbk}(U)) \text{ und } \Omega^\bullet_{X/\Bbbk}(U) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Omega^k_{X/\Bbbk}(U).$$

Die dazu assoziierten Garben sind dann die gesuchten Garben $\Omega^k_{X/\Bbbk}$ und $\Omega^\bullet_{X/\Bbbk}$. Die Kähler-Ableitung auf den Schnitträumen $d : \widetilde{\Omega}^\bullet_{X/\Bbbk} \to \widetilde{\Omega}^\bullet_{X/\Bbbk}$ liefert dann einen Garbenmorphismus $d : \Omega^\bullet_{X/\Bbbk} \to \Omega^\bullet_{X/\Bbbk}$. Insgesamt erhält man somit für jeden lokal geringten Raum einen Komplex von Garben:

$$\left(\Omega^\bullet_{X/\Bbbk} d\right) : \mathcal{O} \xrightarrow{d^0} \Omega^1_{X/\Bbbk} \xrightarrow{d^1} \Omega^2_{X/\Bbbk} \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^{k-1}} \Omega^k_{X/\Bbbk} \xrightarrow{d^k} \cdots .$$

B.3.2 Nehmen wir an, die Halme $\mathcal{O}_x$ des lokal-geringten Raums $(X, \mathcal{O})$ seien alle Noethersch oder mit einer vollständig lokalkonvexen Topologie versehen. Dann bezeichnen wir mit $T^Z_x X$ den *Zariski-Tangentialraum* von X über x, das heißt die Menge aller linearen bzw. stetig linearen Abbildungen $\lambda : \Omega_x \to \Bbbk$. Mit anderen Worten stellt der Zariski-Tangentialraum also aufgrund der universellen Eigenschaft (KÄ) die Menge aller (stetigen) Derivationen von $\mathcal{O}_x$ nach $\Bbbk$ dar.

Sei $F = (f, \Phi) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus lokal geringter Räume derart, daß im topologischen Fall jeder der kanonischen Homomorphismen $\Phi_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ stetig ist. Dann induziert F eine sogenannte *Tangentialabbildung* $T^Z F : T^Z X \to T^Z Y$ durch

$$T^Z_x X \ni \lambda \mapsto \lambda \circ \Phi_x \in T^Z_{f(x)} Y.$$

Ist $G = (g, \Psi) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ ein weiterer derartiger Morphismus lokal geringter Räume, so gilt offensichtlich $T^Z G \circ T^Z F = T^Z(G \circ F)$.

Anhang C

Jets, Whitney-Funktionen und einige $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen

C.1 Fréchet-Topologien auf $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen

Die Algebra $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$ der glatten Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n besitzt in natürlicher Weise die Struktur einer Fréchet-Algebra. Wir geben eine die Topologie von $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$ definierende Folge von Seminormen an. Sei dazu $(\mathsf{U}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von M durch Kartenbereiche $\mathsf{U}_j \subset \mathsf{M}$ derart, daß es kompakte $\mathsf{K}_j \subset \mathsf{U}_j$ gibt, so daß auch die Familie der inneren Kerne $\mathsf{K}_j^\circ \subset \mathsf{U}_j$ die Mannigfaltigkeit M überdeckt. Sei weiter $(\mathsf{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Familie differenzierbarer Karten $\mathsf{x}_j : \mathsf{U}_j \to \mathbb{R}^n$. Dann wird für jedes natürliche m durch

$$\left| \, \mathsf{f} \, \right|_{\mathsf{m}} := \sum_{j,|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha_{\mathsf{x}_j} \mathsf{f}\|_{\mathsf{K}_j}, \qquad \mathsf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$$

eine Seminorm auf $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$ definiert, wobei $\|\cdot\|_{\mathsf{K}_j}$ die Supremumsnorm über der kompakten Menge K_j bezeichnet, und $\partial^\alpha_{\mathsf{x}_j}$ die höheren partiellen Ableitungen in den durch x_j gegebenen Koordinaten. Mit etwas Geduld und Rechnerei prüft man nach, daß die Seminormen $\left|\cdot\right|_{\mathsf{m}}$ die Algebra $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$ zu einer Fréchet-Algebra machen, und daß die Fréchet-Topologie unabhängig von der speziellen Wahl der Anfangsdaten ist. Es ist ein wohlbekanntes Resultat aus der Funktionalanalysis, daß für zwei Mannigfaltigkeiten M und N das vervollständigte π-Tensorprodukt $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})\hat{\otimes}_\pi\mathcal{C}^\infty(\mathsf{N})$ kanonisch isomorph zu der Fréchet-Algebra $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M}\times\mathsf{N})$ ist. Ein Beweis dieser Tatsache findet sich zum Beispiel in Trèves [151].

Neben den Räumen glatter Funktionen kann man auch den Raum $\Omega(\mathsf{M})$ der glatten Eins-Formen auf M, oder mit anderen Worten den Raum der Kähler-Differentiale von $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$ mit einer kanonischen Fréchet-Topologie versehen, wodurch $\Omega(\mathsf{M})$ zu einem endlich erzeugten projektiven Fréchet-$\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M})$-Modul wird, insbesondere also topologisch projektiv ist (siehe Abschnitt 6.3). Im Detail: mittels der obigen Kartenüberdeckung $(\mathsf{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ legt man folgendermaßen Seminormen $\left|\cdot\right|_{\mathsf{m},1}$, die die Fréchet-Topologie auf $\Omega(\mathsf{M})$ induzieren, fest

$$\left| \, \omega \, \right|_{\mathsf{m},1} := \sum_{j,|\alpha|\le \mathsf{m}} \sum_{l=1}^{n} \|\partial^\alpha_{\mathsf{x}_j} \omega_{j,l}\|_{\mathsf{K}_j}, \qquad \omega \in \Omega(\mathsf{M}),\ \omega_{|\mathsf{U}_j} = \sum_{l=1}^{n} \omega_{j,l}\, d\mathsf{x}_j^l.$$

Genauso werden übrigens auch die höheren alternierenden Produkte $\Omega^k(M)$ zu endlich erzeugten projektiven Fréchet-$\mathcal{C}^\infty(M)$-Moduln. Die Kähler-Ableitung $d : \mathcal{C}^\infty(M) \to \Omega(M)$ ist mit der eben definierten Topologie auf $\Omega(M)$ eine stetige Abbildung, induziert also nach Abschnitt B.2 eine eindeutig bestimmte stetige $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineare Abbildung $\Upsilon : \overline{\Omega}_{\mathcal{C}^\infty(M)/\mathbb{R}} \to \Omega(M)$, wobei noch zu bemerken ist, daß $\overline{\Omega}_{\mathcal{C}^\infty(M)/\mathbb{R}}$ ein Fréchet-Raum sein muß, da das ja schon für $\mathcal{C}^\infty(M)$ der Fall ist. Die Abbildung Υ ist surjektiv, da ihr Bild das aus den Formen df, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ bestehende Erzeugendsystem enthält, und injektiv, da $\Omega(M)$ wegen der universellen Eigenschaft (KÄ) in $\overline{\Omega}_{\mathcal{C}^\infty(M)/\mathbb{R}}$ liegt. Aufgrund des Satzes von der offenen Abbildung sind damit $\Omega(M)$ und $\overline{\Omega}_{\mathcal{C}^\infty(M)/\mathbb{R}}$ topologisch linear isomorph.

C.2 Jets

C.2.1 In dieser Monographie wird, besonders im Zusammenhang mit Untersuchungen zu Jets und Whitney-Funktionen, gelegentlich die Landau-Notation verwendet, die hier kurz vorgestellt werden soll. Seien f, g zwei reell- oder komplexwertige Funktionen auf dem topologischen Raum A, und $z \in A$. Man schreibt dann

$$f(x) = O\left(g(x)\right), \qquad x \to z,$$

falls eine Umgebung U von z existiert, so daß $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ für alle $x \in U\backslash\{z\}$ definiert und durch ein $C > 0$ beschränkt ist. Gilt zudem

$$\lim_{\substack{x\to z\\ x\in A\backslash\{z\}}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

so schreibt man

$$f(x) = o\left(g(x)\right), \qquad x \to z.$$

C.2.2 Sei A eine lokal abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $O \subset \mathbb{R}^n$ so gewählt, daß $A \subset O$ abgeschlossen. Eine Familie $F = \left(F^{(\alpha)}\right)_{|\alpha|\leq k}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ stetiger Funktionen $F^{(\alpha)}$ auf A heißt *Jet der Ordnung* m auf A oder auch kürzer nur m-*Jet* auf A. Der Raum $J^m(A)$ der m-Jets auf A besitzt in natürlicher Weise die Struktur eines reellen Vektorraums. Ist $K \subset A$ kompakt, so erhält man durch

$$|F|_{K,m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} \left|F^{(\alpha)}(x)\right|$$

eine Seminorm auf $J^m(A)$. Versieht man $J^m(A)$ mit der durch alle Seminormen $|\cdot|_{K,m}$ definierten lokalkonvexen Topologie, so wird $J^m(A)$ zu einem Fréchet-Raum, da eine kompakte Ausschöpfung von X existiert, d.h. eine Folge von Kompakta $K_j \subset A$, so daß $\bigcup_j K_j = A$ und $K_j \subset K_j^\circ$.

Für alle $x \in A$ und $F \in J^m(A)$ definiert man den Wert von F an der Stelle x durch $F(x) := F^{(0)}(x)$. Zudem bezeichnet man für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$ mit $|\beta| \leq m$ die lineare Abbildung $J^m(A) \to J^{m-|\beta|}(A)$, $\left(F^{(\alpha)}\right)_{|\alpha|\leq k} \mapsto \left(F^{(\alpha+\beta)}\right)_{|\alpha|\leq m-|\beta|}$ mit D^β, und definiert die sogenannte

Jet-Abbildung $J^m : \mathcal{C}^m(O) \to J^m(A)$ durch $g \mapsto \left(\left(\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha} \right)_{|A} \right)_{|\alpha| \leq k}$. Mit dem wohlbekannten Differentialoperator D^α, $|\alpha| \leq m$ auf $\mathcal{C}^m(O)$ gilt dann

$$D^\alpha \circ J^m = J^{m-|\alpha|} \circ D^\alpha.$$

Dem Kern von J^m gibt man einen eigene Bezeichnung, nämlich Raum der auf A *flachen Funktionen* der *Klasse* $\mathcal{C}^m$, und notiert ihn in der Form $\mathcal{J}^m(A; O) := \ker J^m$ bzw. $\mathcal{J}(A; O) := \mathcal{J}^\infty(A; O) := \ker J^\infty$.

Jedem m-Jet $F \in J^m(A)$ mit $m < \infty$ und jedem Punkt $z \in A$ wird ein Polynom $T^m_z F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Ordnung m zugeordnet:

$$T^m_z F(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(x-z)^{(\alpha)}}{\alpha!} F^\alpha(z).$$

Desweiteren setzt man

$$R^m_z F = F - J^m(T^m_z F),$$

und interpretiert $R^m_z F$ als das „Restglied“ von F nach der „Taylorentwicklung” $T^m_z F$ bis zur Ordnung m.

C.3 Whitney-Funktionen

C.3.1 Definition Unter einer *Whitney-Funktion* auf A der *Klasse* $\mathcal{C}^m$, $m \in \mathbb{N}$, versteht man einen Jet $F \in J^m(A)$ der Ordnung m, so daß für jedes Kompaktum $K \subset A$

$$(R^m_x F)^{(\alpha)}(y) = o\big(|x-y|^{m-|\alpha|}\big), \qquad |x-y| \to 0,\ x, y \in K.$$

Ein Jet $F \in J^\infty(A)$ heißt *Whitney-Funktion* der *Klasse* $\mathcal{C}^\infty$, falls für alle $m \in \mathbb{N}$ die Projektion von F auf $J^m(A)$ eine Whitney-Funktion ist. Der Raum aller Whitney-Funktionen auf A der Klasse $\mathcal{C}^m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ist linear und wird mit $\mathcal{E}^m(A)$ bezeichnet.

Es gilt dann der berühmte

C.3.2 Fortsetzungssatz von Whitney *Für jede lokal abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und jede offene Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset O$ abgeschlossen ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}^m(A; O) \longrightarrow \mathcal{C}^m(O) \longrightarrow \mathcal{E}^m(A) \longrightarrow 0$$

exakt. Im Falle $m < \infty$ zerfällt diese Sequenz topologisch, das heißt es existiert ein stetiger Schnitt $\mathcal{E}^m(A) \to \mathcal{C}^m(O)$.

Beweis: Siehe zum Beispiel Malgrange [111, Thm. 4.1]. □

Im Allgemeinen muß $\mathcal{E}^m(A)$ kein abgeschlossener Unterraum von $J^m(A)$ sein. Mit anderen Worten ist $\mathcal{E}^m(A)$ nicht immer vollständig bezüglich der Seminormen $|\cdot|_{K,m}$ (siehe jedoch Korollar 1.6.13 für Kriterien, wann die Abgeschlossenheit von $\mathcal{E}^m(A)$ in $J^m(A)$ gegeben ist). Auf dem Raum der Whitney-Funktionen definiert man deshalb die Seminormen $||\cdot||_{K,m}$ durch

$$||F||_{K,m} := |F|_{K,m} + \sup_{\substack{x,y \in K,\ x \neq y \\ |\alpha| \leq m}} \frac{(R^m_x F)^{(\alpha)}(y)}{|x-y|^{m-|\alpha|}}, \qquad F \in \mathcal{E}^m(A).$$

Durchläuft K eine kompakte Ausschöpfung von A und m alle natürlichen Zahlen, so liefern die Seminormen $\|\cdot\|_{K,m}$ eine lokalkonvexe Topologie, die $\mathcal{E}^m(A)$ zu einem Fréchet-Raum machen.

C.3.3 Lemma *Unter den Voraussetzung von Satz C.3.2 gilt* $\mathcal{J}^\infty(A;O) = \mathcal{J}^\infty(A;O)^2$.

Beweis: Siehe Tougeron [150, Lem. 2.4]. □

C.4 Glättung des Winkels

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Funktion zu konstruieren, die anschaulich gesprochen den Winkel glättet.

C.4.1 Lemma *Es existiert eine glatte Funktion* $\varphi : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]\times[0,1]$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) φ *ist ein Homöomorphismus auf sein Bild.*

(2) *Die Einschränkung von* φ *auf* $([0,1]\times[0,1]) \setminus \{(\frac{1}{2},0)\}$ *ist glatt.*

(3) $D\varphi(s,t)$ *ist bijektiv für alle* $s,t \in [0,1]$ *mit* $(s,t) \neq (\frac{1}{2},0)$.

(4) $\varphi\big(\frac{1}{2},0\big) = (0,0)$, $\varphi\big([0,\frac{1}{2}]\times\{0\}\big) \subset \{0\}\times[0,1]$ *und* $\varphi\big([\frac{1}{2},1]\times\{0\}\big) \subset [0,1]\times\{0\}$.

(5) $\varphi(s,t) = \big(\frac{t}{3}, 1-2s\big)$ *für* $0 \le s \le \frac{1}{6}$ *und* $\varphi(s,t) = \big(s-\frac{1}{2}, \frac{t}{3}\big)$ *für* $\frac{5}{6} \le s \le 1$.

Eine solche Funktion φ *kann zudem noch entweder glatt auf ihrem Definitionsbereich gewählt werden oder derart, daß* φ *temperiert relativ* $\{(\frac{1}{2},0)\}$ *ist.*

Beweis: Sei $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine glatte Funktionen, so daß $\chi(s) = 0$ für $s \le 0$, $\chi'(s) > 0$ für $0 < s < 1$ und $\chi(s) = 1$ für $s \ge 1$. Außerdem sei $\overline{\chi} = 1 - \chi$. Dann definieren wir eine glatte Funktion $\tilde\varphi : [0,1]\times]0,1] \to [0,1]\times[0,1]$ durch $\tilde\varphi = (\tilde\varphi_1, \tilde\varphi_2)$ mit

$$\tilde\varphi_1(s,t) = \begin{cases} \frac{t}{3} & \text{für } s \in I_t^1, \\ \frac{t}{3}\,\overline{\chi}(\frac{6s+2t-3}{t}) + (\frac{2t}{3} - \frac{t}{3}\cos(\frac{\pi(6s+2t-3)}{8t}))\,\chi(\frac{6s+2t-3}{t}) & \text{für } s \in I_t^2, \\ (\frac{2t}{3} - \frac{t}{3}\cos(\frac{\pi(6s+2t-3)}{8t})) & \text{für } s \in I_t^3, \\ (s-\frac{1}{2})\,\chi(\frac{6s-t-3}{t}) + (\frac{2t}{3} - \frac{t}{3}\cos(\frac{\pi(6s+2t-3)}{8t}))\,\overline{\chi}(\frac{6s-t-3}{t}) & \text{für } s \in I_t^4, \\ s - \frac{1}{2} & \text{für } s \in I_t^5, \end{cases}$$

$$\tilde\varphi_2(s,t) = \begin{cases} (1-2s) & \text{für } s \in I_t^1, \\ (1-2s)\,\overline{\chi}(\frac{6s+2t-3}{t}) + (\frac{2t}{3} - \frac{t}{3}\sin(\frac{\pi(6s+2t-3)}{8t}))\,\chi(\frac{6s+2t-3}{t}) & \text{für } s \in I_t^2, \\ (\frac{2t}{3} - \frac{t}{3}, \sin(\frac{\pi(6s+2t-3)}{8t})) & \text{für } s \in I_t^3 \\ \frac{t}{3}\,\chi(\frac{6s-t-3}{t}) + (\frac{2t}{3} - \frac{t}{3}\sin(\frac{\pi(6s+2t-3)}{8t}))\,\overline{\chi}(\frac{6s-t-3}{t}) & \text{für } s \in I_t^4, \\ \frac{t}{3} & \text{für } s \in I_t^5, \end{cases}$$

wobei $I_t^1 = [0, \frac{1}{2} - \frac{t}{3}]$, $I_t^2 = [\frac{1}{2} - \frac{t}{3}, \frac{1}{2} - \frac{t}{6}]$, $I_t^3 = [\frac{1}{2} - \frac{t}{6}, \frac{1}{2} + \frac{t}{6}]$, $I_t^4 = [\frac{1}{2} + \frac{t}{6}, \frac{1}{2} + \frac{t}{3}]$ und $I_t^5 := [\frac{1}{2} + \frac{t}{3}, 1]$. Zuerst stellt man fest, daß $\tilde{\varphi}$ per Definition (5) erfüllt. Durch eine längere, aber leichte Rechnung beweist man, daß $\tilde{\varphi}_1$ (bzw. $\tilde{\varphi}_2$) für festes s monoton wachsend in t ist, und für festes t monoton wachsend (bzw. fallend) in s. Wir zeigen dies für $\tilde{\varphi}_1$ und $s \in I_t^2$ im Detail mittels Ableiten; die restlichen Monotonienachweise verlaufen analog, deswegen werden sie nicht näher ausgeführt. Mit $\eta(t,s) = \frac{6s+2t-3}{t}$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}_1(t,s) &= \frac{1}{3}\overline{\chi}(\eta(t,s)) + \frac{1}{3}\left(2 - \cos\left(\frac{\pi}{8}\eta(t,s)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\eta(t,s)\right)\frac{\pi}{8}\frac{3-6s}{t}\right)\chi(\eta(t,s)) \\ &\quad + \frac{t}{3}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{8}\eta(t,s)\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}(\chi(\eta(t,s))) \\ &\geq \frac{1}{3} + \frac{\pi}{24}\sin\left(\frac{\pi}{8}\eta(t,s)\right)\chi(\eta(t,s)) > 0,\end{aligned}$$

woraus sich das monotone Wachstum von $\tilde{\varphi}_1$ bezüglich t ergibt, solange $s \in I_t^2$. Aufgrund des Monotonieverhaltens der Komponentenfunktionen $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ schließt man, daß $\tilde{\varphi}$ bijektiv sein muß. Setzt man nun $\tilde{\varphi}$ durch

$$\tilde{\varphi}(s,0) = \begin{cases}(0, 1-2s) & \text{für } s \leq \frac{1}{2}, \\ (s - \frac{1}{2}, 0) & \text{für } s \leq \frac{1}{2},\end{cases}$$

zu einer stetigen Funktion auf $[0,1] \times [0,1]$ fort, so genügt das so ausgedehnte $\tilde{\varphi}$ den Bedingungen (1) bis (5) und ist temperiert relativ $\{(\frac{1}{2}, 0)\}$.

Desweiteren ist es ein Leichtes einzusehen, daß die Funktion

$$\varphi : [0,1]\times]0,1] \to [0,1] \times [0,1], \quad (s,t) \mapsto \chi\left(\left((s - \tfrac{1}{2})^2 + t^2\right) \cdot 100\right)\tilde{\varphi}(s,t)$$

zu einer glatten Abbildung φ auf $[0,1] \times [0,1]$ ausgedehnt werden kann, die einen Homöomorphismus auf ihr Bild darstellt. Daß die Ableitung $D\varphi(s,t)$ für alle $(s,t) \neq (\frac{1}{2}, 0)$ bijektiv ist und für $(s,t) = (\frac{1}{2}, 0)$ verschwindet, ergibt sich wieder durch längere, aber offensichtliche Rechnung. Insgesamt erhalten wir somit die Behauptung. □

C.4.2 Proposition *Seien M und N zwei Mannigfaltigkeiten mit Rand, wobei die Ränder ∂M und ∂N jeweils nicht leer sein sollen. Dann existiert auf dem topologischen Produkt eine (nicht eindeutige) Mannigfaltigkeitsstruktur, so daß $M \times N$ zu einer Mannigfaltigkeit mit Rand wird, $\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N$ gilt, und die differenzierbare Struktur über $M^\circ \times N^\circ$ mit dem kanonischen Produkt der Mannigfaltigkeiten M° und N° übereinstimmt.*

Beweis: Bevor wir zu unserem eigentlichen Anliegen kommen, besorgen wir uns zuerst aus dem vorangehenden Lemma eine die Ecke glättende Funktion

$$\varphi : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1].$$

Dann versehen wir das Innere $M^\circ \times N^\circ$ von $M \times N$ mit der natürliche differenzierbare Struktur des Produkts der Mannigfaltigkeiten M° und N°. Also brauchen wir nur noch die Mannigfaltigkeitsstruktur über dem Rand $\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N$ anzugeben, können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $M = \partial M \times [0,1[$ und $N = \partial N \times [0,1[$. Da auch die beiden offenen Mengen $\partial M \times]0,1[\times \partial N \times [0,1[$ und

$\partial M \times [0,1[\times \partial N \times]0,1[$ in kanonischer Weise eine differenzierbare Struktur tragen, muß nur in einer Umgebung eines jeden Punktes $(x,0,y,0)$ mit $x \in \partial M$, $y \in \partial N$ eine mit den restlichen Karten kompatible Karte angegeben werden. Genauer gesagt suchen wir einen Homöomorphismus $\mathsf{y} : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\geq 0}$ von einer Umgebung U von $(x,0,y,0)$ in den Euklidischen (Halb-) Raum derart, daß y um jeden Punkt der Form (x,s,y,t) mit $(s,t) \neq (0,0)$ ein Diffeomorphismus ist, und so daß $\mathsf{y}(\partial(M \times N)) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ gilt. Jetzt kommt der Homöomorphismus φ ins Spiel, dessen Umkehrfunktion wir mit $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2)$ bezeichnen. Man definiert dann einfach auf einem genügend kleinen U die Karte y durch

$$\mathsf{y}(x', s, y', t) = \big(\mathsf{y}_M(x'), \mathsf{y}_N(y'), \overline{\varphi}_1(s,t), \overline{\varphi}_2(s,t)\big), \quad (x', s, y', t) \in U,$$

wobei y_M und y_N differenzierbare Karten von ∂M bzw. ∂N um x bzw. y bezeichnen. Aufgrund der charakteristischen Eigenschaften von φ ist y eine Karte der gewünschten Art. Man beachte dabei jedoch, daß die so definierte differenzierbare Struktur auf dem Produkt $M \times N$ in der Nähe der kritischen Punkte $(x,0,y,0)$ von der Wahl der Funktion φ abhängt. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] R. Abraham und J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2 ed., Addison-Wesley Publishing Company, 1978.

[2] H. Amann, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Walter de Gruyter, 1983.

[3] M.F. Atiyah und R. Bott, *The Yang–Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **308** (1983), 524–615.

[4] L. Bates und E. Lerman, *Proper group actions and symplectic stratified spaces*, Pacific J. Math. **181** (1997), no. 2, 201–229.

[5] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, und D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization*, Ann. Physics **111** (1978), 61–151.

[6] K. Bekka, *Propriétés métriques et topologiques des espaces stratifiés*, Ph.D. thesis, Université des Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1988.

[7] ______, *(c)-régularité et trivialité topologique*, Singularity Theory and its Applications (Warwick), LNM, vol. 1462, Springer-Verlag, 1989, pp. 42–62.

[8] ______, *Regular quasi-homogeneous stratifications*, Stratifications, Singularities and Differential Equations II, Stratifications and Topology of Singular Sapces (Honolulu) (D. Trotman & L.C. Wilson, ed.), Travaux en Cours, vol. 55, Hermann, 1997, pp. 1–14.

[9] K. Bekka und D. Trotman, *Propriétés métriques de familles ϕ-radiales des sous-variétés différentiables*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305** (1987), 389–392.

[10] E. Bierstone, *Lifting isotopies from orbit spaces*, Topology **14** (1975), 245–252.

[11] ______, *The Structure of Orbit Spaces and the Singularities of Equivariant Mappings*, Monografias de Matemática, vol. 35, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1980.

[12] E. Bierstone und P.D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Publ. Math. IHES **67** (1988), 5–42.

[13] R.L. Bishop und R.J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Pure and Applied Mathematics, vol. XV, Academic Press, 1964.

[14] J. Block und E. Getzler, *Equivariant cyclic homology and equivariant differential forms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27** (1994), 493–527.

[15] T. Bloom und M. Herrera, *De Rham cohomology of an analytic space*, Invent. Math. **7** (1969), 275–296.

[16] A. Borel, *Fixed point theorems for elementary commutative groups I,II*, Seminar on Transformation Groups, Annals of Math. Studies, vol. 46, 1960.

[17] J.P. Brasselet, *De Rham theorems for singular varieties*, Differential Topology, Foliations, and Group Actions, Contemporary Mathematics, vol. 161, AMS, 1994, pp. 95–112.

[18] J.P. Brasselet, M. Goresky, und R. MacPherson, *Simplicial differential forms with poles*, Amer. J. Math. **113** (1991), 1019–1052.

[19] J.P. Brasselet, G. Hector, und M. Saralegi, *Théorème de De Rham pour les variétés stratifiées*, Ann. Global Anal. Geom. **9** (1991), no. 3, 211–243.

[20] J.P. Brasselet und A. Legrand, *Differential forms on singular varieties and cyclic homology*, Proceedings of the European singularities conference, Liverpool, UK (Bill Bruce et al., ed.), Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 263, Cambridge University Press, 1999, pp. 175–187.

[21] G.E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York, 1972.

[22] J. Brüning und E. Heintze, *Representations of compact Lie groups and elliptic operators*, Invent. Math. **50** (1979), 169–203.

[23] ———, *The asymptotic expansion of Minakshisundaram-Pleijel in the equivariant case*, Duke Math. J. **51** (1984), 959–980.

[24] J. Brüning und M. Lesch, *Hilbert complexes*, J. Funct. Anal. **108** (1992), no. 1, 88–132.

[25] ———, *Kähler–Hodge theory for conformal complex cones*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), 439–473.

[26] ———, *On the spectral geometry of algebraic curves*, J. Reine Angew. Math. **474** (1996), 25–66.

[27] J. Brüning und R. Seeley, *Regular singular asymptotics*, Adv. in Math. **58** (1985), 133–148.

[28] ———, *The resolvent expansion for second order regular singular operators*, J. Funct. Anal. **73** (1987), 369–429.

[29] ———, *An index theorem for first order regular singular operators*, Amer. J. Math. **110** (1988), 659–714.

[30] ———, *The expansion of the resolvent near a singular stratum of conical type*, J. Funct. Anal. **95** (1991), 255–290.

[31] J.L. Brylinski, *Cyclic homolgy and equivariant theories*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **37** (1987), no. 4, 15–28.

[32] H. Busemann, *The Geometry of Geodesics*, Pure and Applied Mathematics, vol. VI, Academic Press, 1955.

[33] ______, *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 54, Springer Verlag, 1970.

[34] J. Cheeger, *On the spectral geometry of spaces cone-like singularities*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **76** (1979), 2103–2106.

[35] ______, *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds*, Proc. Sympos. Pure Math. **36** (1980), 21–45.

[36] ______, *Hodge theory of complex cones*, Analyse et topologie sur les espaces singuliers, Astérisque, vol. 102, Soc. Math. France, 1983, pp. 118–134.

[37] ______, *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Differential Geom. **18** (1983), 575–657.

[38] J. Cheeger, M. Goresky, und R. MacPherson, $\mathrm{L}_{(2)}$-*Cohomology and intersection homology for singular algebraic varieties*, Semin. differential geometry, Ann. of Math. Studies, vol. 102, Princeton University Press, 1982, pp. 303–340.

[39] J. Cheeger, W. Müller, und R. Schrader, *On the curvature of piecewise flat spaces*, Comm. Math. Phys. **92** (1984), 405–454.

[40] S. Cohn-Vossen, *Existenz kürzester Wege*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **3** (1935), 339–342.

[41] A. Connes, *Noncommutative differential geometry*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **62** (1985), 257–360.

[42] S. C. Coutinho, *A Primer of Algebraic* D*-modules*, Students Text, vol. 33, London Mathematical Society, 1995.

[43] R.H. Cushman und L.M. Bates, *Global Aspects of Classical Integrable Systems*, Birkhäuser, 1997.

[44] M. De Wilde und P. Lecomte, *Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys. **7** (1983), 487–496.

[45] ______, *Formal deformations of the Poisson Lie algebra of symplectic manifold and star-products. Existence, equivalence, derivations*, Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications (Dordrecht) (M. Hazewinkel and M. Gerstenhaber, eds.), Kluwer Acad. Pub., 1988, pp. 897–960.

[46] P. Deligne, *Categories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift, Collect. Artic. in Honor of the 60th Birthday of A. Grothendieck. Vol. II, Progress in Mathematics, vol. 87, Birkhäuser, 1990, pp. 111–195.

[47] Z. Denkowska und K. Wachta, *Une construction de la stratification sous-analytique avec la condition (w)*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **35** (1987), 401–405.

[48] B. Fedosov, *A simple geometrical construction of deformation quantization*, J. Differential Geom. **40** (1994), 213–238.

[49] ———, *Deformation Quantization and Index Theory*, Akademie Verlag, 1996.

[50] M. Ferrarotti, *Volume on stratified sets*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **144** (1986), 183–201.

[51] ———, *A complex of stratified forms satisfying De Rhams theorem*, Stratifications, Singularities and Differential Equations II, Stratifications and Topology of Singular Sapces (Honolulu) (D. Trotman & L.C. Wilson, ed.), Travaux en Cours, vol. 55, Hermann, 1997, pp. 25–38.

[52] ———, *Some results about volume of stratified sets*, Stratifications, Singularities and Differential Equations II, Stratifications and Topology of Singular Sapces (Honolulu) (D. Trotman & L.C. Wilson, ed.), Travaux en Cours, vol. 55, Hermann, 1997, pp. 39–43.

[53] M. Ferrarotti und L.C. Wilson, *Generalized Hesténès' Lemma and extension of functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 5, 1957–1975.

[54] R. Godement, *Topologie Algébrique et Theorie des Faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.

[55] W.M. Goldman, *The symplectic nature of the fundamental groups of surfaces*, Adv. in Math. **54** (1984), 200–225.

[56] M. Goresky, *Triangulation of stratified objects*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 193–200.

[57] M. Goresky und R. MacPherson, *Intersection homology theory*, Topology **19** (1980), 135–162.

[58] ———, *Intersection homology II*, Invent. Math. **71** (1983), 77–129.

[59] ———, *Stratified Morse Theory*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[60] A. Gray, *Tubes*, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

[61] D. Grieser, *Local geometry of singular real analytic surfaces*, preprint ESI 659 (1999), Erwin-Schrödinger-Institut, Wien.

[62] D. Grieser und M. Lesch, *On the L^2 -Stokes theorem and Hodge theory for singular algebraic varieties*, preprint SFB 288 (1999).

[63] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Progress in Mathematics, vol. 152, Birkhäuser, 1998.

[64] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espace nucléaires*, Memoirs of the AMS, vol. 16, Amer. Math. Soc., 1955.

[65] ———, *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES **29** (1966), 351–359.

[66] ———, *Elements de géométrie algébrique, EGA IV, Etude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publ. Math. IHES **32** (1967).

[67] ———, *Esquisse d'un programme*, Geometric Galois Theory 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme (L. Schneps & P. Lochak, ed.), Lond. Math. Soc. Lect. Notes, vol. 242, Cambridge University Press, 1997, pp. 5–48.

[68] K. Guruprasad, J. Huebschmann, L. Jeffrey, und A. Weinstein, *Group systems, groupoids, and moduli spaces of parabolic bundles*, Duke Math. J. **89** (1997), no. 2, 377–412.

[69] M. Gutfleisch, *Stratifizierte Räume und Quotienten in der Analysis*, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität, München, November 1995.

[70] Z. Hajto, *On the equivalence of Whitney* (b)*-regularity and* (b_s)*-regularity*, Wyż. Szkoła Ped. Krakow. Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. **10** (1982), 77–86.

[71] R. Hardt, *Stratifications of real analytic mappings and images*, Invent. Math. **28** (1975), 193–208.

[72] ———, *Topological properties of subanalytic sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **211** (1975), 57–70.

[73] ———, *Triangulation of subanalytic sets and proper light subanalytic maps*, Invent. Math. **38** (1977), 207–217.

[74] R. Hartshorne, *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **45** (1975), 5–99.

[75] A. Hassell, R. Mazzeo, und R.B. Melrose, *A signature formula for manifolds with corners of codimension two*, Topology **36** (1997), no. 5, 1055–1075.

[76] M. Herrera, *De Rham theorems on semianalytic sets*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 414–418.

[77] M. Herrera und D. Lieberman, *Duality and the DeRham cohomology of infinitesimal neighborhoods*, Invent. Math. **13** (1971), 97–124.

[78] M. Hesténès, *Extension of the range of a differentiable function*, Duke Math. J. **8** (1941), 183–192.

[79] P.J. Hilton und U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1971.

[80] H. Hironaka, *Subanalytic sets*, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra (Kinokuniya, Tokyo), 1973, volume in honor of A. Akizuki, pp. 453–493.

[81] ———, *Triangulation of algebraic sets*, Proc. Sympos. Pure Math. **29** (1975), 165–185.

[82] G. Hochschild, B. Kostant, und A. Rosenberg, *Differential forms on regular affine algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 383–408.

[83] H. Holmann und H. Rummler, *Alternierende Differentialformen*, Graduate Texts in Mathematics, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1981.

[84] H. Hopf und W. Rinow, *Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Comment. Math. Helv. **3** (1932), 209–225.

[85] J. Huebschmann, *Symplectic and Poisson structures of certain moduli spaces*, Duke Math. J. **80** (1995), 737–756.

[86] ______, *Poisson geometry of flat connections for* SU(2)*-bundles on surfaces*, Math. Z. **221** (1996), 243–259.

[87] ______, *Smooth structures on certain moduli spaces for bundles on a surface*, J. Pure Appl. Algebra **126** (1998), 183–221.

[88] K. Jänich, *Differenzierbare* G*-Mannigfaltigkeiten*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 59, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.

[89] F. Johnson, *On the triangulation of stratified sets and singular varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1983), 333–343.

[90] Y. Karshon, *An algebraic proof for the symplectic structure of moduli spaces*, Proc. AMS **116** (1992), 591–605.

[91] M. Kashiwara und P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer, Berlin, Heidelberg, 1990.

[92] T. Kawasaki, *The signature theorem for V-manifolds*, Topology **17** (1978), 75–83.

[93] ______, *The index of elliptic operators over V-manifolds*, Nagoya Math. J. **84** (1981), 135–157.

[94] W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, Studies in Mathematics, vol. 1, de Gruyter, Berlin, New York, 1982.

[95] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, q-alg/9709040 (1997).

[96] ______, *Formality conjecture*, Deformation Theory and Symplectic Geometry (D. Sternheimer et al., ed.), Kluwer Academic Publishers, 1997, pp. 139–156.

[97] J.L. Koszul, *Sur certains groupes de transformation de Lie*, Colloque de Géométrie Différentielle, Collogues du CNRS, vol. 71, 1953, pp. 137–141.

[98] T.C. Kuo, *The ratio test for analytic Whitney stratifications*, Liverpool Singularity Symposium I, LNM, vol. 192, Springer-Verlag, 1971, pp. 141–149.

[99] M. Kuppe, *Integralgeometrie Whitney-stratifizierter Mengen*, Ph.D. thesis, Universität Münster, 1999.

[100] K. Kurdyka und P. Orro, *Distance géodésique sur un sous-analytique*, Revista Mat. Univ. Complutense de Madrid **10** (1997), no. Suplementario, 173–182.

[101] S. Lang, *Differential Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[102] E. Lerman, R. Montgomery, und R. Sjamaar, *Examples of singular reduction*, Symplectic Geometry (D. Salamon, ed.), Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 192, Cambridge University Press, 1993, pp. 127–155.

[103] M. Lesch, *Die Struktur von Orbiträumen*, Vortragsausarbeitungen eines Vortrags bei der Max-Planck-Arbeitsgruppe Potsdam, September 1992.

[104] ______, *Operators of Fuchs type, conical singularities, and asymptotic methods*, Teubner Texte zur Mathematik, vol. 136, B. G. Teubner, Leipzig, 1997.

[105] J.-L. Loday, *Cyclic Homology*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[106] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division*, Studia Math. **18** (1959), 87–136.

[107] ______, *Triangulation of semi-analytic sets*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **18** (1964), 449–474.

[108] ______, *Ensemble semi-analytique*, Mimeographié, Institute des Hautes Études Scientifique, Bures-sur-Yvette, France, 1965.

[109] S. Łojasiewicz, J. Stasica, und K. Wachta, *Stratification sous-analytiques, Condition de Verdier*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **34** (1986), 531–539.

[110] J. Lott, *Signatures and higher signatures of S^1-quotients*, math. DG/9804105 (1998).

[111] B. Malgrange, *Ideals of Differentiable Functions*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, Oxford University Press, 1966.

[112] J.E. Marsden und A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Math. Phys. **5** (1974), 121–130.

[113] J.N. Mather, *Notes on topological stability*, Mimeographed Lecture Notes, Harvard, 1970.

[114] ______, *Stratifications and mappings*, Dynamical Systems (M. M. Peixoto, ed.), Academic Press, 1973, pp. 195–232.

[115] ______, *Differentiable invariants*, Topology **16** (1977), 145–155.

[116] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin/Cummings, London, etc., 1980.

[117] R.B. Melrose, *The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem*, Research Notes in Mathematics, vol. 4, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1993.

[118] ———, *Differential Analysis on Manifolds with Corners*, in preparation, 1999 (preliminary version).

[119] R.B. Melrose und V. Nistor, *Homology of pseudodifferential operators I. Manifolds with boundary*, funct-an/9606005 (1996).

[120] K. Meyer, *Symmetries and integrals in mathematics*, Dynamical Systems (M.M. Peixoto, ed.), Academic Press, New York, 1973, pp. 259–273.

[121] T. Mostowski, *Lipschitz Equisingularity*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) CCXLIII (1985).

[122] M. Nagase, *$\mathcal{L}^2$-cohomology and intersection cohomology of stratified spaces*, Duke Math. J. **50** (1983), 329–368.

[123] ———, *Sheaf theoretic $\mathcal{L}^2$-cohomology*, Adv. Stud. Pure Math. **8** (1987), 273–279.

[124] R. Nest und B. Tsygan, *The algebraic index theorem*, Comm. Math. Phys. **172** (1995), 223–262.

[125] F. Norguet, *Dérivées partielles et résidus de formes différentielles*, Séminaire P. Lelong 1958-1959, no. Exp.no.10, Secrétariat mathématique, Paris, 1959.

[126] T. Ohsawa, *Cheeger–Goresky–MacPherson conjecture for varieties with isolated singularities*, Math. Z. **206** (1991), 219–224.

[127] J.-P. Ortega und T.S. Ratiu, *Singular reduction of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **46** (1998), no. 4, 359–372.

[128] R.S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Anal. Math. **73** (1961), 295–323.

[129] W. Pardon und M. Stern, *Pure Hodge structure on the L^2-cohomology of varieties with isolated singularities*, alg-geom/9711003 (1997).

[130] A. Parusiński, *Unveröffentlichte Arbeiten zur Integration von Krümmungsformen über subanalytischen Mengen.*

[131] ———, *Lipschitz stratification of subanalytic sets*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) t. 27 (1994), 661–696.

[132] N. Perkal, *On proving the geometric versions of Whitney regularity*, J. London Math. Soc. (2) **29** (1984), 343–351.

[133] M.J. Pflaum, *On continuous Hochschild homology and cohomology groups*, Lett. Math. Phys. **44** (1998), 43–51.

[134] H.-J. Reiffen, *Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen*, Math. Z. **101** (1967), 269–284.

[135] I. Satake, *On a generaliztion of the notion of manifold*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956), 359–363.

[136] M. Schlessinger und J. Stasheff, *The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory*, J. Pure Appl. Algebra **38** (1985), no. 2–3, 313–322.

[137] B.-W. Schulze, *Pseudo-differential Operators on Manifolds with Singularities*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[138] ______, *Pseudo-differential Boundary Value Problems, Conical Singularities, and Asymptotics*, Akademie-Verlag, Berlin, 1994.

[139] ______, *Operator algebras with symbol hierarchies on manifolds with singularities*, preprint 99/30 (1999), Arbeitsgruppe "Partielle Differentialgleichungen und Komplexe Analysis", Universität Potsdam.

[140] G.W. Schwarz, *Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group*, Topology **14** (1975), 63–68.

[141] R. Seeley, *Extension of $\mathcal{C}^\infty$ functions defined in a half space*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 625–626.

[142] M. Shiota, *Geometry of Subananlytic and Semialgebraic Sets*, Progress in Mathematics, vol. 150, Birkhäuser, 1997.

[143] R. Sjamaar, *Singular Orbit Spaces in Riemannian and Symplectic Geometry*, Ph.D. thesis, Rijksuniversiteit te Utrecht, 1990.

[144] R. Sjamaar und E. Lerman, *Stratified symplectic spaces and reduction*, Ann. of Math. (2) **134** (1991), 375–422.

[145] N. Teleman, *Microlocalisation de l'homologie de Hochschild*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), 1261–1264.

[146] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (1955–56), 43–87.

[147] ______, *La stabilité topologique des applications polynomiales*, Enseign. Math. (2) **8** (1962), 24–33.

[148] ______, *Local topological properties of differentiable mappings*, Colloquium on Differential Analysis, Tata Inst. Bombay, Oxford Univ. Press, 1964, pp. 191–202.

[149] ______, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **75** (1969), 240–284.

[150] J.-C. Tougeron, *Idéaux de Fonctions Différentiables*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 71, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[151] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, Inc., New York, 1967.

[152] D. Trotman, *Geometric versions of Whitney regularity for smooth stratifications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979), 453–463.

[153] ———, *On the canonical Whitney stratification of algebraic hypersurfaces*, Séminaire sur la géométrie réelle (J.-J. Risler, ed.), vol. 24, Publ. Math. Univ. Paris VII, no. 1, 1987, pp. 123–152.

[154] ———, *Espaces stratifiés réels*, Stratifications, Singularities and Differential Equations II, Stratifications and Topology of Singular Spaces (Honolulu) (D. Trotman & L.C. Wilson, ed.), Travaux en Cours, vol. 55, Hermann, 1997, pp. 93–107.

[155] J.-L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Invent. Math. **36** (1976), 295–312.

[156] A. Verona, *Le théorème de De Rham pour les prestratifications abstraites*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **273** (1971), 886–889.

[157] ———, *Homological properties of abstract préstratifications*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. Tome XVII, N° **7** (1972), 1109–1121.

[158] ———, *Integration on Whitney prestratifications*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. Tome XVII, N° **9** (1972), 1473–1480.

[159] ———, *Sur la cohomologie de De Rham des préstratifications de Whitney*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **274** (1972), 1340–1343.

[160] ———, *Stratified Mappings - Structures and Triangulability*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1102, Springer Verlag, 1984.

[161] A.A. Voronov, *Quantizing Poisson manifolds*, Contemporary Mathematics **214** (1991), 189–195.

[162] A. Wassermann, *Cyclic cohomology of algebras of smooth functions on orbifolds*, Operator algebras and application. Vol. 1: Structure theory; K-theory, geometry and topology, Lond. Math. Soc. Lect. Note, vol. 135, Cambridge University Press, 1988, pp. 229–244.

[163] C.A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.

[164] S. Weinberger, *The Topological Classification of Stratified Spaces*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, 1994.

[165] A. Weinstein, *Lectures on Symplectic Manifolds*, CBMS Regional Conference Series, vol. 29, American Mathematical Society, 1976.

[166] H. Weyl, *The Classical Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[167] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 63–89.

[168] ———, *Complexes of manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **33** (1946), 10–11.

[169] ———, *On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. **62** (1955), no. 3, 374–410.

[170] ———, *Elementary structure of real algebraic varieties*, Ann. of Math. **66** (1957), no. 3, 545–556.

[171] ———, *Tangents to an analytic variety*, Ann. of Math. **81** (1964), 496–549.

[172] ———, *Local properties of analytic varieties*, Differentiable and Combinatorial Topology (Princeton), Princeton University Press, 1965.

[173] S. Zucker, *Hodge theory with degenerating coefficients: L_2-cohomology in the Poincaré metric*, Ann. of Math. **109** (1979), 415–476.

[174] ———, *L^2-cohomology of warped products and arithmetic groups*, Invent. Math. **70** (1982), 169–218.